C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 905–910

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse numérique

Simplexe de Lagrange de degré et de dimension arbitraire

High order Lagrange finite elements

Paul Louis George [a], Houman Borouchaki [b]

[a] *INRIA, Équipe-projet Gamma3, domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay cedex, France*
[b] *UTT et INRIA, Équipe ICD-Gamma3, université de technologie de Troyes, BP 2060, 10010 Troyes cedex, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 14 février 2011
Accepté le 18 juillet 2011
Disponible sur Internet le 19 août 2011

Présenté par Olivier Pironneau

RÉSUMÉ

La résolution de nombreux problèmes formulés en E.D.P. (équations aux dérivées partielles) nécessite le recours à des éléments finis de degré deux ou plus. Cette Note se propose de donner les bases théoriques relatives à ce qu'est un élément fini simplicial de Lagrange de degré quelconque et en toute dimension dans le but d'appliquer ces résultats aux cas courants (dimension 2 et 3, ordre $2, 3, \ldots$). Le lien entre les éléments finis de Lagrange et les carreaux simpliciaux de Bézier est établi. Une condition suffisante de validité pour de tels éléments est déduite.

ABSTRACT

There is a need for finite elements of degree 2 or more to solve various P.D.E. problems. This Note discusses the theoretical issues about Lagrange simplicial finite elements of arbitrary order and dimension. The purpose is to give the theoretical frame to be applied in actual cases (2 and 3 dimension, degree $2, 3, \ldots$). We show how finite elements and Bézier patches are related and we deduce a validity condition.

Abridged English version

Constructing high order Lagrange meshes is far form being trivial. There is a shortage of papers about this issue, indeed, a common idea is that it is sufficient to modify a linear mesh and, therefore, the question is judged to be not really relevant. A linear Lagrange finite element is valid if its volume is positive. For a high order element, the criterion about the volume is replaced by a criterion about the jacobian of its related shape functions. As the jacobian is a non-linear function, checking its positiveness is not straightforward.

The few papers about this question mainly consider two aspects. The first is concerned with using high order elements in the case of simple geometries (therefore constructing the mesh is trivial). The other actually deals with complex geometries and, in this respect, most of the references can be found in [3,8–10]. Theoretical issues about this type of elements are not clearly established and constructing such elements seems to remain more or less empirical. This paper only focuses on theoretical issues to give a framework for the effective mesh construction in 2 and 3 dimensions and for *a priori* arbitrary degree.

The Lagrange simplicial finite element, K, of degree d in dimension dim is defined, following [4,5], as the image of a reference element $\hat{K}$ by means of a mapping F made up of the shape functions of degree d, the p_i's, as $M = F(\hat{\mathbf{x}}) =$

Adresses e-mail : paul-louis.george@inria.fr (P.L. George), houman.borouchaki@utt.fr (H. Borouchaki).

1631-073X/$ – see front matter © 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2011.07.016

$\sum_i p_i(\hat{\mathbf{x}})A_i$, where the A_i's are the nodes of K. Using the Bernstein polynomials, M reads $M = \theta(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=d} B^d_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})P_{\mathbf{i}}$, where $B^d_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$ is the Bernstein polynomial of degree d in the variable $\mathbf{u}$ which is a (dim+1)-uplet and forms a barycentric system, i.e., $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{\dim+1})$ with $\sum_{1 \leqslant j \leqslant \dim+1} u_j = 1$, where $\mathbf{i}$ is a (dim+1)-uplet of indices, $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_{\dim+1})$ such that $|\mathbf{i}| = \sum_{1 \leqslant j \leqslant \dim+1} i_j = d$, and where the $P_{\mathbf{i}}$'s are control points in $\mathbb{R}^{\dim}$.

