Partial Differential Equations

Internal rectification for elastic surface waves

Rectification interne d’ondes de surface élastiques

Alice Marcou
Université de Bordeaux, IMB, 33405 Talence cedex, France

Article info
Article history:
Received 11 May 2011
Accepted after revision 7 July 2011
Available online 9 November 2011
Presented by Gérard Iooss

Abstract
We prove that fast oscillatory elastic surface waves can produce nontrivial internal nonoscillatory displacements.

We consider elastic surface waves of the form, in $y > 0$:

$$U^\varepsilon(t, x, y) \sim \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k U_k \left( t, x, y, \frac{x-ct}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right),$$

with profiles $U_k(t, x, y, Y, \theta) = U_k(t, x, y) + U_k^*(t, x, \theta, Y)$, where $U_k^*$ is periodic in $\theta$ and exponentially decaying to 0 in $Y$.

We prove that, in general, the corrector $U_3$ is not purely localized near the boundary, that is $U_3$ does not vanish. $U_3$ depends on the slow variable $y$ and does not decay to 0 when $Y$ tends to $+\infty$, even if the source terms are exponentially decaying to 0.

© 2011 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Résumé
On prouve que des ondes de surface élastiques rapidement oscillantes peuvent produire un déplacement interne non oscillant non trivial.

On considère des ondes de surface élastiques de la forme, sur $y > 0$ :

$$U^\varepsilon(t, x, y) \sim \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k U_k \left( t, x, y, \frac{x-ct}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right),$$

avec des profils $U_k(t, x, y, Y, \theta) = U_k(t, x, y) + U_k^*(t, x, \theta, Y)$, où $U_k^*$ est périodique en $\theta$ et exponentiellement décroissant vers 0 en $Y$.

On prouve que, en général, le correcteur $U_3$ n’est pas purement localisé près de la frontière, c’est-à-dire $U_3$ n’est pas nul. $U_3$ dépend de la variable lente $y$ et ne décroît pas vers 0 lorsque $Y$ tend vers $+\infty$, même si les termes source sont exponentiellement décroissants vers 0.

© 2011 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

E-mail address: alice.marcou@math.u-bordeaux1.fr.
**Version française abrégée**

On prouve que des ondes de surface élastiques rapidement oscillantes peuvent produire un déplacement interne non oscillant non trivial. Ce phénomène a été observé et expliqué dans [4] pour des systèmes du premier ordre généraux ; on s’intéresse ici au cas des ondes élastiques.

On considère le problème aux limites (1)–(2) et une fréquence (−c, 1) telle qu’il existe des ondes de surface oscillantes, c’est-à-dire des solutions du problème aux limites localisées près de la frontière et telles que la trace sur la frontière a des oscillations rapides en la phase θ = k/ct. On prouve ici que, en général, le correcteur

\[ U \]

est purement localisé près de la frontière, ce qui est le cas de l’élastique.

On cherche des ondes de surface qui admettent un développement asymptotique de la forme (3). On cherche des solutions du problème aux limites localisées près de la frontière et telles que la trace sur la frontière a des oscillations rapides en la phase θ = k/ct. On prouve ici que, en général, le correcteur \( U \) n’est pas purement localisé près de la frontière.

\( U \) est solution des équations linéarisées de l’élasticité (5)–(6), avec des termes au bord déterminés par \( \alpha \) et non nuls en général. \( U \) dépend de la variable lente \( Y \) et ne décroît pas vers 0 lorsque \( Y \) tend vers +∞, même si le terme source est exponentiellement décroissant vers 0.

**1. Introduction**

Nous prouvons que des ondes de surface élastiques rapidement oscillantes peuvent produire un déplacement interne non oscillant non trivial. Ce phénomène a été observé et expliqué dans [4] pour des systèmes du premier ordre généraux ; on s’intéresse ici au cas de l’élastique.

On considère le problème aux limites (1)–(2) et une fréquence (−c, 1) telle qu’il existe des ondes de surface oscillantes, c’est-à-dire des solutions du problème aux limites localisées près de la frontière et telles que la trace sur la frontière a des oscillations rapides en la phase θ = k/ct. On prouve ici que, en général, le correcteur \( U \) n’est pas purement localisé près de la frontière.

