C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 837–840

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse mathématique/Analyse fonctionnelle

La propriété de Fatou dans les espaces de Besov homogènes

The Fatou property in homogeneous Besov spaces

Gérard Bourdaud

Université Paris Diderot, Institut de mathématiques de Jussieu, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 21 juin 2011
Accepté le 6 juillet 2011
Disponible sur Internet le 27 juillet 2011

Présenté par Jean-Michel Bony

R É S U M É

L'espace de Besov homogène $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ possède la propriété de Fatou en tant que sous-espace de l'espace $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées modulo les polynômes. On peut aussi le réaliser canoniquement comme un sous-espace, invariant par translations, de l'espace $\mathcal{S}'_\nu(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées modulo les polynômes de degré inférieur à ν, l'entier ν étant minimal. Dans ce contexte, il possède encore la propriété de Fatou, sauf si $s-(n/p)\in\mathbb{N}$ et $q=1$.

A B S T R A C T

The homogeneous Besov space $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ possesses the Fatou property as a subspace of the space $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ of tempered distributions modulo all polynomials. It is also possible to realize it as a translation invariant subspace of the space $\mathcal{S}'_\nu(\mathbb{R}^n)$ of tempered distributions modulo polynomials of degree less than ν, for some minimal natural number ν. In this context, it still possesses the Fatou property, except if $s-(n/p)$ is a natural number and $q=1$.

1. Généralités sur les distributions modulo les polynômes

Pour tout $m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, nous noterons :

- $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ (ou simplement $\mathcal{P}_m$ si la dimension est claire dans le contexte) l'ensemble de tous les polynômes de degré inférieur à m sur $\mathbb{R}^n$,
- $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$ l'orthogonal de $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,
- $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ le dual topologique de $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$, lequel s'identifie à l'espace quotient $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_m$,
- $[f]_m$ la classe d'équivalence d'une distribution tempérée f modulo $\mathcal{P}_m$.

Définition 1.1. Soit $m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Un *espace de Banach de distributions* (E.B.D.) dans $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel E de $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ muni d'une norme complète telle que l'injection canonique $E\hookrightarrow\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ soit continue.

Adresse e-mail : bourdaud@math.jussieu.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.07.007

Définition 1.2. Soit E un E.B.D. dans $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$. On dit que E possède la propriété de Fatou s'il existe une constante $C > 0$ telle que toute suite bornée $(f_k)_{k\geqslant 0}$ dans E admette une sous-suite $(f_{k_j})_{j\geqslant 0}$ telle que $f := \lim_{j\to+\infty} f_{k_j}$ existe dans $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ et $\|f\|_E \leqslant C \liminf_{j\to+\infty} \|f_{k_j}\|_E$.

Proposition 1.3. *Soient m, k deux élément de $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Si E un E.B.D. dans $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$, tel que $\mathcal{S}_k(\mathbb{R}^n)$ soit un sous-espace dense de E. Alors E' s'identifie à un E.B.D. dans $\mathcal{S}'_k(\mathbb{R}^n)$, à savoir*

$$\bigl\{f \in \mathcal{S}'_k\bigl(\mathbb{R}^n\bigr):\ \sup\bigl\{\bigl|\langle f, u\rangle\bigr|:\ u \in \mathcal{S}_k\bigl(\mathbb{R}^n\bigr),\ \|u\|_E \leqslant 1\bigr\} < +\infty\bigr\}.$$

Cet E.B.D. possède la propriété de Fatou.

Définition 1.4. Soient m et k des éléments de $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ tels que $k \leqslant m$. Soit E un E.B.D. dans $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$. Une *réalisation* de E dans $\mathcal{S}'_k(\mathbb{R}^n)$ est une application linéaire continue $\sigma : E \to \mathcal{S}'_k(\mathbb{R}^n)$ telle que $[\sigma(f)]_m = f$ pour tout $f \in E$.

Remarque 1. Muni de la norme $\|\sigma(f)\| := \|f\|_E$, l'espace $\sigma(E)$ devient un E.B.D. dans $\mathcal{S}'_k(\mathbb{R}^n)$.

L'opérateur de translation τ_a, $a \in \mathbb{R}^n$, est défini sur les distributions par $(\tau_a f)(x) := f(x-a)$, et l'opérateur de dilatation h_r, $r > 0$, par $(h_r f)(x) := f(x/r)$. Si un E.B.D. E est invariant par translations, et si σ est une réalisation de E, σ commute aux translations si et seulement si son image est un E.B.D. invariant par translation. Une remarque similaire s'applique à l'invariance par dilatations. Un E.B.D. E est dit isométriquement invariant par translations si $\|\tau_a f\|_E = \|f\|_E$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et tout $f \in E$; il est dit *homogène* de degré $r \in \mathbb{R}$ si $\|h_\lambda f\|_E = \lambda^{-r}\|f\|_E$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $f \in E$.