The idea is to define the jacobian of F in terms of the jacobian of θ which is actually "easy" to obtain. Indeed, we have $\mathcal{J}_F(\hat{\mathbf{x}}) = \mathcal{J}_\theta(1 - \sum_{2 \leqslant j \leqslant \dim+1} u_j, u_2, \ldots, u_{\dim+1})$, which simply means that $u_1 = 1 - \sum_{2 \leqslant j \leqslant \dim+1} u_j$. Then, we show that the jacobian is a homogeneous polynomial of degree $q = \dim \times (d-1)$ which reads as the Bézier form $\sum_{|\mathbf{i}|=q} B^q_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})N_{\mathbf{i}}$. Then, the positiveness of the jacobian results of the classical properties of the Bézier forms. Since we have $\min_{|\mathbf{I}|=q} N_{\mathbf{I}} \leqslant \mathcal{J}_F(\hat{\mathbf{x}})$ for all $\hat{\mathbf{x}}$ in $\hat{K}$, we use this result to find a sufficient condition of validity, and then, conclude this work.

Theorem 0.1. *A sufficient condition of validity for a Lagrange simplicial finite element is that all the coefficients $N_{\mathbf{i}}$ are strictly positive.*

Actually, with additional calculus, this condition can be refined by subdividing the Bézier patches θ. Doing that, by means of iterative subdivisions, the condition tends towards a necessary condition.

To conclude, considering the finite element as a Bézier patch resulted in a sufficient condition about the underlying finite element. As example, the P2 triangle (6-node triangle) in 2 dimension and the P2 tetrahedron (10-node tetrahedron) in 3 dimension demonstrate the discussed theory.

1. Introduction

La résolution de nombreux problèmes formulés en E.D.P. nécessite le recours à des éléments finis de type Lagrange de degré deux ou plus, en particulier, pour les problèmes fortement non linéaires (problèmes de plasticité en mécanique des solides, etc.). En outre, de tels éléments permettent une représentation plus fidèle de géométries complexes (frontières courbes).

La construction de maillages avec ce type d'éléments est loin d'être une opération triviale, contrairement à ce que l'on pense en général. Ce sujet est d'ailleurs rarement abordé dans le détail et très peu de papiers sont disponibles, on pense en effet qu'il suffit de modifier sans grandes difficultés un maillage de degré un pour obtenir le résultat cherché et que le sujet n'en est pas vraiment un.

Un élément fini de type Lagrange linéaire est valide si son volume est positif [2]. Pour un élément de degré plus élevé, le critère sur le volume est traduit par un critère sur le jacobien des fonctions de formes sous-jacentes. Comme ce jacobien est non linéaire, vérifier sa positivité est non trivial.

Les quelques papiers disponibles sur ce sujet sont relatifs à deux de ces aspects. Le premier concerne l'utilisation d'éléments finis d'ordre quelconque dans le cadre de géométries simples (le problème de construction étant alors trivial). Le second concerne effectivement le cas de géométries complexes et, dans ce cadre, on trouve la plupart des références dans [3,8–10]. Les résultats théoriques sur ce type d'éléments ne sont pas clairement établis et leur construction semble rester plus ou moins empirique. Ce papier se propose de se concentrer uniquement sur la théorie à utiliser pour trouver les bases permettant de traiter le problème de validité de ces éléments dans les dimensions 2 et 3 et pour des degrés *a priori* quelconques.

2. Éléments finis et carreaux de Bézier

On considère les éléments finis simpliciaux de Lagrange de degré quelconque (noté d) dans un espace de dimension quelconque (notée dim).

Un élément fini courant, K, est défini, cf. [4,5], comme l'image par une transformation, F, d'un élément de référence $\hat{K}$, ici le simplexe dont le premier sommet est l'origine et les arêtes incidentes à ce sommet sont unitaires et alignées sur les axes de ccordonnées. La transformation est construite à partir de polynômes de base de degré d, les p_i, et des nœuds, notés A_i, de l'élément courant K. Plus précisément, le point M de coordonnées $\mathbf{x}$ est l'image par F du point de coordonnées $\hat{\mathbf{x}}$ de $\hat{K}$ via la relation $M = F(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_i p_i(\hat{\mathbf{x}})A_i$, où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{\dim})$ et $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{\dim})$ sont les multivariables d'espace.

