C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 1219–1224

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse mathématique/Équations aux dérivées partielles

Problèmes de Cauchy avec des conditions modifiées pour les équations d'Euler–Poisson–Darboux

Cauchy problems with the modified conditions for the Euler–Poisson–Darboux equations

Cheikh Ould Mohamed El-hafedh [a], Mohamed Vall Ould Moustapha [b]

[a] *Université Gaston-Berger de Saint-Louis, BP : 234, Sénégal*
[b] *Université de Nouakchott, faculté des sciences et techniques, BP : 5026, Mauritanie*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 14 septembre 2011
Accepté après révision le 7 novembre 2011
Disponible sur Internet le 23 novembre 2011

Présenté par le Comité de rédaction

RÉSUMÉ

Dans cette Note on considère des problèmes de Cauchy avec des conditions modifiées pour les équations d'Euler–Poisson–Darboux. On donne les solutions explicites en termes des fonctions hypergéométriques de Gauss ${}_2F_1$ et d'Appell F_4, avec applications aux équations des ondes classiques et radiales.

ABSTRACT

In this Note we consider the Cauchy problems with the modified conditions for the Euler–Poisson–Darboux equations. We give the explicit solutions in terms of the Gauss ${}_2F_1$ and Appell F_4 hypergeometric functions with applications to the classical and radial wave equation.

Abridged English version

Nowadays the Euler–Poisson–Darboux equation is extensively studied in several settings. The main questions on every spaces are explicit solutions for the classical Cauchy problems with the second data null. In this Note we will generalize and unify several results on Euler–Poisson–Darboux equation. Precisely, we consider the family of classical Euler–Poisson–Darboux equations in R^n

$$\Delta_n U(t,x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1-2\mu}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right) U(t,x), \quad t>0 \tag{E_1}$$

and the family of radial Euler–Poisson–Darboux equations

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-2\nu}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right) U(t,x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1-2\mu}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right) U(t,x), \quad t>0,\ x>0 \tag{E_2}$$

with the modified initial conditions

$$U(0,x) = f(x), \qquad \lim_{t\to 0} t^{1-2\mu}\frac{\partial}{\partial t} U(t,x) = g(x) \tag{C_1}$$

Adresses e-mail : cheikh976@yahoo.fr (C.O.M. El-hafedh), mohamedvall.ouldmoustapha230@gmail.com (M.V. Ould Moustapha).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.11.006

$$U(0,x) = A_x^q f(x), \qquad \lim_{t\to 0} t^{1-2\mu}\frac{\partial}{\partial t}U(t,x) = A_x^q g(x) \tag{C_2}$$

where A_x^q is the qth power of the operator

$$A_x = \begin{cases} \Delta_n & \text{if } x \in R^n, \\ \Lambda_x & \text{if } x \in R^+, \end{cases} \qquad \Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \text{ and } \Lambda_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-2\nu}{x}\frac{\partial}{\partial x},$$

ν, μ and q are real parameters.

Notice that the radial part of Eq. (E_1) can be given by Eq. (E_2) where we write $2-2\nu$ for the space dimension n. For $\mu = \frac{1}{2}$, (E_1) turns into the n-dimensional wave equation, appears in several branches of applied mathematics such as the transonic flow of compressible fluids. Also for $\mu = \frac{1}{3}$, (E_1) corresponds to Tricomi's equation [1]. The main results of this Note – Theorems 1, 2, 3 and 4 – are given in the Introduction and have many applications (see Section 4 below) such as the classical and radial wave equations as well as the Tricomi operator [1].

1. Introduction

L'équation (E_1) a été étudiée pour les valeurs entières de k $(1-2\mu = k)$ par A. Weinstein [9] et son école de Maryland, D.W. Bresters [3] a exprimé la solution de l'équation (E_1) avec les conditions

$$U(0,x) = f(x), \qquad U_t(0,x) = g(x). \tag{C}$$

D.W. Bresters a pris la deuxième donnée nulle car une solution U du problème ne saurait être régulière pour $t = 0$ que si sa dérivée première par rapport à t s'y annule, les conditions modifiées (C_1) et (C_2) permettent de remédier à ce problème et de pouvoir prendre la deuxième donnée une fonction non nulle g, tout en recouvrant les conditions classiques (C) : ainsi pour $\mu = \frac{1}{2}$ on retrouve les problèmes de Cauchy pour les équations classiques et radiales des ondes (voir [4] et [2]).

