

Équations aux dérivées partielles

Modèle asymptotique pour une jonction fleuve–océan

Souleymane Doucouré, Olivier Besson

Université de Neuchâtel institut de mathématiques, rue Emile-Argand, 11, CH-2009 Neuchâtel, Suisse

Reçu le 26 février 2009 ; accepté après révision le 20 mai 2009

Disponible sur Internet le 21 juin 2009

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

On établit un modèle asymptotique non linéaire pour l'étude mathématique de l'écoulement à la jonction entre un fleuve et un océan. Ce modèle est basé sur les équations de Navier–Stokes avec viscosité anisotrope, il est obtenu en faisant tendre la largeur du fleuve et la profondeur des deux bassins vers zéro. *Pour citer cet article : S. Doucouré, O. Besson, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).*

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Asymptotical model of a river–ocean junction. A river–ocean junction mathematical model is presented. It is derived from the nonlinear Navier–Stokes equations, with an anisotropic viscosity tensor. It describes the flow at the junction when the width of the river and the depth of both domains converge to zero. *To cite this article : S. Doucouré, O. Besson, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).*

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

For $0 < \epsilon, \delta \ll 1$, let $W \subset \mathbb{R}^3$ be the bounded domain defined by:

$$\overline{W} = \overline{W}(\epsilon, \delta) = \overline{W}_1 \cup \overline{W}_2, \quad W_1 \cap W_2 = \emptyset, \quad G = \partial W_1 \cap \partial W_2, \quad \partial W = G_s \cup G_b \cup G_d,$$

$W_1 = W_1(\epsilon, \delta) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3; -1 < y_1 < 0, -\delta l_1(y_1) < y_2 < \delta l_1(y_1), -\epsilon h(y_1, \frac{y_2}{\delta}) < y_3 < 0\}$, $W_2 = W_2(\epsilon, \delta) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3; 0 < y_1 < 1, -l_2(y_1) < y_2 < l_2(y_1), -\epsilon h(y_1, y_2) < y_3 < 0\}$, where l_1, l_2, h are positive Lipschitz functions. G_s is surface of the domain (the reference plane), $\partial W \setminus G_s = G_b \cup G_d$ where G_b the bottom of the domain, and G_d is the part of the boundary where some Dirichlet boundary conditions are given. For a diagonal anisotropic viscosity tensor $\nu = \text{diag}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, with $\nu_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, consider the Cauchy stress tensor

$$\sigma(\nu, p) = -pI + \nabla v \cdot \nu + \nu \cdot \nabla v^t, \quad (1)$$

so

$$\sigma_{ij}(\nu, p) = -p\delta_{ij} + \nu_j \partial_j v_i + \nu_i \partial_i v_j = -p\delta_{ij} + e_{ij}(\nu), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Adresses e-mail : souleymane.doucoure@unine.ch (S. Doucouré), olivier.besson@unine.ch (O. Besson).

Let be the following Navier–Stokes coupling problem describing a fluid–fluid interaction between the shallow and thin domain W_1 and the shallow domain W_2 without overlapping: Find (v^1, v^2, p^1, p^2) such that:

$$v \cdot \nabla v - \nabla \cdot \sigma(v, p) = f \quad \text{in } W, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{in } W, \quad (4)$$

$$v \cdot n = (\sigma \cdot n) \cdot \tau = 0 \quad \text{on } G_s, \quad (5)$$

$$v \cdot n = \sigma \cdot n = 0 \quad \text{on } G_b, \quad (6)$$

$$v = 0 \quad \text{on } \Gamma_d. \quad (7)$$

Using the domain decomposition method (DDM) [7], the interface condition on Γ is given by:

$$[\sigma \cdot n] = [v] = 0 \quad \text{on } G \quad (8)$$

where $[\varphi] = \varphi|_{W_1} - \varphi|_{W_2}$ is the jump of φ across G . Let us assume that the interface G is vertical, and let $n = (1, 0, 0)$ be the unit normal vector to G outward to W_1 (directed inside of W_2). Let us also assume that the surface G_s is a bounded domain in \mathbb{R}^2 , corresponding to the equation $y_3 = 0$. In the sequel the Einstein summation convention is used.

The aim of this Note is to study the above problem when $(\epsilon, \delta) \rightarrow 0$, and obtain a limit problem. Let us make the following change of variables and functions: In W_k set $(x_1, x_2, x_3) = (y_1, \delta^{k-2}y_2, \epsilon^{-1}y_3)$, and $(u_1^k, u_2^k, u_3^k) = (v_1^k, \delta^{k-2}v_2^k, \epsilon^{-1}v_3^k)$. Then the renormalized problem is defined in $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$ such that $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\Omega_k = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; (x_1, x_2) \in \Gamma_s^k, -h(x_1, x_2) < x_3 < 0\}$, $\partial\Omega_k = \Gamma_s^k \cup \Gamma_b^k \cup \Gamma_d^k \cup \Gamma$.