L'idée est d'exprimer M en prenant comme base de polynômes les polynômes homogènes de Bernstein. Ainsi, on obtient le carreau de Bézier $M = \theta(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=d} B^d_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})P_{\mathbf{i}}$, avec $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{\dim+1})$ et $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_{\dim+1})$, $B^d_{\mathbf{i}}$ le polynôme de Bernstein de degré d en les variables u_j, dont la somme est égale à 1 [6,7]. Par ailleurs, les $P_{\mathbf{i}}$ sont les points de contrôle de $\mathbb{R}^{\dim}$ indicés en les indices i_j contenus dans $\mathbf{i}$. Rappelons que : $B^d_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \frac{d!}{\prod_{1 \leqslant j \leqslant \dim+1} i_j!} \prod_{1 \leqslant j \leqslant \dim+1} u_j^{i_j}$. Il est clair que ces deux écritures du point courant M sont identiques moyennant la définition adéquate des points de contrôle. En effet, $u_j = x_{j-1}$ pour $2 \leqslant j \leqslant \dim+1$ et $u_1 = 1 - \sum_{1 \leqslant j \leqslant \dim} x_j$. La forme de Bézier va nous permettre d'établir une condition suffisante de validité de ces éléments finis car elle rend facile l'évaluation de la positivité du jacobien de la transformation F (non réalisable en pratique si on reste en formulation élément fini).

3. Dérivées partielles

On donne ici la forme générale d'une dérivée partielle, par exemple, la kième, donc par rapport à u_k. Pour les polynômes de Bernstein on a :

$$\frac{\partial B_{\mathbf{i}}^d(\mathbf{u})}{\partial u_k} = \sum_{|\mathbf{i}|=d, i_k \neq 0} \frac{d(d-1)!}{(i_k-1)! \prod_{j \neq k} i_j!} u_k^{i_k-1} \prod_{j \neq k} u_j^{i_j}, \quad \text{soit encore} \quad d \sum_{|\mathbf{i}|=d-1} \frac{(d-1)!}{\prod_j i_j!} \prod_j u_j^{i_j}.$$

On obtient finalement pour θ, $\frac{\partial \theta(\mathbf{u})}{\partial u_k} = d \sum_{|\mathbf{i}|=d-1} B_{\mathbf{i}}^{d-1}(\mathbf{u}) P_{\mathbf{i}+\mathbf{e_k}}$, avec $\mathbf{e_k} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$, le 1 étant à la position k de ce $(\dim+1)$-uplet. Autrement dit, l'indice k de $\mathbf{i} + \mathbf{e_k}$ est $i_k + 1$.

4. Jacobien

Le jacobien, noté $\mathcal{J}_F(\hat{\mathbf{x}})$, est le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation élément fini qui permet de passer de $\hat{\mathbf{x}}$ à M. Pour un élément droit, ce jacobien est constant, pour un élément courbe, il dépend effectivement de $\hat{\mathbf{x}}$, le nœud d'évaluation. On utilise la fonction θ pour calculer ce jacobien et on a :

$$\mathcal{J}_F(\hat{\mathbf{x}}) = \mathcal{J}_\theta\left(1 - \sum_{2 \leqslant j \leqslant \dim+1} u_j, u_2, \ldots, u_{\dim+1}\right),$$

on peut remarquer que :

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_\theta\left(1 - \sum_{2 \leqslant j \leqslant \dim+1} u_j, u_2, \ldots, u_{\dim+1}\right) = (-1)^{\dim} \mathcal{J}_\theta\left(u_1, u_2, \ldots, u_{\dim}, 1 - \sum_{1 \leqslant j \leqslant \dim} u_j\right).$$

