C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 351 (2013) 81–85

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Algèbre homologique/Topologie

L'anneau de cohomologie des variétés de Seifert

The cohomology ring structure of Seifert manifolds

Anne Bauval, Claude Hayat

IMT, UMR 5219, université Toulouse-3, 31062 Toulouse cedex 9, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 4 février 2011
Accepté après révision le 13 février 2013
Disponible sur Internet le 27 février 2013

Présenté par le Comité de rédaction

RÉSUMÉ

En subdivisant une décomposition cellulaire d'une variété de Seifert, on obtient une décomposition Δ-simpliciale et un quasi-isomorphisme. On exhibe des cocycles Δ-simpliciaux qui relèvent les générateurs cellulaires usuels de la cohomologie de la variété. Il ne reste plus qu'à appliquer la formule d'Alexander–Whitney pour décrire explicitement la structure d'anneau de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec p premier, de cette variété de Seifert.

ABSTRACT

The subdivision of the cell decomposition of a Seifert manifold yields a Δ-simplicial decomposition and a quasi-isomorphism. We exhibit Δ-simplicial cocycles that lift the usual cellular generators of the cohomology of the manifold. Applying the Alexander–Whitney formula, this allows one to describe explicitly the cohomology ring structure of this Seifert manifold with coefficients in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p prime.

Abridged English version

A Seifert manifold M is a 3-manifold classified by the so-called Seifert invariants $\{b, \in, g; (a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)\}$. The symbol $\in$ is one of the six types determined by Seifert [8] denoted by: $o_1, o_2, n_1, n_2, n_3, n_4$ (see [6]). The cases where M is orientable correspond to the types o_1 and n_2 studied for example in [2,3,9], and we obtain essentially the same result (up to choices of the generators).

In the sequel we add a new pair $(a_0, b_0) = (1, b)$ and use the number $c = \sum_{j=0}^{m} b_j a/a_j$, where a is the least common multiple of the a_j's. Let p be a prime, we denote by n the number of a_j's divisible by p and we distinguish three cases: Case 1: $n = 0$ and c is divisible by p; Case 2: $n = 0$ and c is not divisible by p; Case 3: $n > 0$. We reorder the pairs (a_j, b_j), putting in the beginning, in Cases 1 and 2, the ones with b_j divisible by p, and in Case 3, the ones with a_j divisible by p.

Geometrical description of the cellular complex associated with M. The cellular decomposition of M has *one* 0*-cell* σ and

1*-cell*: t_j, q_k, h (all with initial and end point σ);

4 *types of* 2*-cell*: δ with boundary $\prod_{1\leqslant i\leqslant g}[t_{2i-1}, t_{2i}]\prod_{0\leqslant k\leqslant m} q_k$ for the types o_i, $\prod_{1\leqslant j\leqslant g} t_j^2 \prod_{0\leqslant k\leqslant m} q_k$ for the types n_i; ρ_k tori with boundary $[h, q_k]$; ν_j tori if $\varepsilon_j = 1$ or Klein bottles if $\varepsilon_j = -1$, with boundary $ht_jh^{-\varepsilon_j}t_j^{-1}$; μ_k disks with

Adresses e-mail : bauval@math.univ-toulouse.fr (A. Bauval), hayat@math.univ-toulouse.fr (C. Hayat).

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.02.008

boundary a particular word $w_{a_k,b_k}(q_k,h)$ written with a_k times the letter q_k and b_k times h, defined recursively in 0.2 (see also [7]).

The 3-*cell* of M are of two types: ϵ, whose boundary (as a cell complex) is covered by two copies of δ and of each ν_j, and with one copy of each ρ_k; ζ_k, whose boundary is covered by two copies of μ_k and one copy of ρ_k. This decomposition is related to an essential property of the word $w_{a_k,b_k}(q_k,h)$.

The cochain dual to a cell x is denoted by $\hat{x} \in C^*(M;\mathbb{Z})$.

