



## Partial Differential Equations

## A Note on the Cauchy problem for the 2D generalized Zakharov–Kuznetsov equations

*Une Note sur le problème de Cauchy pour les équations de Zakharov–Kuznetsov 2D généralisées*

Francis Ribaud<sup>a</sup>, Stéphane Vento<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire d'analyse et de mathématiques appliquées, Université Paris-est, 5 boulevard Descartes, Champs-Sur-Marne, 77454 Marne-La-Vallée cedex 2, France

<sup>b</sup> Laboratoire analyse, géométrie et applications, Université Paris 13, Institut Galilée, 99, avenue J.B. Clément, 93430 Villetteuse, France

## ARTICLE INFO

## Article history:

Received 18 November 2011

Accepted 16 May 2012

Available online 30 May 2012

Presented by the Editorial Board

## ABSTRACT

In this Note we study the generalized 2D Zakharov–Kuznetsov equations  $\partial_t u + \Delta \partial_x u + u^k \partial_x u = 0$  for  $k \geq 2$ . By an iterative method we prove the local well-posedness of these equations in the Sobolev spaces  $H^s(\mathbb{R}^2)$  for  $s > 1/4$  if  $k = 2$ ,  $s > 5/12$  if  $k = 3$  and  $s > 1 - 2/k$  if  $k \geq 4$ .

© 2012 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

## Résumé

Nous étudions dans cette Note les équations de Zakharov–Kuznetsov 2D généralisées  $\partial_t u + \Delta \partial_x u + u^k \partial_x u = 0$  pour  $k \geq 2$ . Il est établi que le problème de Cauchy peut être résolu par une méthode itérative dans les espaces de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^2)$  pour  $s > 1/4$  si  $k = 2$ ,  $s > 5/12$  si  $k = 3$  et  $s > 1 - 2/k$  si  $k \geq 4$ .

© 2012 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

## Version française abrégée

Nous nous intéressons au problème de Cauchy associé aux équations de Zakharov–Kuznetsov généralisées (gZK)

$$u_t + \Delta u_x + u^k u_x = 0, \quad (1)$$

en dimension deux d'espace et pour des non-linéarités  $k \geq 2$ . Ces équations sont des extensions multi-dimensionnelles naturelles de l'équation de Korteweg–de Vries (KdV) et ont été utilisées (lorsque  $k = 1$ ) par Zakharov et Kuznetsov [8] pour décrire la propagation d'ondes non-linéaires ioniques soniques dans un plasma magnétique.

Ces équations jouissent de l'invariance par changement d'échelle suivante : si  $u$  est solution de (1), alors  $u_\lambda(t, x, y) = \lambda^{2/k} u(\lambda^3 t, \lambda x, \lambda y)$  est encore solution de (1). On en déduit que la norme Sobolev  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^2)$  est invariante par cette transformation si et seulement si  $s = s_k := 1 - 2/k$ . Ce type d'invariance nous suggère d'étudier cette équation dans les espaces  $H^s(\mathbb{R}^2)$  pour  $s > s_k$ . Notre but ici est de montrer que les solutions de (gZK) ont effectivement un bon comportement en régularité sous-critique ( $s > s_k$ ), au moins pour  $k$  assez grand. Plus précisément, nous montrons le résultat suivant.

E-mail addresses: francis.ribaud@univ-mlv.fr (F. Ribaud), vento@math.univ-paris13.fr (S. Vento).

**Théorème 0.1.** Pour tout  $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$  avec  $s > 1/4$  si  $k = 2$ ,  $s > 5/12$  si  $k = 3$  et  $s > s_k$  si  $k \geq 4$ , il existe  $T > 0$ , un espace de Banach  $X_T^s$  et une unique solution  $u$  du problème de Cauchy associé (gZK) avec  $u(0) = u_0$  telle que  $u \in X_T^s \cap C_b([0, T], H^s(\mathbb{R}^2))$ . En outre, le flot solution  $u_0 \mapsto u$  est Lipschitz sur toute partie bornée de  $H^s(\mathbb{R}^2)$ .

Ce théorème améliore les travaux récents de Farah, Linares et Pastor [2,4,5] dans lesquels le caractère bien posé du problème est prouvé dans les espaces  $H^s(\mathbb{R}^2)$  pour  $s > 3/4$  si  $2 \leq k \leq 7$  et  $s > s_k$  si  $k \geq 8$ .