Les résultats principaux de cet article sont les suivants :

Théorème 1. *Pour $0 < \mu < \frac{1}{2}$, le problème de Cauchy (E_1), (C_1) admet la solution unique donnée par :*

$$U(t,x) = \alpha_{n,-\mu} t^{2\mu}\left(\frac{\partial}{t\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \int_{|x'-x|<t} f(x')\left(t^2 - |x'-x|^2\right)^{-\mu-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x' + \frac{1}{2\mu}\alpha_{n,\mu}\left(\frac{\partial}{t\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \int_{|x'-x|<t} g(x')\left(t^2 - |x'-x|^2\right)^{\mu-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x'$$

si n est impair,

$$U(t,x) = \beta_n t^{2\mu}\left(\frac{\partial}{t\partial t}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{|x'-x|<t} f(x')\left(t^2 - |x'-x|^2\right)^{-\mu} \mathrm{d}x' + \frac{1}{2\mu}\beta_n\left(\frac{\partial}{t\partial t}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{|x'-x|<t} g(x')\left(t^2 - |x'-x|^2\right)^{\mu} \mathrm{d}x'$$

si n est pair avec $\alpha_{n,\mu} = \frac{\Gamma(1+\mu)}{2^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\mu)}$ *et* $\beta_n = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$.

Théorème 2. *Pour $0 < \mu < \frac{1}{2}$ et $-\frac{n}{2} < q < -\frac{\mu}{2} - \frac{n}{4}$, le problème de Cauchy (E_1), (C_2) admet la solution unique donnée par :*

$$U(t,x) = \int_{R^n} f(x') N_{-\mu}(t,x,x')\,\mathrm{d}x' + \frac{t^{2\mu}}{2\mu}\int_{R^n} g(x') N_{\mu}(t,x,x')\,\mathrm{d}x'$$

où

$$N_\mu(t,x,x') = \begin{cases} \frac{2^{2q+\frac{n}{2}}1^{2q}\Gamma(q+\frac{n}{2})}{(2\pi)^n\Gamma(-q)}|x-x'|^{-2q-n}{}_2F_1\left(q+\frac{n}{2}, q+1, \mu+1, \frac{t^2}{|x-x'|^2}\right) & \text{si } 0 < t < |x-x'|, \\ \frac{2^{2q+\frac{n}{2}}1^{2q}\Gamma(1+\mu)\Gamma(q+\frac{n}{2})}{(2\pi)^n\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(1+\mu-q-\frac{n}{2})}t^{-2q-n}{}_2F_1\left(q+\frac{n}{2}, q+\frac{n}{2}-\mu, \frac{n}{2}, \frac{|x-x'|^2}{t^2}\right) & \text{si } |x-x'| < t \end{cases}$$

avec ${}_2F_1(a,b,c,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n$ *la fonction hypergéométrique de Gauss et* $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ *le symbole de Pochhammer.*

Théorème 3. *Pour $\nu > -\frac{1}{2}$ et $0 < \mu < \frac{1}{2}$, le problème de Cauchy (E_2), (C_1) admet la solution unique donnée par :*

$$U(t,x)=\int_0^{+\infty} f(x')t^{2\mu}K_{-\mu}(t,x,x')x'^{1-2\nu}\,dx'+\frac{1}{2\mu}\int_0^{+\infty} g(x')K_{\mu}(t,x,x')x'^{1-2\nu}\,dx'$$

où

$$K_\mu(t,x,x')=\begin{cases} 0 \quad \textit{pour } 0<x'<x-t \textit{ ou } x'>x+t,\\ \frac{2^{\mu-\frac{1}{2}}\Gamma(1+\mu)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}+\mu)}(xx')^{\nu+\mu-1}(1-z)^{\mu-\frac{1}{2}}{}_2F_1\big(\frac{1}{2}-\nu,\frac{1}{2}+\nu,\frac{1}{2}+\mu,\frac{1-z}{2}\big)\\ \quad \textit{pour } |x-t|<x'<x+t,\\ \frac{2^{\mu-\nu}\Gamma(1+\mu)\Gamma(1-\mu+\nu)\sin[(\mu-\nu)\pi]}{\pi\Gamma(\nu+1)}(xx')^{\nu+\mu-1}z^{\mu-\nu-1}{}_2F_1\big(\frac{\nu-\mu+1}{2},\frac{\nu-\mu}{2}+1,\nu+1,\frac{1}{z^2}\big)\\ \quad \textit{pour } 0<x'<t-x \end{cases}$$

avec $z=\frac{x^2+x'^2-t^2}{2xx'}$.