Fig. 1 gives the dimensions of $H^i(M;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, which is denoted by H^i. The dimensions are expressed as the sum of two brackets, one linked to the genus g (with $g'=g$ for the types n_i and $g'=2g$ for the types o_i), the other one to the number n. When the second term is (1), the extra generator of H^1 is denoted by $\alpha=[(c/2a)\hat{t}_1+\hat{h}-\sum b_k a_k^{-1}\hat{q}_k]$ with the convention that $c/2a=0$ in the case $p=2$ and the generator of H^2 is $\beta=[\hat{\delta}]$. The other generators used in the following theorem are: for H^1, $\theta_j=[\hat{t}_j-\hat{t}_1]$, $\alpha_k=[\hat{q}_k-(1/2)\hat{t}_g]$ for all the types n_i for $p>2$; for all the other cases $\theta_j=[\hat{t}_j], \alpha_k=[\hat{q}_k-\hat{q}_1]$. The indices are bounded as follows: $1\leqslant j\leqslant g', 0\leqslant k<n$. For H^2, $\beta_k=[\hat{\mu}_k]$ for all the types; $\varphi_j=[\hat{\nu}_j]$, for the types o_1, n_2; for the type n_3, the same except $\varphi_1=0$ if $p>2$; $\varphi_j=[\hat{\nu}_j-(-1)^j\hat{\nu}_1]$, for the type o_2; for the type n_1 we have $\varphi_j=[\hat{\nu}_j-\hat{\nu}_1]$, and for n_4, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=[\hat{\nu}_2-\hat{\nu}_1]$, and $\varphi_j=[\hat{\nu}_j]$, for $j>2$. The generator of H^3 is $\gamma=[\hat{\varepsilon}]$.

In the following theorem, the cup-products not necessarily zero are to be considered only if the left and right terms both exist (see Fig. 1).

Theorem 0.1. *In the ring structure of the cohomology $H^*(M;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ of the Seifert manifold M, the only cup-products not necessarily zero, expressed on these generators, are*:

- *on* $H^1\otimes H^1$:
  - $\theta_{2i-1}\smile\theta_{2i}=\beta$ *for* o_i, *Case* 1, *for* $p\geqslant 2$ *and for* o_2, *Case* 2, *for* $p>2$;
  - $\theta_j\smile\theta_j=\beta$ *for* n_i, *Case* 1, *for* $p=2$;
  - $\theta_j\smile\alpha=\varphi_j$ *for* o_i, n_i, *Case* 1, *for* $p=2$; *for* o_1, n_1, *Case* 1 *and* n_1, *Case* 2, *for* $p>2$;
  - $\alpha_k\smile\alpha_i=\frac{a_0}{2}\beta_1+\delta_{k,i}\frac{a_k}{2}\beta_k$ *for* o_i, n_i, *Case* 3, *for* $p=2$;
  - $\alpha\smile\alpha=\frac{c}{2}\beta+\sum_{\varepsilon_j=-1}\varphi_j$ *for* o_i, n_i, *Case* 1, *for* $p=2$;
- *on* $H^1\otimes H^2$:
  - $\theta_{2i-1}\smile\varphi_{2i}=\theta_{2i}\smile\varphi_{2i-1}=\gamma$ *for* o_i, *Cases* 1, 2, 3, *for* $p=2$;
  - $\theta_{2i}\smile\varphi_{2i-1}=-\gamma, \theta_{2i-1}\smile\varphi_{2i}=\gamma$ *for* o_1, *Cases* 1, 2, 3, *for* $p>2$;
  - $\theta_j\smile\varphi_j=\gamma$ *for* n_i, *Cases* 1, 2, 3, *for* $p=2$, *and for* n_2, *Cases* 1, 2, 3, *for* $p>2$;
  - $\alpha_k\smile\beta_k=b_k^{-1}\gamma$, *for* o_i, n_i, *Cases* 1, 2, 3, *for* $p=2$; *and* n_2, *Cases* 1, 2, 3, *for* $p>2$;
  - $\alpha\smile\beta=\gamma$ *for* o_i, n_i, *Case* 1, *for* $p=2$ *and* o_1, *Case* 1, *for* $p>2$;
  - $\alpha\smile\varphi_j=\gamma$, *for* o_2, n_2, *for* n_3, $j\neq 1$, *for* n_4, $j\neq 1,2$, *Case* 1, *for* $p=2$;
  - $\alpha_k\smile\varphi_g=1/2\gamma$ *for* o_1, n_2, *Case* 3, *for* $p>2$;
  - $\alpha_i\smile\beta_i=\gamma$ *for* o_i, n_i, *Case* 3, *for* $p=2$;
  - $\alpha_i\smile\beta_i=b_i^{-1}\gamma$ *for* o_1, n_2, *Case* 3, *for* $p>2$.