Notons d'autre part que notre résultat est optimal au moins pour  $k \geq 4$ . En effet, il a été établi dans [5] que le flot solution dans l'espace critique  $H^{s_k}(\mathbb{R}^2)$ , s'il existe, ne peut être uniformément continu. Dans les cas particuliers  $k = 2$  et  $3$ , une différence de régularité par rapport à l'indice de changement d'échelle (respectivement  $1/4$  et  $1/12$ ) subsiste toujours.

Notre preuve est basée sur un argument de point fixe appliquée à la formulation intégrale (3). Inspirés par la stratégie de Kenig, Ponce et Vega [3] sur KdV, nous utilisons des estimations dispersives optimales sur la solution linéaire associée. Plus précisément, nous tirons avantage de l'estimation régularisante (4) qui permet de regagner une dérivée dans chaque direction spatiale, ainsi que de l'estimation maximale en temps (5). Ceci nous permet de traiter le cas des hautes non-linéarités ( $k \geq 4$ ). Par ailleurs, à l'instar de ce qui se produit pour les équations de KdV généralisées, cette dernière inégalité n'est plus suffisante pour traiter les basses non-linéarités ( $k = 2, 3$ ) et nous avons alors besoin de l'estimation maximale (6) basée sur l'espace  $L_x^2$ .

Ces estimations permettent de contrôler la partie linéaire de (3) et il reste ensuite à estimer le terme intégral. Dans ce but, nous utilisons les versions non-homogènes retardées de (4)–(6)–(5) qui permettent de récupérer la dérivée perdue dans le terme non-linéaire de l'équation. En combinant celles-ci avec une décomposition en paraproduct appliquée au terme non-linéaire, nous obtenons le contrôle désiré sur le terme intégral. Enfin, travaillant dans le cas sous-critique, il n'est pas difficile de sortir de ces estimations une puissance de  $T$  (pour des solutions définies sur  $[0, T]$ ), ce qui permet d'achever le processus d'itération pour  $T$  suffisamment petit.

## 1. Introduction

In this short Note, we are interested with the Cauchy problem associated to the generalized Zakharov–Kuznetsov (gZK) equations

$$u_t + \Delta u_x + u^k u_x = 0, \quad (2)$$

in two-dimensional space and for  $k = 2, 3, 4, \dots$ . These equations are natural multi-dimensional generalizations of the well-known generalized Korteweg–de Vries equations and have been derived in [8] when  $k = 1$  to model the propagation of nonlinear ionic-sonic waves in a magnetized plasma.

We give sharp results concerning the well-posedness issue in standard Sobolev spaces  $H^s(\mathbb{R}^2)$  for suitable  $s \in \mathbb{R}$ . This work follows and use similar technics as in the paper [6] where we proved that the 3D associated problem for  $k = 1$  is locally well-posed in  $H^{1+}(\mathbb{R}^3)$ .

Remark that the Sobolev spaces  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^2)$  are invariant by the natural rescaling of the equation as soon as  $s = s_k := 1 - 2/k$ . Thus a natural question is whether (gZK) is well-posed in  $H^s(\mathbb{R}^2)$  for  $s > s_k$ .

**Theorem 1.1.** For any  $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$  with

$$\begin{cases} s > 1/4 & \text{if } k = 2, \\ s > 5/12 & \text{if } k = 3, \\ s > 1 - 2/k & \text{if } k \geq 4, \end{cases}$$

there exist  $T > 0$ , a Banach space  $X_T^s$  and a unique solution  $u$  of the Cauchy problem associated to (2) with  $u(0) = u_0$  such that  $u \in X_T^s \cap C_b([0, T], H^s(\mathbb{R}^2))$ . Moreover, the flow-map  $u_0 \mapsto u$  is Lipschitz on every bounded set of  $H^s(\mathbb{R}^2)$ .

This theorem improves the recent works of Farah, Linares and Pastor in [2,4,5] where local well-posedness was obtained in  $H^s(\mathbb{R}^2)$  for  $s > 3/4$  if  $2 \leq k \leq 8$  and  $s > s_k$  if  $k > 8$ .