2. Les espaces de Besov homogènes

2.1. Definition

Soit γ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, positive, radiale, à support dans la couronne $1/2 \leqslant |\xi| \leqslant 3/2$, telle que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma(2^j\xi) = 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on définit l'opérateur Q_j par la formule :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \widehat{Q_j f}(\xi) := \gamma\bigl(2^{-j}\xi\bigr)\widehat{f}(\xi), \tag{1}$$

où $\widehat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f.

Définition 2.1. Soit $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$. L'espace de Besov homogène $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} := \biggl(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \bigl(2^{sj}\|Q_j f\|_p\bigr)^q\biggr)^{1/q} < +\infty.$$

Il est bien connu que $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est un E.B.D. dans $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$, isométriquement invariant par translations, et qu'on peut le renormer de telle sorte qu'il soit homogène de degré $s - (n/p)$. Dans la suite, on notera $M : \mathbb{R} \times [1, +\infty] \to \mathbb{N}$ la fonction comme suit :

- pour $q > 1$, $M(\alpha, q)$ est le plus petit des entiers $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k > \alpha$,
- $M(\alpha, 1)$ est le plus petit des entiers $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k \geqslant \alpha$.

On peut préciser lesquelles des classes de Schwartz $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$ se plongent dans l'espace de Besov :

Proposition 2.2. *On a $\mathcal{S}_\mu(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $\mu \geqslant M(-s-(n/p'), q')$, où p' désigne l'exposant conjugué de p.*

2.2. La propriété de Fatou

L'énoncé suivant, dont la preuve est similaire à celle utilisée pour les espaces de Besov inhomogènes, voir [2, §2.11], implique que les espaces de Besov sont des duaux, au sens de la Proposition 1.3 :

Théorème 2.3. *Soit $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$. Alors $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$N^s_{p,q}(f) := \sup\bigl\{\bigl|\langle f, g\rangle\bigr|:\ g \in \mathcal{S}_\infty\bigl(\mathbb{R}^n\bigr),\ \|g\|_{\dot{B}^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)} \leqslant 1\bigr\} < +\infty. \tag{2}$$

De plus $N^s_{p,q}$ est une norme équivalente sur $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. En conséquence l'espace $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ s'identifie au dual de la fermeture de $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $\dot{B}^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)$, et il possède la propriété de Fatou.

3. Propriété de Fatou dans les espaces de Besov réalisés

3.1. La réalisation canonique de l'espace de Besov

Nous résumons dans cette section les résultats obtenus dans l'article [1]. Pour $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in [1, \infty]$, on pose $\nu := M(s - (n/p), q)$.

Si $f \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, on montre que la série $\sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f$ converge dans $\mathcal{S}'_\nu(\mathbb{R}^n)$; en notant $\sigma_\nu(f)$ la somme de cette série dans $\mathcal{S}'_\nu(\mathbb{R}^n)$, on définit une réalisation de $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'_\nu(\mathbb{R}^n)$, qui commute aux translations et aux dilatations.

Cette réalisation est en un sens canonique : d'une part, si on excepte le cas $q = \infty$, c'est l'unique réalisation à valeurs dans $\mathcal{S}'_\nu(\mathbb{R}^n)$ qui commute aux translations, d'autre part, si $\nu > 0$, $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ n'admet pas de réalisation dans $\mathcal{S}'_{\nu-1}(\mathbb{R}^n)$ commutant aux translations.

Dans la suite, on désignera par $V^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ l'image de σ_ν. De ce qui précède, il résulte que $V^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est un E.B.D. dans $\mathcal{S}'_\nu(\mathbb{R}^n)$, isométriquement invariant par translation et, après renormage, homogène de degré $s - (n/p)$. On notera $\mathcal{V}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ la fermeture de $\mathcal{S}_\mu(\mathbb{R}^n)$ dans $V^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, où $\mu = M(-s - (n/p'), q')$ (voir la Proposition 2.2). En fait $\mathcal{V}$ ne diffère de V que pour $p = +\infty$ ou $q = +\infty$.

3.2. La propriété de Fatou

Théorème 3.1.