Théorème 3 bis. *Pour* $0<\mu<1$ *et les données initiales analytiques*

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}a_lx^l \quad \textit{et} \quad g(x)=\sum_{l=0}^{\infty}b_lx^l,$$

le problème (E_2), (C_1) *admet la solution unique donnée par :*

$$U(t,x)=\sum_{l=0}^{\infty}a_lU_l+\sum_{l=0}^{\infty}b_lV_l$$

où $U_l=x^l{}_2F_1(-\frac{l}{2},\nu-\frac{l}{2},1-\mu,\frac{t^2}{x^2})$ *et* $V_l=\frac{t^{2\mu}}{2\mu}x^l{}_2F_1(-\frac{l}{2},\nu-\frac{l}{2},1+\mu,\frac{t^2}{x^2})$.

Théorème 4. *Pour* $\nu>-\frac{1}{2}$, $0<\mu<\frac{1}{2}$ *et* $-\frac{1}{2}<q<-\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}$, *le problème de Cauchy* (E_2), (C_2) *admet la solution unique donnée par :*

$$U(t,x)=K(\nu,q)\int_0^{+\infty} f(x')H_{-\mu}(t,x,x')x'^{1-2\nu}\,dx'+\frac{K(\nu,q)t^{2\mu}}{2\mu}\int_0^{+\infty} g(x')H_{\mu}(t,x,x')x'^{1-2\nu}\,dx'$$

avec

$$H_\mu(t,x,x')=x^{2\nu}x'^{-2(q+1)}F_4\left(q+1,q+1+\nu,1+\mu,1+\nu,\frac{t^2}{x'^2},\frac{x^2}{x'^2}\right),$$

$K(\nu,q)=\frac{2^{2q+1}1^{2q}\Gamma(q+1+\nu)}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(-q)}$ *et* F_4 *la fonction hypergéométrique de deux variables d'Appell définie par* [8] :

$$F_4(a,b,c,d,x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c)_m(d)_nm!n!}x^my^n; \quad |x|^{1/2}+|y|^{1/2}<1.$$

Remarque. Les noyaux des solutions du Théorèmes 1 et 2 sont singuliers en $t\in\{|x-x'|,0\}$ ceux des Théorèmes 3 et 3 bis sont singuliers en $t\in\{|x-x'|,x+x',0\}$ et le noyau du Théorème 4 quand $t\in\{|x-x'|,0\}$ (la fonction hypergéométrique d'Appell $F_4(a,b,c,d;x,y)$ est singulière si $|x|^{1/2}+|y|^{1/2}=1$).

2. Préliminaires

Rappelons l'équation de Bessel [6, p. 106]

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1-2\alpha}{x}\frac{\partial}{\partial x}+\left(\beta\gamma x^{\gamma-1}\right)^2+\frac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{x^2}\right]V=0$$

dont deux solutions indépendantes sont $t^\alpha J_\nu(\beta t^\gamma)$ et $t^\alpha Y_\nu(\beta t^\gamma)$ avec J_ν et Y_ν des fonctions de Bessel du premier espèce. On définit la transformation de Fourier–Bessel–Hankel d'une fonction f par :

$$\widehat{f}(\lambda)=\int_0^{+\infty} f(x)(\lambda x)^\nu J_\nu(\lambda x)x^{1-2\nu}\,dx.$$

Dans la suite, on aura besoin des lemmes suivants :

Lemme 1. *(Voir [6], pp. 134–135.) Pour $\mu > 0$ on a les comportements asymptotiques*

(i) $J_\mu(Z) \approx \frac{Z^\mu}{2^\mu \Gamma(\mu+1)}$ *et* $Y_\mu(Z) \approx \frac{-2^\mu \Gamma(\mu)}{\pi . Z^\mu}$ *en zéro,*
(ii) $J_\mu(Z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi Z}} \cos(Z - \frac{1}{2}\mu\pi - \frac{1}{4}\pi)$ *et* $Y_\mu(Z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi Z}} \sin(Z - \frac{1}{2}\mu\pi - \frac{1}{4}\pi)$ *à l'infini.*

Lemme 2.