\( U \) est solution des équations linéarisées de l’élasticité (5)–(6), avec des termes au bord déterminés par \( \alpha \) et non nuls en général. \( U \) dépend de la variable lente \( Y \) et ne décroît pas vers 0 lorsque \( Y \) tend vers +∞, même si le terme source est exponentiellement décroissant vers 0.

**1. Introduction**

Nous prouvons que des ondes de surface élastiques rapidement oscillantes peuvent produire un déplacement interne non oscillant non trivial. Ce phénomène a été observé et expliqué dans [4] pour des systèmes du premier ordre généraux ; on s’intéresse ici au cas de l’élastique.

On considère le problème aux limites (1)–(2) et une fréquence (−c, 1) telle qu’il existe des ondes de surface oscillantes, c’est-à-dire des solutions du problème aux limites localisées près de la frontière et telles que la trace sur la frontière a des oscillations rapides en la phase θ = k/ct. On prouve ici que, en général, le correcteur \( U \) n’est pas purement localisé près de la frontière.

\( U \) est solution des équations linéarisées de l’élasticité (5)–(6), avec des termes au bord déterminés par \( \alpha \) et non nuls en général. \( U \) dépend de la variable lente \( Y \) et ne décroît pas vers 0 lorsque \( Y \) tend vers +∞, même si le terme source est exponentiellement décroissant vers 0.

**1. Introduction**

Nous prouvons que des ondes de surface élastiques rapidement oscillantes peuvent produire un déplacement interne non oscillant non trivial. Ce phénomène a été observé et expliqué dans [4] pour des systèmes du premier ordre généraux ; on s’intéresse ici au cas de l’élastique.

On considère le problème aux limites (1)–(2) et une fréquence (−c, 1) telle qu’il existe des ondes de surface oscillantes, c’est-à-dire des solutions du problème aux limites localisées près de la frontière et telles que la trace sur la frontière a des oscillations rapides en la phase θ = k/ct. On prouve ici que, en général, le correcteur \( U \) n’est pas purement localisé près de la frontière.

\( U \) est solution des équations linéarisées de l’élasticité (5)–(6), avec des termes au bord déterminés par \( \alpha \) et non nuls en général. \( U \) dépend de la variable lente \( Y \) et ne décroît pas vers 0 lorsque \( Y \) tend vers +∞, même si le terme source est exponentiellement décroissant vers 0.
2. Statement of the main results

2.1. Statement of the problem

Surface waves are real solutions $U^ε(t, x, y) = \left(\frac{u^ε(t, x, y)}{v^ε(t, x, y)}\right)$ satisfying (1) in $y > 0$ and (2) on $y = 0$, that admit asymptotic expansions

$$U(t, x, y) \sim \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k U_k \left(t, x, y - \frac{ct}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right),$$

with profiles $U_k(t, x, y, \theta, Y) = U^k(t, x, y) + U^k_*(t, x, \theta, Y)$ belonging to the space $S = S \oplus S^*$ defined in [4], that is $U^k_*$ is periodic in $\theta$ and exponentially decaying in $Y$.

We denote by $U^k_*$ the Fourier coefficient, with respect to $\theta$, of order $n$ of the profile $U_k$. From the definition of $S = S \oplus S^*$, for $n \neq 0$, $U^n_k$ is of the form $U^n_k = U^n_k(t, x, y)$, with $U^n_k \in S^*$ and $U^n_k$ of is of the form $U^0_k = U^0_k(t, x, y) + U^0_k(t, x, Y)$, with $U_k \in S$ and $U^0_k \in S^*$.

For the sake of definitiveness, we suppose that the solution vanishes identically in the past: $\forall t \leq 0$, $U^ε(t) = 0$, and, to fix the ideas, that it is ignited by source terms $f^ε$ and $g^ε$ on the boundary, which we assume to be small and localized near the boundary:

$$f(t, x) \sim \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k f_k \left(t, x, \frac{x - ct}{\varepsilon}\right), \quad g(t, x) \sim \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k g_k \left(t, x, \frac{x - ct}{\varepsilon}\right),$$

with profiles $f_k$ and $g_k$, belonging to $S^*$, that is exponentially decaying to 0 as $Y$ tends to $+\infty$, and vanishing identically in the past: $\forall t \leq 0$, $f^ε(t) = g^ε(t) = 0$.