(i) *Si $s - (n/p) \notin \mathbb{N}$ ou $q > 1$, on a $V^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = (\mathcal{V}^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n))'$. En conséquence $V^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ possède la propriété de Fatou.*

(ii) *Si $m \in \mathbb{N}$, $V^{m+(n/p)}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace propre de $(\mathcal{V}^{-m-(n/p)}_{p',\infty}(\mathbb{R}^n))'$ admettant comme supplémentaire l'ensemble des polynômes homogènes de degré m, et $V^{m+(n/p)}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ ne possède pas la propriété de Fatou.*

Preuve. L'entier ν sera défini comme dans la section 3.1, de sorte que les E.B.D. $V^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $(\mathcal{V}^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n))'$ sont des sous-espaces de $\mathcal{S}'_\nu(\mathbb{R}^n)$.

Étape 1. On introduit une fonction positive radiale $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ telle que $\widetilde{\gamma}\gamma = \gamma$. Les opérateurs $\widetilde{Q_j}$ sont définis suivant (1), en remplaçant γ par $\widetilde{\gamma}$. Si $f \in V^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{S}_\nu(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\langle f, g\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle Q_j f, g\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle \widetilde{Q_j} f, Q_j g\rangle,$$

et donc $|\langle f, g\rangle| \leqslant c\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \|g\|_{\dot{B}^{-s}_{p',q'}}$. On obtient ainsi le plongement

$$V^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset \left(\mathcal{V}^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)\right)'. \tag{3}$$

Étape 2. Soit inversement $f \in \mathcal{S}'_\nu(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\forall g \in \mathcal{S}_\nu(\mathbb{R}^n) \quad \left|\langle f, g\rangle\right| \leqslant C\|g\|_{\dot{B}^{-s}_{p',q'}}, \tag{4}$$

pour une certaine constante C. Par le Théorème 2.3, il vient $[f]_\infty \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. De l'inclusion (3), il découle que $u := \sigma_\nu([f]_\infty) - f$ est un polynôme appartenant à $(\mathcal{V}^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n))'$. Posons $u = \sum_{|\alpha|\geqslant\nu} c_\alpha x^\alpha$, en convenant que c_α est nul pour $|\alpha|$ assez grand. L'estimation (4) est satisfaite en remplaçant f par u. On en déduit aisément que

$$\forall t > 0 \quad |c_\alpha| \leqslant Ct^{s-(n/p)-|\alpha|}.$$

On conclut que $c_\alpha = 0$ si $|\alpha| \neq s - (n/p)$. Finalement $u = 0$ sauf peut-être si $s - (n/p) \in \mathbb{N}$ et $q = 1$, ce qui termine la preuve de la première assertion du théorème.

Étape 3. Soit u un polynôme homogène de degré m. Soit $\varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, telle que $\varphi(0) = 1$ et $\psi := u\varphi$. Il vient, pour tout $g \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$ et tout $k \geqslant 1$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi\left(\frac{x}{k}\right)g(x)\,\mathrm{d}x\right| = k^{m+n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)g(kx)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant C(\psi)\|g\|_{\dot{B}^{-m-(n/p)}_{p',\infty}}.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on conclut que $u \in (\mathcal{V}^{-m-(n/p)}_{p',\infty}(\mathbb{R}^n))'$. L'ensemble des polynômes homogènes de degré m est donc un sous-espace de $(\mathcal{V}^{-m-(n/p)}_{p',\infty}(\mathbb{R}^n))'$.

Étape 4. Avec les notations de l'étape précédente, on voit aussitôt que la suite

$$f_k(x) := u(x)\varphi\left(\frac{x}{k}\right)$$

est bornée dans $V^{m+(n/p)}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ et qu'elle converge vers le polynôme u dans $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$. L'espace de Besov réalisé $V^{m+(n/p)}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ ne possède donc pas la propriété de Fatou. $\square$

Remarque 2. On peut se demander si en choisissant pour $\dot{B}^{m+(n/p)}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ une autre réalisation (donc, incidemment, en renonçant à l'invariance par translation de l'espace réalisé) on pourrait obtenir un E.B.D. dans $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$, ayant la propriété de Fatou. Cette question reste ouverte.

Remerciements

Ce travail a été motivé par une question d'Isabelle Gallagher. C'est un plaisir pour l'auteur de la remercier.

Références

[1] G. Bourdaud, Realizations of homogeneous Besov and Lizorkin–Triebel spaces, Math. Nachr., à paraître.
[2] H. Triebel, Theory of Function Spaces, Birkhäuser, Basel, 1983.