(i) $\widehat{\Lambda_x f}(\lambda) = -\lambda^2 \widehat{f}(\lambda)$.
(ii) *La transformation inverse de Fourier–Bessel–Hankel est donnée par :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \widehat{f}(\lambda)(\lambda x)^\nu J_\nu(\lambda x)\lambda^{1-2\nu}\, d\lambda.$$

Lemme 3. *(Voir [5], p. 675.)*

(i) *La transformation de Fourier d'une fonction radiale est donnée par :*

$$\int_{R^n} f\big(|\xi|\big) \exp(i\xi.x)\, d\xi = |x|^{1-\frac{n}{2}} \int_0^{+\infty} f(r) J_{\frac{n}{2}-1}\big(r|x|\big) r^{\frac{n}{2}}\, dr.$$

(ii) $$\int_0^{+\infty} r^{-\rho} J_\mu(ar) J_\nu(br)\, dr = \frac{2^{-\rho} a^{\rho-\nu-1} b^\nu \Gamma\big(\frac{1+\nu+\mu-\rho}{2}\big)}{\Gamma(1+\nu)\Gamma\big(\frac{1-\nu+\mu+\rho}{2}\big)} {}_2F_1\left(\frac{1+\nu+\mu-\rho}{2}, \frac{1+\nu-\mu-\rho}{2}, \nu+1, \frac{b^2}{a^2}\right)$$

où $\nu + \mu - \rho + 1 > 0$, $\rho > -1$, $a > b > 0$.

Lemme 4. *(Voir [5], p. 677.)*

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{2a-1-\mu} J_\mu(\lambda t) J_\nu(\lambda x) J_\nu\big(\lambda x'\big)\, d\lambda$$
$$= \frac{2^{2a-1-\mu}\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-a)} t^\mu x^\nu x'^{-\nu-2a} F_4\left(a, a+\nu, 1+\mu, 1+\nu, \frac{t^2}{x'^2}, \frac{x^2}{x'^2}\right)$$

pour $-\nu < a < \frac{5}{4} + \frac{\mu}{2}$, $x > 0$, $t > 0$ *et* $x' > x + t$ *; et pour* $-\nu < a < \frac{3}{4} + \frac{\mu}{2}$ *l'integrale converge absolument et par suite, elle prolonge* F_4 *pour* $0 < x' < x + t$.

Proposition. *Pour* $W_{n,\mu}(t, x, x') = C_{n,\mu}[t^2 - |x' - x|^2]^{\mu - \frac{n}{2}}$ *et* $C_{n,\mu} = \frac{\Gamma(1+\mu)}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(1+\mu-\frac{n}{2})}$*, on a*

(i) $$W_{n,\mu}(t, x, x') = \begin{cases} \alpha_{n,\mu}\big(\frac{\partial}{t\partial t}\big)^{\frac{n-1}{2}} [t^2 - |x' - x|^2]^{\mu - \frac{1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair}, \\ \beta_n\big(\frac{\partial}{t\partial t}\big)^{\frac{n}{2}} [t^2 - |x' - x|^2]^{\mu} & \text{si } n \text{ est pair}. \end{cases}$$

(ii) $W_{n,\mu}$ *vérifie l'équation* (E_1).

La preuve de cette proposition est simple, en conséquence elle est laissée au lecteur.

3. Équation classique d'Euler–Poisson–Darboux

Preuve du Théorème 1. Pour montrer que la fonction $U(t, x)$ vérifie l'équation (E_1) on utilise essentiellement la proposition.

Pour voir les conditions initiales, on utilise les coordonnées polaires centrées en x, $x' = x + r\omega$, $\omega \in S^{n-1}$ et le changement des variables $r = ts$, $0 < s < 1$. □

Preuve du Théorème 2. On pose $F(x) = \Delta_x^q f(x)$ et $G(x) = \Delta_x^q g(x)$, en utilisant essentiellement la transformation de Fourier et les Lemmes 1, 2 on obtient

$$\widehat{U}(t, \xi) = 2^{-\mu}\Gamma(1-\mu) t^\mu |\xi|^\mu J_{-\mu}(\xi t)\widehat{F}(\xi) + 2^{\mu-1}\Gamma(\mu) t^\mu |\xi|^{-\mu} J_\mu(\xi t)\widehat{G}(\xi).$$