Une variété de Seifert M est une variété de dimension 3 classifiée par une famille d'invariants $\{b,\in,g;(a_1,b_1),\dots,(a_m,b_m)\}$. L'invariant $\in$ désigne l'un des six types déterminés par Seifert [8], qui sont notés : o_1,o_2,n_1,n_2,n_3,n_4 (voir [6]). Les cas où la variété M est orientable (types o_1 et n_2) sont étudiés par exemple dans [3] et [9]. Dans le cas o_1, nous retrouvons les mêmes structures d'anneau.

Dans la suite, nous ajoutons un couple $(a_0,b_0)=(1,b)$ et utiliserons le nombre $c=\sum_{j=0}^m b_j a/a_j$ où a est le plus petit commun multiple des a_j. Soit p un nombre premier, on note n le nombre des a_j qui sont divisibles par p et on distingue trois cas, qui sont : Cas 1 : $n=0$ et c divisible par p ; Cas 2 : $n=0$ et c non divisible par p ; Cas 3 : $n>0$. On réordonne les couples (a_j,b_j) en mettant en premier, dans les Cas 1 et 2, ceux avec b_j divisible par p, et dans le Cas 3, ceux avec a_j divisible par p.

Description géométrique du complexe cellulaire associé *M*. La décomposition cellulaire de la variété M comporte *une* 0-*cellule* σ ;

des 1-*cellules* (d'origine et d'extrémité σ) t_j, q_k, h ;

Il y a 4 *types de* 2-*cellules* : δ de bord $\prod_{1\leqslant i\leqslant g}[t_{2i-1},t_{2i}]\prod_{0\leqslant k\leqslant m}q_k$ pour les types o_i, $\prod t_j^2\prod q_k$ pour les types n_i ; ρ_k tores de bord $[h,q_k]$; ν_j tores si $\varepsilon_j=1$ ou bouteilles de Klein si $\varepsilon_j=-1$, de bord $ht_jh^{-\varepsilon_j}t_j^{-1}$; μ_k disques de bords, un certain mot $w_{a_k,b_k}(q_k,h)$ écrit avec a_k fois la lettre q_k et b_k fois la lettre h, et qui sera expliqué plus loin 0.2 (voir aussi [7]).

Les 3-*cellules* de M sont de deux types : ϵ, dont le bord (en tant que complexe cellulaire) est pavé par deux exemplaires de δ et de chaque ν_j et un exemplaire de chaque ρ_k ; ζ_k, dont le bord est pavé par deux exemplaires de μ_k et un exemplaire de ρ_k. Ce pavage est lié à une propriété essentielle du mot $w_{a_k,b_k}(q_k,h)$.

La cochaîne duale d'une cellule x est notée $\hat{x}\in C^*(M;\mathbb{Z})$.

