C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 233–237

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres/Géométrie algébrique

Classes non ramifiées sur un espace classifiant

Unramified classes over a classifying space

Nguyen Thi Kim Ngan

64/10 Trinh Hoai Duc, Phu Loi, TX Thu Dau Mot, Binh Duong, Viet Nam

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 24 janvier 2011
Accepté après révision le 14 février 2011
Disponible sur Internet le 24 février 2011

Présenté par Jean-Pierre Serre

RÉSUMÉ

Dans cette Note, on établit une formule générale pour la cohomologie non ramifiée des corps d'invariants linéaires sous des groupes finis. Des telles formules sont connues en degré 2 et 3.

ABSTRACT

In this Note, we establish a general formula for the unramified cohomology of fields of linear invariants by finite groups. Such formulas are known in degree 2 and 3.

Abridged English version

Let k be a perfect field and G be an algebraic linear k-group. Here we are interested in the cohomology of "the classifying space" of G. So, in the first part, we give a definition of $F(BG)$ (Definition 1.7) by extending Totaro's construction of "The Chow ring of a classifying space" [9] to a functor F satisfying suitable axioms:

(1) **Homotopy**: If $f : V \to X$ is a vector bundle, then $F(f) : F(V) \to F(X)$ is an isomorphism.
(2) **Purity**: If U is an open subset of X such that $\operatorname{codim}_X(X - U) \geqslant c$ where $c \in \mathbb{N}^*$ is given, then $F(U) \xrightarrow{\sim} F(X)$.

In the second part, we work with cycle modules [8]. Let X be smooth connected over k with function field K and let M be a cycle module: we note

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) := A^0_{\mathrm{nr}}(K/k, M_n) = \bigcap_{A \in \mathcal{P}(K/k)} \operatorname{Ker}\big(M_n(K) \xrightarrow{\partial_A} M_{n-1}(\kappa_A)\big),$$

where $\mathcal{P}(K/k)$ is the set of discrete valuation rings A of rank one of geometric type such that $k \subset A \subset K$ and such that the fraction field $\operatorname{Frac}(A)$ of A is K; ∂_A is the corresponding residue map [8]. In particular, it is Colliot-Thélène and Ojanguren's group in case of étale cohomology with coefficients $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ [1, déf. 1.1.1, p. 143]. By the above, let G be a finite group then $A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n)$ is well-defined. Moreover, let D be a subgroup of G and let $g : \mu_m \to Z_G(D)$ be a morphism where μ_m is the m-th roots of unity and $Z_G(D)$ is the centralizer of D in G, we define residues $\partial^F_{D,g}$ (Definition 2.10) over a field k containing μ_m with m invertible in k, inspired by Peyre's work [7]. Thus if the exponent of G divides m, we get a new group denoted by $A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n)$ (Definition 2.11) by intersecting the kernels of these residues.

Adresse e-mail : ngannguyen@math.jussieu.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.02.012

The main result of this Note is (Theorem 2.12)

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n).$$

From this result, we can recover formulas of Bogomolov in degree 2 [2, Thm. 7.1] and of Peyre in degree 3 [7, Thm. 1].

1. Une construction de $F(BG)$

Soit k un corps parfait.[1]

Définition 1.1. Soient G un k-groupe algébrique linéaire, E une représentation linéaire de G et c un entier positif. On dit que E est une *représentation très fidèle* de G de coniveau $\geqslant c$ s'il existe un ouvert U de E, stable par G tel que le quotient géométrique U/G existe, que $U \to U/G$ soit un G-torseur et que $\operatorname{codim}_E(E - U) \geqslant c$.

On dit que U est un *G-torseur linéaire de coniveau $\geqslant c$* s'il est obtenu de cette manière.

Remarque 1.2. Une telle représentation très fidèle de coniveau aussi grand qu'on veut existe toujours d'après Totaro (cf. [9, rem. 1.4, p. 4] ou [2, lemme 9.2]).

Définition 1.3. Soit $\mathbf{Sm}(k)$ la catégorie des k-schémas lisses, séparés et de type fini. Notons $\mathbf{Sm}_{\mathrm{dom}}(k)$ la catégorie ayant les mêmes objets, mais dont les morphismes sont les morphismes dominants.