In view of the ill-posedness result obtained in [5], Theorem 1.1 is optimal (up to the end point) for  $k \geq 4$  whereas in the particular cases  $k = 2$  and  $3$ , we still have a gap (respectively  $1/4$  and  $1/12$ ) compared with the scaling index. Concerning the end point  $s = s_k$ , local well-posedness could perhaps be reached by following the strategy developed in [7], but with a flow-map only continuous.

In a standard way our proof is based on a fixed point scheme applied to the Duhamel formulation of (2):

$$u(t) = U(t)u_0 - \frac{1}{k+1} \int_0^t U(t-t')\partial_x(u^{k+1})(t') dt', \quad (3)$$

where  $U(t) = e^{-t\Delta_{\partial_x}}$  denotes the propagator associated with the linear part of (2). Following the works of Kenig, Ponce and Vega [3] on the KdV equation, we use in a crucial way some sharp dispersive estimates for free solutions. More precisely, these estimates are the well-known Kato smoothing effect

$$\|\nabla U(t)\varphi\|_{L_x^\infty L_y^2} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}, \quad (4)$$

which allows to gain one derivative in each spatial direction, and the maximal in time estimate

$$\|U(t)\varphi\|_{L_x^4 L_y^\infty} \lesssim \|\varphi\|_{H^s}, \quad s > 3/4, \quad (5)$$

proved in [4]. On the other hand, similarly to the generalized KdV equations, the previous bound is no more sufficient to deal with low non-linearities ( $k = 2, 3$ ) and we need the following  $L_x^2$  based maximal in time estimate (see [1])

$$\|U(t)\varphi\|_{L_x^2 L_y^\infty} \lesssim \|\varphi\|_{H^s}, \quad s > 3/4. \quad (6)$$

## 2. Proof of the main result

### 2.1. The case $k \geq 4$

As mentioned in the introduction, we want to take advantage of the  $L_x^4 L_y^\infty$  linear estimate (5). This motivates the choice of our resolution space:

$$Y_T^s = \{u \in C_b([0, T], H^s(\mathbb{R}^2)) : \|u\|_{Y_T^s} < \infty\},$$

where

$$\|u\|_{Y_T^s} = \|u\|_{L_T^\infty H_{xy}^s} + \|\langle \nabla \rangle^{s+1} u\|_{L_x^\infty L_y^2} + \|\langle \nabla \rangle^{s-3/4^+} u\|_{L_x^4 L_y^\infty}.$$

Since we do not have any available fractional Leibniz rule in  $\mathbb{R}^2$ , we will rather work in the Besov version  $X_T^s$  defined by the norm  $\|u\|_{X_T^s} = \|\|\Delta_j u\|_{Y_T^s}\|_{\ell^2(\mathbb{N})}$  where  $(\Delta_j)_{j \geq 0}$  is a Littlewood-Paley analysis such that  $\Delta_0$  localizes spatial frequencies in a ball  $\{|\xi| \lesssim 1\}$  and  $\Delta_j$ ,  $j > 0$  in an annulus  $\{|\xi| \sim 2^j\}$ .

Combining estimates (4)–(5) as well as the straightforward bound  $\|U(t)\varphi\|_{L_T^\infty L^2} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}$ , we get

$$\|U(t)u_0\|_{X_T^s} \lesssim \|u_0\|_{H^s}. \quad (7)$$

Having the linear part under control, it remains to deal with the integral term. It is not too hard to adapt the proofs of Propositions 3.5–3.7 in [6] to deduce

$$\left\| \int_0^t U(t-t') \partial_x u^{k+1}(t') dt' \right\|_{X_T^s} \lesssim \|2^{sj} \|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_y^2}\|_{\ell^2(\mathbb{N})}. \quad (8)$$

To estimate the nonlinear term, we use the following paraproduct decomposition

$$\Delta_j(u^{k+1}) = \Delta_j \left( \sum_{r \geq j-C} \Delta_{r+1} u \sum_{p=0}^k (P_{r+1} u)^p (P_r u)^{k-p} \right), \quad (9)$$

for some  $C \geq 0$  and where  $P_r = \sum_{p=0}^r \Delta_p$ . From this we get

$$\|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_y^2} \lesssim \sum_{r \geq j} \|\Delta_r u (P_r u)^k\|_{L_x^1 L_y^2} \lesssim \sum_{r \geq j} \|\Delta_r u\|_{L_x^{7+} L_y^{14/3-}} \|P_r u\|_{L_x^{7k/6-} L_y^{7k/2+}}^k. \quad (10)$$