La kième colonne c_k de $\mathcal{J}_\theta(u_1, u_2, \ldots, u_{\dim}, 1 - \sum_{1 \leqslant j \leqslant \dim} u_j)$ est définie par $c_k = \frac{\partial \theta}{\partial u_k} - \frac{\partial \theta}{\partial u_{\dim+1}}$. En remplaçant ces quantités par leurs expressions, on trouve leurs valeurs en fonction des polynômes de Bernstein et des points de contrôle. Il vient :

$$c_k = d \sum_{|\mathbf{i}|=d-1} B_{\mathbf{i}}^{d-1}(\mathbf{u})[P_{\mathbf{i}+\mathbf{e_k}} - P_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_{\dim+1}}],$$

que l'on écrit finalement comme :

$$c_k = d \sum_{|\mathbf{i}|=d-1} B_{\mathbf{i}}^{d-1}(\mathbf{u}) \Delta^{\mathbf{e_k}-\mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}+\mathbf{e_k}}, \tag{1}$$

avec la notation $\Delta^{\mathbf{j}}$ définie comme $\Delta^{\mathbf{j}} P_{\mathbf{i}} = P_{\mathbf{i}} - P_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}$, pour $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_{\dim+1})$. Ainsi, ici, $\Delta^{\mathbf{e_k}-\mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}+\mathbf{e_k}}$ n'est autre que $P_{\mathbf{i}+\mathbf{e_k}} - P_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_{\dim+1}}$. Cette formule montre qu'un simple jeu d'indices suffit pour obtenir telle ou telle dérivée partielle sans faire explicitement de dérivation. On connaît de cette façon tous les coefficients de la matrice jacobienne de F. Le jacobien cherché a la forme suivante :

$$\mathcal{J} = (-d)^{\dim} \left| \left(\sum_{|\mathbf{i}|=d-1} B_{\mathbf{i}}^{d-1}(\mathbf{u}) \Delta^{\mathbf{e_k}-\mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}+\mathbf{e_k}} \right)_{1 \leqslant k \leqslant \dim} \right|, \tag{2}$$

c'est le déterminant de la matrice dont les colonnes (indice k) sont ces expressions. On va montrer que ce déterminant s'écrit comme un polynôme homogène de degré $q = \dim \times (d-1)$ sous la forme classique :

$$\mathcal{J} = \sum_{|\mathbf{i}|=q} B_{\mathbf{i}}^q(\mathbf{u}) N_{\mathbf{i}}, \tag{3}$$

où les $N_{\mathbf{i}}$, qui sont des coefficients de contrôle et l'indice $\mathbf{i}$ vont être explicités ci-dessous.

5. Coefficients de contrôle du jacobien

On part de l'Expression (2) et on sort la sommation, il vient :

$$\mathcal{J} = (-d)^{\dim} \sum_{|\mathbf{i}^\alpha|=d-1, 1 \leqslant \alpha \leqslant \dim} \left| \left(B_{\mathbf{i}^\alpha}^{d-1}(\mathbf{u}) \Delta^{\mathbf{e_k}-\mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}^\alpha+\mathbf{e_k}} \right)_{1 \leqslant k \leqslant \dim} \right|,$$

où $\mathbf{i}^\alpha$ est un $(\dim+1)$-uplet, de tels multiplets étant au nombre de dim, la dimension de l'espace (le nombre de variables de l'espace des paramètres) avec, pour chacun, $|\mathbf{i}^\alpha| = d - 1$. On sort maintenant les polynômes de Bernstein du déterminant. On trouve :

$$\mathcal{J} = (-d)^{\dim} \sum_{|\mathbf{i}^\alpha|=d-1, 1\leqslant\alpha\leqslant\dim} \left[\left| \left(\Delta^{\mathbf{e_k}-\mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}^\alpha+\mathbf{e_k}} \right)_{1\leqslant k\leqslant\dim} \right| \prod_{1\leqslant\alpha\leqslant\dim} B^{d-1}_{\mathbf{i}^\alpha}(\mathbf{u}) \right]. \tag{4}$$