Soient F un foncteur de $\mathbf{Sm}_{\mathrm{dom}}(k)$ vers une catégorie $\mathcal{C}$ et c un entier positif. On dit que F est *homotopique et pur en coniveau $\geqslant c$* s'il vérifie les deux axiomes suivants :

(1) **Homotopie** : Si $f : V \to X$ est un fibré vectoriel, alors $F(f) : F(V) \to F(X)$ est un isomorphisme.
(2) **Pureté** : Si U est un ouvert de X tel que $\operatorname{codim}_X(X - U) \geqslant c$, alors $F(U) \xrightarrow{\sim} F(X)$.

Remarque 1.4. Ici le foncteur F est covariant. Dans la suite, on utilisera souvent des foncteurs contravariants. Mais on passe des unx aux autres en remplaçant $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}^{op}$ (catégorie opposée).

Définition 1.5. Soit c un nombre entier positif. Soient U, U' deux k-schémas lisses irréductibles munis d'une action de G. On dit que le couple (U, U') est *admissible de coniveau $\geqslant c$* si

(a) U est l'espace total d'un G-torseur.
(b) U' est un ouvert non vide d'une représentation E' de G tel que le quotient géométrique U'/G existe et que $\operatorname{codim}_{E'}(E' - U') \geqslant c$.

Construction 1.6. *Soit F un foncteur homotopique et pur en coniveau $\geqslant c$. Alors il existe une famille de morphismes canoniques*

$$\varphi_{U,U'} : F(U/G) \to F\bigl(U'/G\bigr)$$

pour tout couple admissible (U, U') de coniveau $\geqslant c$, ayant les propriétés suivantes :

(1) *Réflexivité : si (U,U) est admissible, alors $\varphi_{U,U} = Id_{F(U/G)}$.*
(2) *Symétrie : si (U, U') et (U', U) sont admissibles, alors*

$$\varphi_{U,U'}\varphi_{U',U} = 1$$

et $\varphi_{U,U'}$ est un isomorphisme.
(3) *Transitivité : si (U, U'), (U', U'') et (U, U'') sont admissibles, alors*

$$\varphi_{U',U''}\varphi_{U,U'} = \varphi_{U,U''}.$$

C'est la construction de la double fibration qui remonte à Bogomolov et d'autres (« lemme sans nom », cf. [2, §3.2]).

Définition 1.7. On note $F(BG)$ la limite inductive des $F(U/G)$, où U parcourt des G-torseurs linéaires de coniveau $\geqslant c$, par rapport au système transitif d'isomorphismes $\varphi_{U,U'}$.

Proposition 1.8. *La loi $G \mapsto F(BG)$ définit un foncteur de la catégorie des k-groupes algébriques linéaires vers une catégorie $\mathcal{C}$. Autrement dit :*

[1] Toutes les démonstrations de cette Note se trouvent dans la thèse de l'auteur [6].

– *à tout k-homomorphisme* $f : G \to H$ *est associé un morphisme* $F(Bf) : F(BG) \to F(BH)$ *;*
– *si* $g : H \to K$ *est un autre homomorphisme, on a* $F(B(gf)) = F(Bg)F(Bf)$.

Example 1.9. On sait que les foncteurs suivants sont invariants par homotopie ; j'écris la condition sur c pour qu'ils vérifient la pureté :

(1) Cohomologie étale [4, III, §1, déf. 1.5] : $F = H^i_{\text{ét}}(-, \mu_m^{\otimes j})$, si $m \in k^*$, alors $c > \frac{i+1}{2}$.
(2) Cohomologie motivique [5, déf. 3.4] : $F = H^i(-, \mathbb{Z}(n))$, alors $c > n$. Donc $CH^i(BG) = H^{2i}(BG, \mathbb{Z}(i))$ est défini si $c > i$ [6, prop. 1.6.7].
(3) Cohomologie motivique étale [5, déf. 10.1] : $F = H^i_{\text{ét}}(-, \mathbb{Z}(n))$, alors $c > \sup(n, \frac{i+1}{2})$ [6, prop. 1.6.9].

2. Modules de cycles et classes non ramifiées

Soit M un module de cycles de Rost [8, déf. 2.1, p.337].

Définition 2.1. (Voir [8, p. 338].) Soit X un k-schéma lisse connexe. On note :

$$A^0(X, M_n) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} \operatorname{Ker}\left(M_n\big(k(X)\big) \xrightarrow{\partial_x} \bigoplus_{x \in X^{(1)}} M_{n-1}\big(k(x)\big)\right) \subset M_n\big(k(X)\big).$$

On peut voir $A^0(X, M)$ comme le groupe des éléments non ramifiés sur X.