La transformation inverse de Fourier, l'interversion des intégrales et le Lemme 3 nous donnent le résultat du Théorème 2. □

4. Équation radiale d'Euler–Poisson–Darboux

Preuve du Théorème 3. Il suffit de montrer que $K_\mu(t,x,x')$ vérifie l'équation (E_1), pour cela on fait le changement des fonctions $\varphi(t,x)=x^{\nu+\mu-1}(1-z^2)^{\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}}G(z)$, avec $z=\frac{x^2+x'^2-t^2}{2xx'}$ on obtient l'équation de Legendre [7, p. 198]

$$\left[\left(1-z^2\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}-2z\frac{\partial}{\partial z}+\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)-\frac{(\frac{1}{2}-\mu)^2}{1-z^2}\right]G(z)=0,$$

dont deux solutions sont $P^{\frac{1}{2}-\mu}_{\nu-\frac{1}{2}}(z)$ et $Q^{\frac{1}{2}-\mu}_{\nu-\frac{1}{2}}(z)$.

Pour voir les conditions initiales on prend $t<x$, et on fait le changement des variables $x'=x+ts$ dans les expressions des noyaux. □

Preuve du Théorème 3 bis. D'après le principe de superposition, il suffit d'étudier les problèmes de Cauchy [2]

$$\Lambda^\nu_x U_l=\Lambda^\mu_t U_l,\qquad \Lambda^\nu_x=\Lambda_x,\qquad U_l(0,x)=x^l,\qquad \lim_{t\to 0}t^{1-2\mu}\frac{\partial}{\partial t}U(t,x)=0, \tag{P_1}$$

$$\Lambda^\nu_x V_l=\Lambda^\mu_t V_l,\qquad V_l(0,x)=0,\qquad \lim_{t\to 0}t^{1-2\mu}\frac{\partial}{\partial t}V(t,x)=x^l.\qquad \square \tag{P_2}$$

Preuve du Théorème 4. Par une méthode analogue à celle procedée dans la preuve du Théorème 2 on obtient

$$\widehat{U}(t,\lambda)=2^{-\mu}\Gamma(1-\mu)t^\mu\lambda^\mu J_{-\mu}(\lambda t)\widehat{F}(\lambda)+2^{\mu-1}\Gamma(\mu)t^\mu\lambda^{-\mu}J_\mu(\lambda t)\widehat{G}(\lambda).$$

La transformation inverse de Fourier–Bessel–Hankel, l'interversion des intégrales et le Lemme 4 nous donnent le résultat du Théorème 4. □

5. Applications et perspectives

Corollaire 1 *(Équation des ondes en dimension n). (Voir [4].) Pour $\mu\to\frac{1}{2}$ dans le Théorème 1, on retrouve la solution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes classique en dimension n*

$$U(t,x)=b(N)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{N-1}\left[t^{2N-1}\int\limits_{\{|y|=1\}}\Phi(x-ty)\,\mathrm{d}\sigma(y)\right]+b(N)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{N-1}\left[t^{2N-1}\int\limits_{\{|y|=1\}}\Psi(x-ty)\,\mathrm{d}\sigma(y)\right]$$

si n est impair $(n=2N+1)$ où

$$b(N)=2^{-1}\left[1.3.5\cdots(2N-1)\right]^{-1}\pi^{-N-\frac{1}{2}}\Gamma\left(N+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2(2\pi)^N}$$

et $\mathrm{d}\sigma(y)$ est la mesure de surface $\{|y|=1\}$,

$$U(t,x)=2b(N)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{N-1}\left[t^{2N-1}\int\limits_{\{|y|<1\}}\frac{\Phi(x-ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}\,\mathrm{d}y\right]+2b(N)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{N-1}\left[t^{2N-1}\int\limits_{\{|y|<1\}}\frac{\Psi(x-ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}\,\mathrm{d}y\right]$$

si n est pair $(n=2N)$.