Next, an interpolation argument shows that for any  $r \geq 0$ ,

$$2^{\alpha r} \|\Delta_r u\|_{L_x^p L_y^q} \lesssim \|\Delta_r u\|_{X_T^s}, \quad (11)$$

as soon as there exists  $\theta \in [0, 1]$  such that

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{4}, \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{2}, \quad \alpha = \left( s + \frac{7\theta - 3}{4} \right)^-.$$

Taking  $\alpha = s$ , i.e.  $\theta = 3/7^+$ , it follows that

$$2^{sr} \|\Delta_r u\|_{L_x^{7+} L_y^{14/3-}} \lesssim \|\Delta_r u\|_{X_T^s}. \quad (12)$$

If we choose now  $\theta = 4/7k$  in (11), we infer

$$2^{(s-3/4+1/k)^-r} \|\Delta_r u\|_{L_x^{(\frac{1}{4}-\frac{1}{7k})^{-1}} L_y^{7k/2}} \lesssim \|\Delta_r u\|_{X_T^s}.$$

In order to get the desired contraction factor, we will interpolate this inequality with the bound

$$2^{(s-1)^+r} \|\Delta_r u\|_{L_{xyT}^{\infty^-}} \lesssim T^{0^+} 2^{s+r} \|\Delta_r u\|_{L_T^\infty L_{xy}^2}. \quad (13)$$

This leads to

$$2^{(s-3/4+1/k)^-r} \|\Delta_r u\|_{L_x^{((\frac{1}{4}-\frac{1}{7k})^{-1})^+} L_y^{7k/2+}} \lesssim T^{0^+} \|\Delta_r u\|_{X_T^s}.$$

By virtue of the Bernstein inequality, we get

$$\|P_r u\|_{L_x^{7k/6^-} L_y^{7k/2+}} \lesssim \sum_{p=0}^r 2^{(s-3/4+1/k)^-p} \|\Delta_p u\|_{L_x^{((\frac{1}{4}-\frac{1}{7k})^{-1})^+} L_y^{7k/2+}} \lesssim T^{0^+} \|u\|_{X_T^s}, \quad (14)$$

for  $s - 3/4 + 1/k > 1/4 - 1/k$ , that is  $s > s_k$ . The discrete Young inequality and (10)–(12)–(14) yield

$$\|2^{sj} \|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yT}^2}\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \lesssim T^{0^+} \|u\|_{X_T^s}^k \|(1_{r \geq 0} 2^{-sr}) *_r \|\Delta_r u\|_{X_T^s}\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \lesssim T^{0^+} \|u\|_{X_T^s}^{k+1}. \quad (15)$$

Gathering together (7)–(8) and (15) we infer that

$$\|F(u)\|_{X_T^s} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + T^{0^+} \|u\|_{X_T^s}^{k+1},$$

where  $F(u)$  denotes the right hand side of (3). The well-posedness result follows then from standard arguments.

## 2.2. The case $k = 2$

The proof in this case follows the same lines as in the case  $k \geq 4$ , but with the  $L_x^4$  norm replaced with an  $L_x^2$  maximal in time norm. So let us endow the  $Y_T^s$  space with the norm

$$\|u\|_{X_T^s} = \|u\|_{L_T^\infty H_{xy}^s} + \|\langle \nabla \rangle^{s+1} u\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \|\langle \nabla \rangle^{s-3/4^+} u\|_{L_x^2 L_{yT}^\infty},$$

for any  $s > 1/4$  and define  $\|u\|_{X_T^s} = \|\|\Delta_j u\|_{Y_T^s}\|_{\ell^2(\mathbb{N})}$ . Using now (6), we easily see that estimates (7) and (8) with  $k = 2$  hold in these settings. Again, the paraproduct decomposition (9) and Hölder inequality yield the bound

$$\|\Delta_j(u^3)\|_{L_x^1 L_{yT}^2} \lesssim \sum_{r \geq j} \|\Delta_r u\|_{L_x^{7/2+} L_{yT}^{14/3-}} \|\Delta_r u\|_{L_x^{14/5-} L_{yT}^{7+}}^2.$$