Remarque 2.2. Le foncteur $A^0(-, M_n)$ est contravariant sur $\mathbf{Sm}(k)$ [8, §12, p. 382], homotopique et pur en coniveau $\geqslant 2$ [6, cor. 2.1.13]. Donc pour G un groupe fini, $A^0(BG, M_n)$ est bien défini (cf. déf. 1.7).

2.1. *Classes non ramifiées*

Définition 2.3.

(1) Pour tout corps de fonctions K sur un corps k, on définit :

$$A^0_{\text{nr}}(K/k, M_n) = \bigcap_{A \in \mathcal{P}(K/k)} \operatorname{Ker}\big(M_n(K) \xrightarrow{\partial_A} M_{n-1}(\kappa_A)\big),$$

où $\mathcal{P}(K/k)$ est l'ensemble des anneaux de valuation discrète A de rang un de type géométrique (cf. [8, p. 328]) de K sur k tels que $K = \operatorname{Frac}(A)$.
(2) Si X/k est un schéma lisse connexe de corps des fonctions K, on note :

$$A^0_{\text{nr}}(X, M_n) = A^0_{\text{nr}}(K/k, M_n).$$

Remarque 2.4.

(1) On a

$$A^0_{\text{nr}}(K/k, M_n) = A^0_{\text{nr}}(X, M_n) \subset A^0(X, M_n).$$

De plus, $A^0_{\text{nr}}(-, M_n)$ est homotopique et pur en coniveau $\geqslant 1$ [6, prop. 2.2.4]. Donc pour G un groupe fini, $A^0_{\text{nr}}(BG, M_n)$ est bien défini (cf. déf. 1.7).
(2) Si $M_n(K) = H^n(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n+i))$, $A^0_{\text{nr}}(K/k, M_n)$ est le groupe de cohomologie non ramifiée de K défini par Colliot-Thélène et Ojanguren [1, déf. 1.1.1, p. 143].

2.2. *Résidus « géométriques »*

Définition 2.5. Soit F un foncteur contravariant de $\mathbf{Sm}_{dom}(k)$ vers la catégorie des groupes abéliens. On définit pour $X \in \mathbf{Sm}_{dom}$ (cf. [10, 3.1]) :

$$F_{-1}(X) = \operatorname{Coker}\big(F\big(X \times \mathbb{A}^1\big) \to F\big(X \times \big(\mathbb{A}^1 - \{0\}\big)\big)\big) \tag{1}$$

et on note

$$\partial^F : F(X \times \mathbb{G}_m) \to F_{-1}(X)$$

le morphisme évident.

Example 2.6. (Voir [6, ex. 2.4.3].)

(1) Si $F = H^i_{\text{ét}}(-, \mu_m^{\otimes j})$, alors $F_{-1} = H^{i-1}_{\text{ét}}(-, \mu_m^{\otimes j-1})$.
(2) Si $F = H^i(-, \mathbb{Z}(n))$, alors $F_{-1} = H^{i-1}(-, \mathbb{Z}(n-1))$.
(3) Si $F = H^i_{\text{ét}}(-, \mathbb{Z}(n))$, alors $F_{-1} = H^{i-1}_{\text{ét}}(-, \mathbb{Z}(n-1))$.
(4) Si $F = A^0(-, M_n)$, alors $F_{-1} = A^0(-, M_{n-1})$.

Lemme 2.7. *Si F est homotopique et pur en coniveau $\geqslant c$, alors F_{-1} l'est aussi. Par conséquent, pour G un k-groupe algébrique linéaire, $F_{-1}(BG)$ est bien défini.*

Définition 2.8 *(B. Kahn).* Soient k un corps et m un entier inversible dans k. Soit X un schéma lisse sur k. Soit F un foncteur homotopique et pur en coniveau $\geqslant c$. Le morphisme résidu

$$\partial_m^F : F(X \times B\mu_m) \to F_{-1}(X) \tag{2}$$

est défini par la composition :

$$F(X \times B\mu_m) \to F(X \times \mathbb{G}_m) \to F_{-1}(X),$$

où $F(B\mu_m) \to F(\mathbb{G}_m/\mu_m) \xleftarrow{\sim} F(\mathbb{G}_m)$ est obtenu par la propiété universelle de $F(BG)$.

Lemme 2.9 *(B. Kahn). Suppposons que F soit défini sur* **Sm**(k). *Le morphisme résidu* (2) *est compatible avec celui considéré par Peyre dans* [7, (13), p. 207].