La Fig. 1 donne les dimensions de $H^i(M;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ qui est noté H^i. Les dimensions sont exprimées comme sommes de deux parenthèses, l'une liée au genre g (avec $g'=g$ pour les types n_i et $g'=2g$ pour les types o_i), l'autre au nombre n. Lorsque la

Type	Cas	H^1	H^2
o_1	1	$(2g)+(1)$	$(2g)+(1)$
	2	$(2g)+(0)$	$(2g)+(0)$
	3	$(2g)+(n-1)$	$(2g)+(n-1)$
o_2	1, 2	$(2g)+(0)$	$(2g-2)+(1)$
	3	$(2g)+(n-1)$	$(2g-2)+(n)$
n_1	1, 2	$(g-1)+(1)$	$(g-1)+(0)$
	3	$(g-1)+(n)$	$(g-1)+(n-1)$
n_2		$(g-1)+(n)$	$(g-1)+(n)$
n_3, n_4		$(g-1)+(n)$	$(g-2)+(n)$

Fig. 1. Dimensions de H^1 et H^2 pour $p>2$ (pour $p=2$ elles sont, pour **tous** les types, comme le type o_1 pour $p>2$).

Fig. 1. Dimensions of H^1 and H^2 for $p>2$ (for $p=2$, for **all** the types, they are like the type o_1 for $p>2$).

seconde parenthèse est (1), le générateur supplémentaire de H^1 est noté $\alpha=[(c/2a)\hat{t}_1+\hat{h}-\sum b_k a_k^{-1}\hat{q}_k]$ avec la convention $c/2a=0$ dans le cas $p=2$; celui de H^2 est $\beta=[\hat{\delta}]$. Les autres générateurs qui interviennent dans 0.1 sont les suivants. Pour H^1, $\theta_j=[\hat{t}_j-\hat{t}_1]$, $\alpha_k=[\hat{q}_k-(1/2)\hat{t}_1]$ pour les types n_i, quand $p>2$; pour tous les autres cas $\theta_j=[\hat{t}_j]$, $\alpha_k=[\hat{q}_k-\hat{q}_1]$. Les indices varient comme suit : $1\leqslant j\leqslant g'$, $0\leqslant k<n$. Pour H^2, $\beta_k=[\hat{\mu}_k]$ pour tous les types ; $\varphi_j=[\hat{\nu}_j]$, pour les types o_1, n_2 ; pour le type n_3, idem sauf $\varphi_1=0$ si $p>2$; pour le type o_2, $\varphi_j=[\hat{\nu}_j-(-1)^j\hat{\nu}_1]$. Pour le type n_1, $\varphi_j=[\hat{\nu}_j-\hat{\nu}_1]$ et pour n_4, il y a $\varphi_1=0$, $\varphi_2=[\hat{\nu}_2-\hat{\nu}_1]$, et $\varphi_j=[\hat{\nu}_j]$, pour $j>2$. Le générateur de H^3 est noté $\gamma=[\hat{\varepsilon}]$.

Dans le théorème suivant, les cup-produits non nécessairement nuls ne sont à considérer que lorsque les membres de gauche et de droite existent tous deux (voir Fig. 1).

Théorème 0.1. *Dans la structure d'anneau de la cohomologie de la variété de Seifert M, les seuls cup-produits non nécessairement nuls sur ces générateurs sont :*