By interpolation, we get

$$2^{\alpha r} \|\Delta_r u\|_{L_x^p L_{yT}^q} \lesssim \|\Delta_r u\|_{X_T^s}, \quad (16)$$

for  $\alpha$ ,  $p$  and  $q$  satisfying

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{2}, \quad \alpha = \left(s + \frac{7\theta - 3}{4}\right)^-,$$

for  $0 \leq \theta \leq 1$ . On one hand, we deduce that

$$2^{sr} \|\Delta_r u\|_{L_x^{7/2+} L_{yT}^{14/3-}} \lesssim \|\Delta_r u\|_{X_T^s},$$

where we took  $\theta = 3/7^+$  in (16). On the other hand, for  $\theta = 2/7^-$ , we infer

$$2^{(s-1/4)^-r} \|\Delta_r u\|_{L_x^{14/5-} L_{yT}^{7+}} \lesssim \|\Delta_r u\|_{X_T^s},$$

which interpolated with (13) gives

$$2^{(s-1/4)^-r} \|\Delta_r u\|_{L_x^{14/5-} L_{yT}^{7+}} \lesssim T^{0^+} \|\Delta_r u\|_{X_T^s}.$$

This yields the desired result for  $s > 1/4$ .

### 2.3. The case $k = 3$

Now we consider the intermediate case  $k = 3$ . To prove our result, we define the resolution space as the intersection of the two previous spaces, i.e. equipped with the norm

$$\|u\|_{X_T^s} = \|u\|_{L_T^\infty H_{xy}^s} + \|2^{(s+1)j} \|\Delta_j u\|_{L_x^\infty L_{yT}^2}\|_{\ell^2(\mathbb{N})} + \|2^{(s-3/4^+)j} \|\Delta_j u\|_{(L_x^2 \cap L_x^4)L_{yT}^\infty}\|_{\ell^2(\mathbb{N})}.$$

Actually we do not require the full range  $L_x^2 \cap L_x^4$  for the maximal in time norm, but only

$$2^{(s-3/4^+)j} \|\Delta_j u\|_{L_x^3 L_{yT}^\infty} \lesssim \|\Delta_j u\|_{X_T^s}. \quad (17)$$

According to the previous estimates we have

$$\|F(u)\|_{X_T^s} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \left\| 2^{sj} \sum_{r \geq j} \|\Delta_r u (P_r u)^3\|_{L_x^1 L_{yT}^2} \right\|_{\ell^2(\mathbb{N})}.$$

Using Hölder inequality, we infer

$$2^{sr} \|\Delta_r u (P_r u)^3\|_{L_x^1 L_{yT}^2} \lesssim (2^{sr} \|\Delta_r u\|_{L_x^{21/4^+} L_{yT}^{14/3^-}}) \|P_r u\|_{L_x^{63/17^-} L_{yT}^{21/2^+}}^3.$$

From an interpolation argument with (17), we easily check that both these norms are acceptable as soon as  $s > 5/12$ .

### Acknowledgements

The authors thank Felipe Linares for useful comments concerning the earlier version of this work.

### References

- [1] A.V. Faminskii, The Cauchy problem for the Zakharov–Kuznetsov equation, *Differential Equations* 31 (6) (1995) 1002–1012.
- [2] L.G. Farah, F. Linares, A. Pastor, A note on the 2D generalized Zakharov–Kuznetsov equation: local, global, and scattering results, arXiv:1108.3714, 2011.
- [3] C.E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg–de Vries equation via the contraction principle, *Comm. Pure Appl. Math.* 46 (4) (1993) 527–620.
- [4] F. Linares, A. Pastor, Well-posedness for the two-dimensional modified Zakharov–Kuznetsov equation, *SIAM J. Math. Anal.* 41 (4) (2009) 1323–1339.
- [5] F. Linares, A. Pastor, Local and global well-posedness for the 2D generalized Zakharov–Kuznetsov equation, *J. Funct. Anal.* 260 (4) (2011) 1060–1085.
- [6] F. Ribaud, S. Vento, Well-posedness results for the 3D Zakharov–Kuznetsov equation, preprint, arXiv:1111.2850.
- [7] S. Vento, Well-posedness for the generalized Benjamin–Ono equations with arbitrary large initial data in the critical space, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2) (2010) 297–319.
- [8] V.E. Zakharov, E.A. Kuznetsov, On three dimensional solitons, *Sov. Phys. JETP* 39 (1974) 285–286.