Remark 2.1. The order of magnitude $U = O(\varepsilon^2)$ and $f, g = O(\varepsilon^2)$ as $\varepsilon \to 0$ corresponds to the regime of weakly nonlinear geometric optics where the nonlinear effects are present in the propagation of the leading term $U_2$.

2.2. Main results

Theorem 2.2. The profile of main order $U_2$ belongs to $S^*$, i.e., is purely localized on the boundary: $U_2$ vanishes.

The profile of main order $U_2$ is determined by a scalar unknown $\alpha_2(t, x, \theta)$ which solves an equation

$$\partial_t \alpha_2 + c \partial_x \alpha_2 + a(\alpha_2, \alpha_2) = f_2, g_2$$

(4)

where $f_2, g_2$, up to a multiplicative constant, has Fourier coefficients of order $n$ equal to $\frac{p_1}{m} f^n_2 + \frac{p_2}{q} g^n_2$ ($p_1$ and $q$ given by (11)) and $a$ is a nonlocal bilinear form such that the Fourier coefficients of order $n$ of $a(\alpha_2, \alpha_2)$ are equal to

$$\sum_{k'=1}^{k} \Lambda_1(k, k')k'k(-k')\alpha_2(k)\alpha_2(k - k') + \sum_{k'=0}^{\infty} \Lambda_2(k, k')k(-k')\alpha_2(k'\alpha_2(k - k'),$$

where the expressions of the kernels $\Lambda_1$ and $\Lambda_2$ are given in [3].

This theorem is proved in Section 6: we show that $U_2$ solves the linearized equations of elasticity with homogeneous boundary conditions, so that it must vanish. The relation between $U^*_2$ and $\alpha_2$ as well as the equation for $\alpha_2$ are obtained in [3].

The main results of the Note are the following theorem and corollary:

Theorem 2.3. The profile of higher order $U_3$ is of the form $U_3 = U_3^0 + U_3^1$, with $U_3^0 = \left(\frac{u_3^0}{v_3^0}\right) \in S^*$ and $U_3 = \left(\frac{u_3}{v_3}\right) \in S$ satisfying

$$\partial_t u_3 - r \partial_{xx} u_3 - (r - 1) \partial_{xy} v_3 - \partial_{yy} u_3 = 0,$$

$$\partial_t v_3 - r \partial_{xx} v_3 - (r - 1) \partial_{xy} u_3 - \partial_{yy} v_3 = 0 \quad \text{in } y > 0,$$

$$\partial_y u_3 + \partial_t v_3 = A_r \sum_{n \in Z^*} |n| \partial_x \left(|\alpha_2(n, t, x)|\right)^2,$$

with $A_r = -\frac{2 q}{r p_1 + p_2} C_r \neq 0$.

$$\partial_t u_3 + r \partial_y v_3 = 0 \quad \text{on } y = 0.$$

(6b)

These equations are obtained in Section 7.
Remark 2.4. $U_3^*$ is determined by $U_2$ and a scalar unknown $\alpha_3(t, x, \theta)$, which solves the linearized equation of (4).

Corollary 2.5. If $f_2$ and $g_2$ satisfy $\partial_l(f_2, g_2)|_{t=0} \neq 0$, then $U_3 \neq 0$.

Proof. Since $u_2$ and $v_2$, and thus $\alpha_2$, vanish in the past, we have $\partial_l(\alpha_2)|_{t=0} = l(f_2, g_2)|_{t=0}$, and therefore, for $t$ small, $\alpha_2 \sim tl(f_2, g_2)$; we then obtain that $\partial_l(f_2, g_2)|_{t=0} \neq 0$ yields $\sum_{n \in Z}\left|\delta_k((\alpha_2)(n, t, x))\right|^2 \neq 0$.