Le produit des polynômes peut s'exprimer, à un coefficient près (que l'on va faire rentrer dans les termes Δ pour retrouver la forme canonique), comme un polynôme de Bernstein de degré $q = \dim \times (d-1)$, les points de contrôle N cherchés étant calculés à partir des différents Δ et de ces coefficients. On écrit l'expression ci-dessus sous la forme plus explicite suivante :

$$\mathcal{J} = (-d)^{\dim} \sum_{(\mathbf{i}^1,\ldots,\mathbf{i}^{\dim}), |\mathbf{i}^\alpha|=d-1} \left[\left| \Delta^{\mathbf{e_1}-\mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}^1+\mathbf{e_1}} \ldots \Delta^{\mathbf{e}_{\dim}-\mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}^{\dim}+\mathbf{e}_{\dim}} \right| \prod_{1\leqslant\beta\leqslant\dim} B^{d-1}_{\mathbf{i}^\beta}(\mathbf{u}) \right].$$

Posant $M_{\mathbf{i}^1,\mathbf{i}^2,\ldots,\mathbf{i}^{\dim}}$ le déterminant présent dans cette expression, c'est-à-dire :

$$M_{\mathbf{i}^1,\mathbf{i}^2,\ldots,\mathbf{i}^{\dim}} = \left| \Delta^{\mathbf{e_1}-\mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}^1+\mathbf{e_1}} \ldots \Delta^{\mathbf{e}_{\dim}-\mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}^{\dim}+\mathbf{e}_{\dim}} \right|,$$

on a :

$$\mathcal{J} = (-d)^{\dim} \sum_{(\mathbf{i}^1,\mathbf{i}^2,\ldots,\mathbf{i}^{\dim}), |\mathbf{i}^\alpha|=d-1} \left[M_{\mathbf{i}^1,\mathbf{i}^2,\ldots,\mathbf{i}^{\dim}} \prod_{1\leqslant\beta\leqslant\dim} B^{d-1}_{\mathbf{i}^\beta}(\mathbf{u}) \right].$$

Comme le produit d'un $B^{d-1}_{\mathbf{i}}$ par un $B^{d-1}_{\mathbf{j}}$ donne, à un facteur près, un monôme du même degré que celui de $B^{2(d-1)}_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}$, on introduit l'indice $\mathbf{I} = \sum_{1\leqslant\beta\leqslant\dim} \mathbf{i}^\beta$, tel que $|\mathbf{I}| = q$ et le coefficient K précisé ci-après pour pouvoir écrire notre relation comme :

$$\mathcal{J} = (-d)^{\dim} \sum_{|\mathbf{I}|=q} \left[\sum_{(\mathbf{i}^1,\mathbf{i}^2,\ldots,\mathbf{i}^{\dim}), \sum \mathbf{i}^\beta=\mathbf{I}} [K M_{\mathbf{i}^1,\mathbf{i}^2,\ldots,\mathbf{i}^{\dim}}] \right] B^q_{\mathbf{I}}(\mathbf{u}),$$

avec

$$K = \frac{\prod_{1\leqslant\beta\leqslant\dim} K^{(d-1)}_{\mathbf{i}^\beta}}{K^{(q)}_{\mathbf{I}}} \quad \text{ou} \quad K^{(d-1)}_{\mathbf{i}} = \frac{(d-1)!}{\prod_{1\leqslant k\leqslant\dim+1} i_k!} \quad \text{et} \quad K^{(q)}_{\mathbf{I}} = \frac{q!}{\prod_{1\leqslant k\leqslant\dim+1} I_k!},$$