- *sur $H^1\otimes H^1$:*
  - $\theta_{2i-1}\smile\theta_{2i}=\beta$ *pour o_i, Cas 1, pour $p\geqslant 2$ et pour o_2, Cas 2, pour $p>2$;*
  - $\theta_j\smile\theta_j=\beta$ *pour n_i, Cas 1, pour $p=2$;*
  - $\theta_j\smile\alpha=\varphi_j$ *pour o_i, n_i, Cas 1, pour $p=2$; pour o_1, n_1, Cas 1 et pour n_1, Cas 2, pour $p>2$;*
  - $\alpha_k\smile\alpha_i=\frac{a_0}{2}\beta_1+\delta_{k,i}\frac{a_k}{2}\beta_k$ *pour o_i, n_i, Cas 3, pour $p=2$;*
  - $\alpha\smile\alpha=\frac{c}{2}\beta+\sum_{\varepsilon_j=-1}\varphi_j$ *pour o_i, n_i, Cas 1, pour $p=2$;*
- *pour $H^1\otimes H^2$:*
  - $\theta_{2i-1}\smile\varphi_{2i}=\theta_{2i}\smile\varphi_{2i-1}=\gamma$ *pour o_i, Cas 1, 2, 3, pour $p=2$;*
  - $\theta_{2i}\smile\varphi_{2i-1}=-\gamma$, $\theta_{2i-1}\smile\varphi_{2i}=\gamma$ *pour o_1, Cas 1, 2, 3, pour $p>2$;*
  - $\theta_j\smile\varphi_j=\gamma$ *pour n_i, Cas 1, 2, 3, pour $p=2$, et pour n_2, Cas 1, 2, 3, pour $p>2$;*
  - $\alpha_k\smile\beta_k=b_k^{-1}\gamma$, *pour o_i, n_i, Cas 1, 2, 3, pour $p=2$; et n_2, Cas 1, 2, 3, pour $p>2$;*
  - $\alpha\smile\beta=\gamma$ *pour o_i, n_i, Cas 1, pour $p=2$ et o_1, Cas 1, pour $p>2$;*
  - $\alpha\smile\varphi_j=\gamma$, *pour o_2, n_2, pour n_3, $j\neq 1$, pour n_4, $j\neq 1,2$, Cas 1, pour $p=2$;*
  - $\alpha_k\smile\varphi_g=1/2\gamma$ *pour o_1, n_2, Cas 3, pour $p>2$;*
  - $\alpha_i\smile\beta_i=\gamma$ *pour o_i, n_i, Cas 3, pour $p=2$;*
  - $\alpha_i\smile\beta_i=b_i^{-1}\gamma$ *pour o_1, n_2, Cas 3, pour $p>2$.*

Définition et propriétés des mots $w_{\alpha,\beta}$. Pour pouvoir paver, comme évoqué plus haut, la sphère bordant ζ_k, le bord $w_{a_k,b_k}(q_k,h)$ de μ_k doit vérifier une propriété qui permet le pavage de la sphère par deux exemplaires de μ_k et un exemplaire de ρ_k pour former le bord de la 3-cellule ζ_k. Cette fonction $w_{\alpha,\beta}(a,t)$ est définie récursivement par (voir [5]) :

$$w_{1,0}(a,t)=a,\qquad w_{0,1}(a,t)=t,\qquad w_{\alpha+\beta,\beta}(a,t)=w_{\alpha,\beta}(a,at),\qquad w_{\alpha,\alpha+\beta}(a,t)=w_{\alpha,\beta}(at,t),$$

si bien que le mot $w_{\alpha,\beta}(a,t)$ contient α fois la lettre a et β fois la lettre t.

Par induction, on prouve le théorème suivant, analogue au théorème de Osborne–Zieschang [7].

Théorème 0.2. *Soient α, β, u, v des entiers tels que $\alpha u-\beta v=1$, $0<u\leqslant\beta$, et $0\leqslant v<\alpha$. Alors :*

$$w_{\alpha,\beta}(a,t)=w_{\alpha-v,\beta-u}(a,t)w_{v,u}(a,t)=\big(w_{v,u}(a,t)t^{-1}\big)at\big(a^{-1}w_{\alpha-v,\beta-u}(a,t)\big).$$

Ce théorème est appliqué avec $\alpha=a_k$, $\beta=b_k$ et u_k, v_k sont les entiers u, v correspondants. En notant $w_{a_k,b_k}(q_k,h)$ sous la forme $x_{k,1}\dots x_{k,z_k}$ avec les $x_{k,i}$ égaux à q_k (pour a_k d'entre eux dont le premier) ou h (pour b_k d'entre eux dont le dernier), le théorème exprime que, pour $w_k=a_k+b_k-u_k-v_k+1$, le mot $w_{a_k,b_k}(q_k,h)$ est aussi égal à