The right-hand side term of the first boundary condition satisfied by $U_3$ does not vanish, we then obtain that $U_3$ does not vanish. □

Remark 2.6. For example, we can take $f_1$ and $f_2$ such that their Fourier coefficients of order 1 satisfy $\partial_k(p_1 f_1^2 - iqg_2^2)|_{t=0} \neq 0$ in order to have $\partial_l(f_2, g_2)|_{t=0} \neq 0$ and thus $U_3 \neq 0$.

3. The cascade of equations

Plugging the expression (3) of $U^c$ into the equations and boundary conditions and collecting the powers of $\varepsilon$ yield, for all $k \geq 2$,

\begin{equation}
(c^2 - r)\partial_{tt}u_k - (r - 1)\partial_{ty}v_k - \partial_{yy}u_k = H_{k-1}(u_{k-1}, v_{k-1}, \ldots, u_2, v_2),
\end{equation}

\begin{equation}
(c^2 - 1)\partial_{ty}v_k - (r - 1)\partial_{ty}u_k - r\partial_{yy}v_k = K_{k-1}(u_{k-1}, v_{k-1}, \ldots, u_2, v_2) \quad \text{on } \{Y > 0, y > 0\}
\end{equation}

and

\begin{equation}
\partial_y u_k + \partial_y v_k = h_{k-1}(u_2, v_2, \ldots, u_{k-1}, v_{k-1}),
\end{equation}

\begin{equation}
(r - 2)\partial_y u_k + r\partial_y v_k = h_{k-1}(u_2, v_2, \ldots, u_{k-1}, v_{k-1}) \quad \text{on } Y = y = 0.
\end{equation}

In particular, $H_1 = K_1 = 0$, $h_1 = h_2 = 0$ and $H_3$ and $h_3$ are given by (the expressions of $H_k$, $K_k$, $h_k$ and $k_k$ for general $k$ being similar):

\begin{equation}
H_3 = 2c\partial_{tt}u_3 + 2r\partial_{ty}u_3 + (r - 1)\partial_{ty}v_3 + (r - 1)\partial_{ty}v_3 + 2\partial_{yy}u_3 - \partial_{rt}u_2 + r\partial_{tx}u_2 + (r - 1)\partial_{ty}v_2 + \partial_{yy}u_2
\end{equation}

\begin{equation}
+ \delta_k[\partial_y u_3 + \partial_y v_3 + \partial_y v_3] + \delta_1[\partial_y v_3 - \partial_y u_3 + \partial_y v_3 + \partial_y u_3 + \partial_y v_3],
\end{equation}

\begin{equation}
h_3 = -\partial_y u_3 - \partial_y v_3 - \partial_y v_3 - \partial_y v_3 - \partial_y v_3 - \partial_y v_3 - \partial_y u_2 + \partial_y v_2) = h_0[\partial_y u_2(\partial_y u_3 + \partial_y v_3) + \partial_y v_2(\partial_y u_3 + \partial_y v_3)].
\end{equation}

4. Form of the oscillatory parts of the profile $U_2$

We define $p_1$, $p_2$ and $q$ by

\begin{equation}
p_1^2 = 1 - c^2, \quad p_1 < 0, \quad p_2^2 = 1 - \frac{c^2}{r}, \quad p_2 < 0, \quad q^2 = p_1 p_2, \quad q > 0.
\end{equation}

In order to have the existence of surface waves, the following assumption has to be satisfied:

Assumption 4.1. We assume that

\begin{equation}
(2 - c^2)^2 = 4q^2.
\end{equation}

We obtain the following form of the Fourier coefficients $u_2^n, v_2^n, n \neq 0$

\begin{equation}
u_2^n(t, x, Y) = q\alpha_2(n, t, x)(qe^{p_1|n|Y} - e^{p_2|n|Y}),
\end{equation}

\begin{equation}v_2^n(t, x, Y) = i \text{sign}(n) p_2\alpha_2(n, t, x)(-e^{p_1|n|Y} + qe^{p_2|n|Y}),
\end{equation}

where $\alpha_2$ is a scalar unknown satisfying Eq. (4).
5. Equation and boundary condition for $U_k^0$