Corollaire 2. *(Voir Théorème 1.1 [4].) Pour $\nu=-\alpha$ et $\mu\to\frac{1}{2}$ dans le Théorème 3, on retrouve la solution du problème de Cauchy pour l'équation radiale des ondes*

$$\begin{aligned}U(t,x)={}&\int\limits_0^{+\infty}g\left(x'\right)K\left(t,x,x'\right)\mathrm{d}x'+\int\limits_0^{+\infty}f\left(x'\right)\frac{\partial}{\partial t}K\left(t,x,x'\right)\mathrm{d}x'\\&+\begin{cases}\frac{1}{2}x^{-\alpha-\frac{1}{2}}[f(x-t)(x-t)^{\frac{1}{2}+\alpha}+f(x+t)(x+t)^{\frac{1}{2}+\alpha}] & \text{pour } t<x,\\ \frac{1}{2}x^{-\alpha-\frac{1}{2}}[-\sin\pi\alpha.f(t-x)(t-x)^{\frac{1}{2}+\alpha}+f(t+x)(t+x)^{\frac{1}{2}+\alpha}] & \text{pour } x<t\end{cases}\end{aligned}$$

où

$$K(t,x,x') = K_{\frac{1}{2}}(t,x,x')x'^{1+2\alpha}$$
$$= \begin{cases} 0 \quad \textit{pour } 0 < x' < x-t \textit{ ou } x' > x+t, \\ \frac{1}{2}x^{-\alpha-\frac{1}{2}}x'^{\frac{1}{2}+\alpha}{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\alpha, \frac{1}{2}+\alpha, 1, \frac{t^2-(x'-x)^2}{4xx'}\right) \quad \textit{pour } |x-t| < x' < x+t, \\ \frac{2^{-2\alpha-1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)\Gamma(\alpha+1)}x^{-\alpha-\frac{1}{2}}x'^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\frac{4xx'}{t^2-(x'-x)^2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}{}_2F_1\left(\alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{1}{2}, 2\alpha+1, \frac{4xx'}{t^2-(x'-x)^2}\right) \\ \quad \textit{pour } 0 < x' < t-x. \end{cases}$$

Corollaire 3. *(Voir Théorème 2.1.1 [2].) Pour $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{k+1}{2}$ dans le Théorème* 3 *bis, on retrouve la solution exacte de l'équation homogène d'Euler–Poison–Darboux*

$$U(t,x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l U_l + \sum_{l=0}^{\infty} b_l V_l$$

où $U_l = x^l {}_2F_1(\frac{-l}{2}, \frac{k+1-l}{2}, \frac{1}{2}, \frac{t^2}{x^2})$ et $V_l = tx^l {}_2F_1(\frac{-l}{2}, \frac{k+1-l}{2}, \frac{3}{2}, \frac{t^2}{x^2})$.

Exemples. 1. Le problème

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{3}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}U(t,x), \\ U(0,x) = 0, \qquad U_t(0,x) = x \end{cases}$$

admet la solution unique $U(t,x) = t\sqrt{x^2-t^2}$.

2. Le problème

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}U(t,x), \\ U(0,x) = x, \qquad U_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

admet la solution unique $U(t,x) = \sqrt{x^2-t^2} + t \arcsin \frac{t}{x}$.

En perspective, on étudiera les équations d'Euler–Poisson–Darboux à conditions modifiées dans les espaces hyperboliques et elliptiques.

Références

[1] J. Barros-Neto, Hypergeometric functions and the Tricomi operator, arXiv:math/0310480v1 [math.AP], 30 October 2003.
[2] A. Bentrad, Exact solutions for a different version of the nonhomogeneous E–P–D equation, Complex Var. Elliptic Equ. 51 (3) (March 2006) 243–253.
[3] D.W. Bresters, On the equation of Euler–Poisson–Darboux, SIAM J. Math. Anal. 1 (1973) 31–41.
[4] L. Colzani, Radial solutions to the wave equation, Ann. Mat. 181 (2002) 25–54.
[5] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, sixth ed., Academic Press, 2000.
[6] N.N. Lebedev, Special Functions and Their Applications, Dover Publications, Inc., New York, 1972.
[7] W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni, Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, Springer-Verlag, New York, 1966.
[8] R. Vidunas, Specialization of Appell's functions to univariate hypergeometric functions, J. Math. Anal. Appl. 355 (2009) 145–163.
[9] A. Weinstein, On the wave equation and the equation of Euler–Poisson, in: Proc. Sympos. Appl. Math., vol. 5, McGraw–Hill, New York, 1954, pp. 137–147.