que l'on note, par la suite, en omettant les exposants (q) et $(d-1)$ sachant repérer via l'indice en $\mathbf{I}$ s'il s'agit de (q) ou en $\mathbf{i}$ s'il s'agit de $(d-1)$. Ceci donne l'expression cherchée pour les N_I, à savoir :

$$N_{\mathbf{I}} = \frac{(-d)^{\dim}}{K_{\mathbf{I}}} \sum_{(\mathbf{i}^1,\mathbf{i}^2,\ldots,\mathbf{i}^{\dim}), \sum \mathbf{i}^\beta=\mathbf{I}} \left(\prod_{1\leqslant\beta\leqslant\dim} K_{\mathbf{i}^\beta} \right) M_{\mathbf{i}^1,\mathbf{i}^2,\ldots,\mathbf{i}^{\dim}} \tag{5}$$

ce qui conclut ce calcul. En pratique, on cherche les dim indices $\mathbf{i}^\beta$, avec $|\mathbf{i}^\beta| = d-1$, qui contribuent puis on forme les combinaisons de ces indices pour obtenir une somme égale à $\mathbf{I}$, le nombre de ces combinaisons donnant le nombre de termes (de déterminants) de la somme, ces termes, à leur tour, indiquant les points de contrôle à utiliser.

6. Positivité du jacobien

La positivité du jacobien partout découle de l'Expression (3) et des propriétés des formes de Bézier. En effet, on a $\min_{|\mathbf{I}|=q} N_{\mathbf{I}} \leqslant \mathcal{J}_F(\hat{\mathbf{x}})$ pour tout $\hat{\mathbf{x}}$ de $\hat{K}$ et c'est ce résultat qui nous permet de trouver la condition suffisante de validité et, ainsi, de conclure cette étude.

Théorème 6.1. *Une condition sufffisante de validité d'un élément fini simplicial de Lagrange est que tous les coefficients $N_{\mathbf{i}}$ soient strictement positifs.*

En pratique, au prix de calculs supplémentaires, on peut affiner cette condition (si le minimum n'est pas atteint en un sommet du simplexe) en considérant des subdivisions du carreau de Bézier θ. Ainsi, en itérant cette procédure de subdivisions, on tend vers la condition nécessaire de validité.

En conclusion, la vision Bézier d'un élément fini simplicial nous a permis de trouver une condition suffisante de validité de l'élément fini sous-jacent.

7. Illustration sur le triangle P2 et le tétraèdre P2

7.1. Le triangle P2 en 2 dimension

Dans ce cas, on a $d = 2$, $\dim = 2$ et ainsi $q = 2$, c'est d'ailleurs le seul élément où $q = d$. Les $(\dim + 1)$-uplets sont des triplets, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ et $\mathbf{i} = (i, j, k)$. Les sommets du triangle sont A_i, $i = 1, 3$. Les nœuds des arêtes sont notés A_{ij}, pour l'arête $A_i A_j$. On construit les six points de contrôle, notés C_{ij}, de la façon suivante : $C_{ii} = A_i$ pour $i = 1, 3$ et, par exemple, $C_{12} = \frac{4A_{12} - A_1 - A_2}{2}$ et des expressions analogues pour C_{23} et C_{31} [1,6]. Le jacobien s'écrit comme à la Relation (3), c'est un polynôme homogène de degré 2, il possède donc six termes (donc six coefficients de contrôle) et s'écrit comme :

$$\mathcal{J}(u, v, w) = u^2 N_{200} + 2uv N_{110} + v^2 N_{020} + 2vw N_{011} + w^2 N_{002} + 2uw N_{101}. \tag{6}$$