5.1. Equations

The profiles $u_k^0$ and $v_k^0$ satisfy

$$-\partial_Y u_k^0 = H_{k-1}^0, \quad -r \partial_Y v_k^0 = K_{k-1}^0 \quad \text{in } y > 0, \ Y > 0. \quad (15)$$

Since $u_k^0, v_k^0 \in S$, we obtain the resolubility conditions

$$H_{k-1}^0 = K_{k-1}^0 = 0. \quad (16)$$

Eqs. (15) yield

$$u_k^0 = u_k^0(t, x, y) + u_k^{0*}(t, x, y, Y), \quad v_k^0 = v_k^0(t, x, y) + v_k^{0*}(t, x, y, Y), \quad (17)$$

with $u_k^0, v_k^0 \in S$ unknown functions that have to be determined and $u_k^{0*}, v_k^{0*} \in S^*$ known functions given by the following expressions:

$$u_k^{0*} = -\int_Y^{\infty} \left( \int_S^\infty H_{k-1}^0(t, x, y, s') \, ds' \right) \, ds, \quad (18)$$

$$v_k^{0*} = -\frac{1}{r} \int_Y^{\infty} \left( \int_S^\infty K_{k-1}^0(t, x, y, s') \, ds' \right) \, ds. \quad (19)$$

5.2. Boundary conditions for Fourier coefficients $u_k^0$ and $v_k^0$

The boundary conditions for $u_k^0$ and $v_k^0$ read

$$\partial_Y u_k^0 = h_{k-1}^0, \quad r \partial_Y v_k^0 = k_{k-1}^0, \quad \text{on } Y = y = 0. \quad (20)$$

Plugging the expressions (17) in (20), we obtain

$$\int_0^\infty H_{k-1}^0(t, x, y, s) \, ds = h_{k-1}^0(t, x, y, Y), \quad (21a)$$

$$\int_0^\infty K_{k-1}^0(t, x, y, s) \, ds = k_{k-1}^0(t, x, y, Y), \quad \text{on } Y = y = 0. \quad (21b)$$

5.3. Determination of $u_k^0$ and $v_k^0$

The Fourier coefficients $u_k^0$ and $v_k^0$ are determined in 3 steps. First, from Eqs. (15) with $k = l$, satisfied by $u_l^0$ and $v_l^0$, we obtain expressions of $u_l^0$ and $v_l^0$, where $u_l^0 \in S$ and $v_l^0 \in S$ have to be determined. Afterward, the boundary conditions (21) with $k = l + 1$ satisfied by $u_{l+1}^0$ and $v_{l+1}^0$ yield boundary conditions satisfied by $u_{l+1}^0$ and $v_{l+1}^0$ on $y = 0$. Finally, it follows from Eqs. (15) with $k = l + 2$, satisfied by $u_{l+2}^0$ and $v_{l+2}^0$, the resolubility conditions (16), which lead to equations satisfied by $u_{l+2}^0$ and $v_{l+2}^0$ on $y > 0$.

6. Determination of $U_2^0$

The equations satisfied by $u_2^0 \in S$, $v_2^0 \in S$, yield $u_2^0 = u_2 \in S$, $v_2^0 = v_2 \in S$.

The boundary conditions (20) for $k = 3$ read:

$$\partial_Y u_2 + \partial_Y v_2 = 0, \quad (r - 2) \partial_x u_2 + r \partial_y v_2 = 0, \quad \text{on } y = 0. \quad (22)$$

The resolubility conditions (16) $H_{l+2}^0 = K_{l+2}^0 = 0$ yield

$$\partial_Y u_2 - r \partial_{xx} u_2 - (r - 1) \partial_{xy} v_2 - \partial_{yy} u_2 = 0, \quad (23a)$$

$$\partial_Y v_2 - r \partial_{xx} v_2 - (r - 1) \partial_{xy} u_2 - r \partial_{yy} v_2 = 0, \quad \text{in } y > 0. \quad (23b)$$

From (22) and (23), we then obtain $u_2 = v_2 = 0$ and thus $u_2^0 = v_2^0 = 0$. 