$x_{k,w_k} \dots x_{k,a_k+b_k-1} q_k h x_{k,2} \dots x_{k,w_k-1}$ et que, de plus, le morceau $x_{k,w_k} \dots x_{k,a_k+b_k}$ de ce mot contient v_k fois q_k et u_k fois h. Dans le cas où $b_k \leqslant 0$ (donc $a_k = 1$), nous poserons $u_k = 1$, $v_k = 0$, $w_k = 1 + |b_k|$, et $x_{k,1} = q_k$, $x_{k,\ell} = h$ pour $2 \leqslant \ell \leqslant a_k + b_k$.

Début du découpage. Transformons ce complexe cellulaire en un Δ-complexe simplicial (voir [4]) en rajoutant :

– un centre et des rayons $\rho_{k,\ell}$ aux 2-cellules δ et μ_k, pour remplacer chacune par une juxtaposition de triangles ;
– une « diagonale » aux ν_j, ρ_k, pour remplacer chacun par deux triangles ;
– pour chacune des 3-cellules ϵ, ζ_k, dont le bord est une sphère pavée par les 2-simplexes déjà construits : un centre, des rayons joignant ce centre aux sommets marqués sur la sphère, des triangles joignant ce centre aux arêtes marquées sur la sphère, de manière à remplacer chaque 3-cellules par une juxtaposition de tétraèdres.

En particulier, on remplace la décomposition cellulaire ci-dessus par la décomposition Δ-simpliciale suivante :

– le 0-simplexe σ et les 1-simplexes t_j, q_k, h ;
– (pour découper les ρ_k) des 1-simplexes g_k (d'origine et d'extrémité σ) et des 2-simplexes $\rho_{k,1}$, $\rho_{k,2}$ (de faces respectives (h, g_k, q_k), (q_k, g_k, h)) ;
– (pour découper les ν_j) des 1-simplexes f_j (d'origine et d'extrémité σ) et des 2-simplexes $\nu_{j,2}$ (de faces (t_j, f_j, h)) et $\nu_{j,1}$ (de faces (h, f_j, t_j) si $\varepsilon_j = 1$, (h, t_j, f_j) si $\varepsilon_j = -1$).

Dans le découpage de δ, ϵ il faut distinguer les types o_1, o_2, n_1 à n_4. Dans le découpage de μ_k, ζ_k il faut distinguer le cas particulier où $b_k \leqslant 0$ (et $a_k = 1$) du cas général où $b_k > 0$ et utiliser pour ce dernier le paragraphe précédent sur $w_{\alpha,\beta}$.

Morphisme des cellules vers les Δ-simplexes. Il y a naturellement un quasi-isomorphisme noté U entre les complexes Δ-simplicial et cellulaire. Pour chacun des générateurs cellulaires de la cohomologie, on parvient à exhiber un cocycle Δ-simplicial qui le relève et on lui donne le même nom.

Les cup-produits. D'après la formule d'Alexander–Whitney, le cup-produit de deux cochaînes simpliciales f de degré p et g de degré q est défini sur tout $p+q$-simplexe par $(f \smile g)(v_0, \dots, v_{p+q}) = f(v_0, \dots, v_p) g(v_p, \dots, v_{p+q})$.

Tous les cup-produits énoncés dans le théorème 0.1 sont calculés dans l'article [1]. Ici, seul l'exemple qui suit est détaillé.