Le calcul des N_{ijk}, d'après la Formule (5), donne pour N_{200} l'expression suivante :

$$N_{200} = 4\big[\Delta^{1,0,-1} P_{200}, \Delta^{0,1,-1} P_{110}, \mathbf{e_3}\big] = 4\big[(P_{200} - P_{101}), (P_{110} - P_{101}), \mathbf{e_3}\big],$$

où [.,.,.] désigne le produit mixte et $\mathbf{e_3} = (0, 0, 1)$. En remplaçant les P_{ijk} par leurs occurences en A_i et en C_{ij}, on obtient :

$$N_{200} = 4[\overrightarrow{C_{31}A_1}, \overrightarrow{C_{31}C_{12}}, \mathbf{e_3}] = 4[\overrightarrow{A_1C_{12}}, \overrightarrow{A_1C_{31}}, \mathbf{e_3}],$$

qui n'est autre que la surface signée (à un facteur près) du triangle de sommets $[A_1 C_{12} C_{31}]$, i.e., le premier sommet et les deux points de contrôle adjacents. Notons que N_{020} et N_{002} sont exactement de la même forme et mesurent la surface signée des sous-triangles correspondants. Les autres coefficients de contrôle correspondent aux nœuds « milieux », par exemple, pour N_{110}, lié à A_4, on trouve :

$$N_{110} = 2\big(\big[\Delta^{1,0,-1} P_{200}, \Delta^{0,1,-1} P_{020}, \mathbf{e_3}\big] + \big[\Delta^{1,0,-1} P_{110}, \Delta^{0,1,-1} P_{110}, \mathbf{e_3}\big]\big),$$
$$N_{110} = 2\big(\big[(P_{200} - P_{101}), (P_{020} - P_{011}), \mathbf{e_3}\big] + \big[(P_{110} - P_{011}), (P_{110} - P_{101}), \mathbf{e_3}\big]\big)$$

soit, en fonction des A_i et des C_{ij} : $N_{110} = 2([\overrightarrow{C_{31}A_1}, \overrightarrow{C_{23}A_2}, \mathbf{e_3}] + [\overrightarrow{C_{23}C_{12}}, \overrightarrow{C_{31}C_{12}}, \mathbf{e_3}])$, par suite, il n'y a pas d'interprétation géométrique particulière, on peut juste observer que les points de contrôle impliqués « entourent » A_4. Les autres N_{ijk} associés respectivement à A_5 et A_6 ont la même forme.

7.2. Le tétraèdre P2 en 3 dimension

Dans ce cas, on a $d = 2$, $\dim = 3$ et ainsi $q = 3$. Les $(\dim + 1)$-uplets sont des quadruplets, $\mathbf{u} = (u, v, w, t)$ et $\mathbf{i} = (i, j, k, l)$. Les sommets du tétraèdre sont A_i, $i = 1, 4$. Les nœuds des arêtes sont les A_{ij}, A_{ij} étant le nœud de l'arête $A_i A_j$. On construit les dix points de contrôle, comme ci-dessus, à savoir les quatre sommets puis les C_{ij} associés aux six nœuds d'arête avec la même convention, C_{ij} est le point de contrôle relatif au nœud A_{ij}. Le jacobien s'écrit comme à la Relation (3), c'est un polynôme homogène de degré 3, il possède donc vingt termes (donc vingt coefficients de contrôle) et s'écrit comme :

$$\mathcal{J}(u, v, w, t) = u^3 N_{3000} + 3u^2 v N_{2100} + 3uv^2 N_{1200} + v^3 N_{0300} + 3v^2 w N_{0210} + \cdots \tag{7}$$

pour n'expliciter que les cinq premiers termes. Les N_{ijkl} sont de trois types, ceux associés aux sommets, ceux associés aux nœuds d'arête et ceux associés aux faces. On va expliciter un coefficient de chaque type. Soient N_{3000}, N_{2100} et N_{1110}.