7. Determination of $U_3^0$

From $U_2^0 = 0$ and $U_2 \in S^*$ (thus $U_2$ independent of $y$) and (9), we get:

$$H_2^0 = \partial_y \left[ (r-1) \partial_k v_3^0 + 2 \partial_k u_2^0 \right] + \partial_y \left[ \partial_k u_2 \partial_k v_2 \right]$$

$$+ \partial_y \left[ \partial_k v_2 \partial_k u_3 + \partial_k v_3 + \partial_k u_2 + \partial_y v_2 + (\partial_k v_3 + \partial_k v_2)(\partial_k u_2 + \partial_y v_2) \right].$$

**Remark 7.1.** For $f = f + f^* \in S = S + S^*$

$$\int_Y \partial_y f(t, x, y, \theta, s) \, ds = \lim_{Y \to +\infty} f(t, x, y, \theta, Y) = f(t, x, y, \theta, Y) = -f^*(t, x, \theta, Y).$$

Thus

$$\int_Y H_2^0(t, x, y, s) \, ds = \int_Y \partial_k \left[ \partial_y u_2 \partial_k v_2^0 \right] \, ds - (r-1) \partial_k v_3^0 s - 2 \partial_k u_3^0 s$$

$$- \left[ \partial_k v_2 \partial_k u_3 + \partial_k v_3 + \partial_k u_2 + \partial_y v_2 + (\partial_k v_3 + \partial_k v_2)(\partial_k u_2 + \partial_y v_2) \right].$$

From the expression of $h_3$ (10), we then obtain that (21a) for $k = 4$ reads

$$\partial_y v_3 + \partial_k v_3 = (r-2) \partial_k v_3^0 s - \int_0^\infty \partial_k \left[ \partial_y u_2 \partial_k v_2 \right] \, ds, \quad \text{on } Y = y = 0. \quad (24)$$

From the expression of $v_3^0$ (19), Eq. (24) yields:

$$\partial_y u_3 + \partial_k u_3 = -\frac{2}{r} \int_0^\infty \partial_k \left[ \partial_y u_2 \partial_k v_2 \right] \, ds \quad \text{on } y = 0. \quad (25)$$

The right-hand side term yields a quadratic interaction.

Plugging the expressions of $u_2^0$ and $v_2^0$ (13) and (14),

$$[\partial_k u_2 \partial_k v_2] = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} -|n|^2 q p_2 |\alpha_2(n, t, x)|^2 [-q p_1 e^{2|n| p_1} - q p_2 e^{2|n| p_2} + (q^2 p_1 + p_2) e^{i|n| (p_1 + p_2)}].$$

Thus with $C_r = -q (p_1 p_2 + p_2^2) + q^2 p_1 p_2 + p_2^2$

$$\int_0^\infty [\partial_k u_2 \partial_k v_2] \, ds = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |n| \left[ \frac{q}{p_1 + p_2} C_r |\alpha_2(n, t, x)|^2. \right.$$

From (11) and (12), we get $C_r = -q^2 - q p_2^2 + q^2 + p_2^2 = (1 - q)(p_2^2 - q^2) = \frac{c^2}{\gamma} [1 - \frac{c^2}{\gamma} - (1 - \frac{c^2}{\gamma})].$ $c$ satisfies Eq. (12), therefore

$$1 - \frac{c^2}{\gamma} = q^2 = p_1^2 p_2 = (1 - c^2)(1 - c^2).$$

Since $1 - c^2 = p_1^2 > 0$, we have $1 - c^2 > 0$, thus

$$C_r = \frac{c^2}{2} \left[ (1 - \frac{c^2}{\gamma})^2 - \left(1 - \frac{c^2}{\gamma} \right)^3 \right] = \frac{c^4}{4} (1 - \frac{c^2}{\gamma} - (1 - \frac{c^2}{\gamma})^3). \quad C_r > 0.$$

The boundary condition (25) is thus equivalent to Eq. (6a). Similarly, (21b) yields Eq. (6b) (in this case, we sum over $\mathbb{N}$ odd terms with respect to $n$). The resolubility conditions (16) for $k = 5$, $H_4^0 = K_4^0 = 0$, yield (5).

**Acknowledgements**

The author is indebted to Guy Métivier for his precious help.

**References**