À partir de maintenant, on suppose que $\mu_m \subset k$ et que m est inversible dans k.

Définition 2.10. Soient G un groupe fini, $I = \mu_m$, $D \subset G$ et $g : I \to Z_G(D)$ un homomorphisme. On note $\varphi : D \times I \to G$ défini par $\varphi(d, i) = d.g(i)$. On définit un morphisme :

$$\partial_{D,g}^F : F(BG) \xrightarrow{\varphi^*} F\big(B(D \times I)\big) \xrightarrow{\sim} F(BD \times BI) \xrightarrow{\partial_m^F} F_{-1}(BD)$$

où ∂_m^F est comme dans (2), $F_{-1}(BD)$ est comme dans le lemme 2.7.

On en arrive à définir un nouveau groupe non ramifié comme suit :

Définition 2.11. Soit G un groupe fini d'exposant divisant m. On définit :

$$A^0_{\text{NR}}(BG, M_n) = \bigcap_{(D \subset G,\ g : I \to Z_G(D))} \operatorname{Ker}\big(A^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} A^0(BD, M_{n-1})\big),$$

où $\partial_{D,g}$ est comme dans la définition 2.10.

2.3. Théorème principal

Théorème 2.12. *On a :*

$$A^0_{\text{NR}}(BG, M_n) = A^0_{\text{nr}}(BG, M_n).$$

De ce théorème, on déduit le théorème de Bogomolov en degré 2 [2, Thm. 7.1] et on retrouve essentiellement le théorème de Peyre en degré 3 [7, Thm. 1]). De plus, on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.13. *Si k est de caractéristique zéro, on a la suite exacte suivante :*

$$\bigoplus_{D \subset G, g : I \to Z_G(D)} H_{-1}\big(BD, \mathbb{Z}(-1)\big) \to H_0(BG, \mathbb{Z}) \to \overline{CH}_0(BG) \to 0 \tag{3}$$

où $H_0(-, \mathbb{Z})$ est l'homologie de Suslin [3, p. 182] *et $\overline{CH}_0(BG) = CH_0(\bar{X})$ avec $\bar{X}$ un modèle fini de « BG » (i.e. il existe U un G-torseur linéaire de coniveau $\geqslant 1$ tel que $U/G \hookrightarrow \bar{X}$ soit une compactification et que $\bar{X}$ soit projectif, lisse).*

Remerciements

Je remercie Bruno Kahn de m'avoir aidée tout au long de la démonstration du théorème principal de cette Note.

Références

[1] J.-L. Colliot-Thélène, M. Ojanguren, Variétés unirationnelles non rationnelles : au delà de l'exemple d'Artin et Mumford, Invent. Math. 97 (1989) 141–158.
[2] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group), in: V. Mehta (Ed.), Proceedings of the International Colloquium on Algebraic Groups and Homogeneous Spaces, Mumbai, 2004, Narosa Publishing House, TIFR Mumbai, 2007, pp. 113–186.
[3] M. Friedlander, V. Voevodsky, Bivariant cycle cohomology, in: Cycles, Transfers and Motivic Cohomology Theories, in: Annals of Mathematics Studies, vol. 143, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000, pp. 188–238.
[4] J.S. Milne, Etale Cohomology, Princeton University Press, 1980.
[5] C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel, Lecture Notes on Motivic Cohomology, Clay Mathematics Monographs, vol. 2, Amer. Math. Soc., 2006.
[6] T.-K.-Ngan Nguyen, Modules de cycles et classes non ramifiées sur un espace classifiant, Thèse de l'Université Paris VII, 2010, http://www.math.jussieu.fr/~ngannguyen/These-NguyenTKN1.pdf.
[7] E. Peyre, Unramified cohomology of degree 3 and Noether's problem, Invent. Math. 171 (2008) 191–225.
[8] M. Rost, Chow groups with coefficients, Doc. Math. 1 (1996) 319–393.
[9] B. Totaro, The Chow ring of a classifying space, in: W. Raskind, C. Weibel (Eds.), Algebraic K-Theory, in: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 67, American Mathematical Society, 1999, pp. 249–281.
[10] V. Voevodsky, Cohomological theory of presheaves with transfers, in: Cycles, Transfers and Motivic Cohomology Theories, in: Annals of Mathematics Studies, vol. 143, Princeton University Press, 2000, pp. 87–137.