Exemple $p = q = 1$, Calcul de $\smile$: $H^1 \otimes H^1 \to H^2$. Soit φ un 2-cocycle et $\varphi' = U^t(\varphi)$ son image dans le complexe cellulaire, $\varphi' = x\hat{\delta} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant g'} y_j \hat{\nu}_j + \sum z_k \hat{\rho}_k + \sum u_k \hat{\mu}_k$. Alors, comme $\partial\varphi' = 0$, les z_k sont nuls. De plus, la classe de cohomologie de φ' (donc de φ) est :

a) dans le Cas 1 pour $p = 2$ et tous les types ou pour $p > 2$ et le type o_1 : $[\varphi'] = (x - \sum_{k=0}^m u_k a_k^{-1})\beta + \sum_{1 \leqslant j \leqslant g'} y_j \varphi_j$,
b) dans les Cas 1–2 pour $p > 2$ et le type o_2 : idem,
c) dans tous les autres Cas : $[\varphi'] = \sum_{0 \leqslant k < n} u_k \beta_k + \sum_{1 \leqslant j \leqslant g'} y_j \varphi_j$. Lorsque $n = 0$ la somme correspondante est nulle.

Pour calculer $[\varphi]$, il suffira d'évaluer (mod p) les $y_j = \varphi(\nu_{j,1} - \varepsilon_j \nu_{j,2})$, les $u_k = \varphi(\sum \mu_{k,\ell})$ (sauf dans la situation c) quand $n = 0$) et $x = \varphi(\sum \delta_\ell)$ (seulement dans les situations a), b)).

On détaille les calculs pour $\varphi = \alpha \smile \alpha$. D'après la Fig. 1 le générateur α n'apparaît que dans la situation a) ou dans les Cas 1–2 pour le type n_1 et $p > 2$. Dans cette dernière situation, $\alpha \smile \alpha = 0$, car alors tous les β_k et φ_1 sont nuls et $y_j = 0$ pour $j > 1$. Dans la situation a), on a $u_k = -(\frac{b_k(a_k+b_k)}{2}) a_k^{-1}$ pour $0 \leqslant k \leqslant m$ et $x = \sum_{k=0}^m b_k a_k^{-1} (\sum_{i<k} b_i a_i^{-1})$. On a alors $\alpha \smile \alpha = N\beta + \sum y_j \varphi_j$, avec :

$$N = \sum_{k=0}^m b_k a_k^{-1} \sum_{i<k} b_i a_i^{-1} + \sum_{k=0}^m \left(\frac{b_k(a_k + b_k)}{2}\right) a_k^{-2} = \frac{c(a+c)}{2} a^{-2},$$

$y_j = 0$ si $\varepsilon_j = 1$ et $y_j = 1$ si $\varepsilon_j = -1$. Puisque c est divisible par p, N est congru à $c/2$ si $p = 2$ et à zéro sinon.

Conclusion : on a bien $\alpha \smile \alpha = \frac{c}{2}\beta + \sum_{\varepsilon_j = -1} \varphi_j$ pour $p = 2$ dans la situation a) et $\alpha \smile \alpha = 0$ pour toutes les autres possibilités.

Références

[1] A. Bauval, C. Hayat, L'anneau de cohomologie de toutes les varétés de Seifert, arXiv:1202.2818 [math.AT], 2012.
[2] J. Bryden, C. Hayat, H. Zieschang, P. Zvengrowski, L'anneau de cohomologie d'une variété de Seifert, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 324 (1997) 323–326.
[3] J. Bryden, P. Zvengrowski, The cohomology ring of the orientable Seifert manifolds II, Topol. Appl. 105 (2003) 123–156.
[4] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
[5] C. Hayat-Legrand, S. Matveev, H. Zieschang, Computer calculation of the degree of maps into the Poincaré homology sphere, Exp. Math. 10 (4) (2001) 497–508.

[6] P. Orlik, Seifert Manifolds, Lectures Notes in Mathematics, vol. 291, Springer-Verlag, New York, 1972.
[7] R.P. Osborne, H. Zieschang, Primitives in a free group on two generators, Invent. Math. 63 (1981) 17–34.
[8] H. Seifert, W. Threlfall, A Textbook of Topology, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, London, 1980, translated from the original German edition Lehrbuch der Topologie, Chelsea Publ. Co., New York, 1934.
[9] S. Tomoda, P. Zvengrowski, Remarks on the cohomology of finite fundamental groups of 3-manifolds, Geom. Topol. Monogr. 14 (2008).