$$N_{3000} = -8\big[\Delta^{1,0,0,-1} P_{2000}, \Delta^{0,1,0,-1} P_{1100}, \Delta^{0,0,1,-1} P_{1010}\big] = -8[\overrightarrow{C_{14}A_1}, \overrightarrow{C_{14}C_{12}}, \overrightarrow{C_{14}C_{31}}],$$

produit mixte dans lequel on reconnaît le tétraèdre $[C_{14} A_1 C_{12} C_{31}]$ qui, à cause du signe $-$, n'est autre que le tétraèdre coin $[A_1 C_{12} C_{31} C_{14}]$. Pour N_{2100}, tout calcul fait, on trouve :

$$N_{2100} = -\frac{8}{3}\big([\overrightarrow{C_{14}A_1}, \overrightarrow{C_{14}C_{12}}, \overrightarrow{C_{24}C_{23}}] + [\overrightarrow{C_{14}A_1}, \overrightarrow{C_{24}A_2}, \overrightarrow{C_{14}C_{31}}] + [\overrightarrow{C_{24}C_{12}}, \overrightarrow{C_{14}C_{12}}, \overrightarrow{C_{14}C_{31}}]\big),$$

soit trois produits mixtes où l'on observe que les points de contrôle qui interviennent sont « adjacents » à A_{12}, N_{2100} correspondant à C_{12}. Pour N_{1110}, tout calcul fait, on trouve :

$$\begin{aligned} N_{1110} = -\frac{8}{6}\big(&[\overrightarrow{C_{14}A_1}, \overrightarrow{C_{24}A_2}, \overrightarrow{C_{34}A_3}] + [\overrightarrow{C_{14}A_1}, \overrightarrow{C_{34}C_{23}}, \overrightarrow{C_{24}C_{23}}] + [\overrightarrow{C_{24}C_{12}}, \overrightarrow{C_{14}C_{12}}, \overrightarrow{C_{34}A_3}] \\ &+ [\overrightarrow{C_{24}C_{12}}, \overrightarrow{C_{34}C_{23}}, \overrightarrow{C_{14}C_{31}}] + [\overrightarrow{C_{34}C_{31}}, \overrightarrow{C_{14}C_{12}}, \overrightarrow{C_{24}C_{23}}] + [\overrightarrow{C_{34}C_{31}}, \overrightarrow{C_{24}A_2}, \overrightarrow{C_{14}C_{31}}]\big), \end{aligned}$$

où l'on observe que les points de contrôle qui interviennent sont sur la face $t = 0$ ou incidents à cette face.

Références

[1] P. Bézier, Courbes et surfaces, Mathématiques et CAO, vol. 4, Hermès, Paris, 1986.
[2] H. Borouchaki, P.L. George, Quality mesh generation, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. IIb 328 (2000) 505–518.
[3] S. Dey, R.M. O'Bara, M.S. Shephard, Curvilinear mesh generation in 3D, in: 8th Inter. Meshing Roundtable, 1999, pp. 407–417.
[4] P.G. Ciarlet, The Finite Element Method, North-Holland, 1978.
[5] P.G. Ciarlet, Basic error estimates for elliptic problems, in: P.G. Ciarlet, J.L. Lions (Eds.), Finite Element Methods (Part 1), in: Handbook of Numerical Analysis, vol. II, North-Holland, 1991, pp. 17–352.
[6] G. Farin, Curves and Surfaces for CAGD, A Practical Guide, 5th edition, Academic Press, 2002.
[7] P.J. Frey, P.L. George, Mesh Generation, 2nd edition, ISTE and Wiley, 2008.
[8] S.J. Sherwin, J. Peiro, Mesh generation in curvilinear domains using high-order elements, Int. J. Numer. Meth. Eng. 55 (2002) 207–223.
[9] X.J. Xuo, M.S. Shephard, R.M. O'Bara, R. Natasia, M.W. Beal, Automatic p-version mesh generation for curved domains, Eng. & Comp. 20 (2004) 273–285.
[10] O. Sahni, X.J. Xuo, K.E. Janse, M.S. Shephard, Curved boundary layer meshing for adaptive viscous flow simulations, FEAD 46 (2010) 132–139.