A priori estimations of the viscous, convective, and pressure terms are given. Then, using some compact embedding results, it is shown that the following limit problem admits a weak solution. In Ω_1

$$u \cdot \nabla u_1 - \partial_j e_{1j}(u) + \partial_1 p = f_1, \quad \partial_2 p = 0, \quad \partial_3 p = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega_1, \quad (9)$$

$$u_3 = \mu_1 \partial_3 u_1 = 0 \quad \text{on } \Gamma_s, \quad (10)$$

$$u \cdot n = \tilde{\sigma}^1 \cdot n = 0 \quad \text{on } \Gamma_b, \quad (11)$$

$$u_1 = u_2 n_2 + u_3 n_3 = 0 \quad \text{on } \Gamma_d, \quad (12)$$

where $\tilde{\sigma}^1 \cdot n = (-pn_1 + e_{11}n_1 + e_{12}n_2 + e_{13}n_3, -pn_2, -pn_3)^t$. In Ω_2

$$u \cdot \nabla u_i - \partial_j e_{ij}(u) + \partial_i p = f_i, \quad i = 1, 2, \quad \partial_3 p = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega_2, \quad (13)$$

$$u_3 = \mu_1 \partial_3 u_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{on } \Gamma_s, \quad (14)$$

$$u \cdot n = \tilde{\sigma}^2 \cdot n = 0 \quad \text{on } \Gamma_b, \quad (15)$$

$$u_1 = u_2 = u_3 n_3 = 0 \quad \text{on } \Gamma_d, \quad (16)$$

where $(\tilde{\sigma}^2 \cdot n) = (-pn_1 + e_{11}n_1 + e_{12}n_2 + e_{13}n_3, e_{21}n_1 - pn_2 + e_{22}n_2 + e_{23}n_3, -pn_3)^t$, and finally

$$[u_1] = u_2^2 = 0, \quad [-p + e_{11}(u)] = 0, \quad e_{21}(u^2) = 0 \quad \text{on } \Gamma. \quad (17)$$

This model describes the 1D–2D flow at the junction between the domains Ω_1 , and Ω_2 (see Fig. 1).

1. Introduction

Les techniques asymptotiques sont très courantes dans les études océanographiques et météorologiques. Dans [3,4], le modèle hydrostatique est établi pour les équations de Navier–Stokes, en tenant compte de la faible hauteur du bassin. Dans ce travail, nous étudions l'écoulement de deux fluides incompressibles miscibles et leur interaction au niveau de la jonction entre deux bassins peu profonds dont l'un est mince (par exemple l'embouchure d'un fleuve dans un océan). En plus de la faible profondeur des deux domaines, nous supposons le fleuve de largeur négligeable devant sa longueur (voir Fig. 1). Notre but est d'étudier le comportement des équations de Navier–Stokes lorsque la hauteur des deux bassins et la largeur du fleuve tendent vers 0, nous obtenons des conditions d'interface pouvant servir à un algorithme itératif dans la résolution du problème couplé. Ainsi le modèle tridimensionnel obtenu traduit la continuité d'un écoulement en mouvement unidirectionnel dans le fleuve et plan dans l'océan. Nous utilisons comme dans les

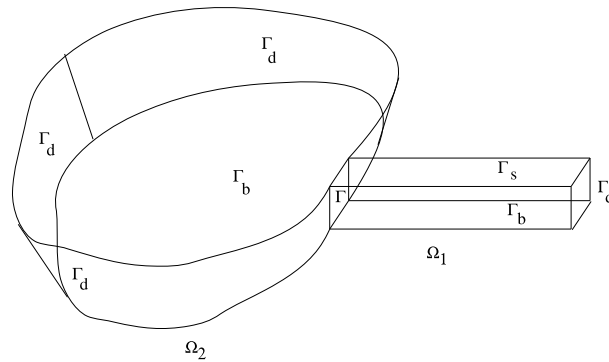


Fig. 1. Jonction entre deux bassins.

articles précipités une viscosité anisotrope. Dans cette note, nous étudions le tenseur de Cauchy (1), pour un tenseur de viscosité diagonal anisotrope, nécessaire pour traduire l'équilibre à l'interface entre les deux bassins.

Pour $0 < \epsilon, \delta \ll 1$ fixés, on se donne un domaine borné $W(\epsilon, \delta)$ dans \mathbb{R}^3 tel que

$$\overline{W} = \overline{W}(\epsilon, \delta) = \overline{W}_1 \cup \overline{W}_2, \quad W_1 \cap W_2 = \emptyset, \quad G = \partial W_1 \cap \partial W_2, \quad \partial W = G_s \cup G_b \cup G_d,$$

où

$$W_k = W_k(\epsilon, \delta) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3; (y_1, y_2) \in G_s^k, -\epsilon h(y_1, \delta^{k-2} y_2) < y_3 < 0\},$$

et

$$G_s^1 = \{(y_1, y_2, 0); -1 < y_1 < 0, -\delta l_1(y_1) < y_2 < \delta l_1(y_1)\},$$

$$G_s^2 = \{(y_1, y_2, 0); 0 < y_1 < 1, -l_2(y_1) < y_2 < l_2(y_1)\},$$

représentent la surface des bassins, $\partial W \setminus G_s = G_b \cup G_d$, où G_b représente le fond du bassin et G_d une partie de ∂W sur laquelle des conditions de Dirichlet sont imposées. On suppose que les fonctions l_1, l_2, h sont positives, lipschitziennes, ainsi $\partial W_1, \partial W_2$ sont lipschitziennes. De plus on suppose que l'interface G est verticale. On note $n = (1, 0, 0)$ la normale unité à G , extérieure à W_1 et dirigée vers l'intérieur de W_2 .

Enfin en définissant $\mu^k = \text{diag}(\mu_1, \delta^{2(2-k)} \mu_1, \epsilon^2 \mu_1)$, $\mu_1 > 0$, comme le tenseur de viscosité anisotrope associé à W_k , on considère le système de Navier–Stokes couplé (3)–(8), où $f \in H^{-1}(W_k)^3$, et $(v, p)|_{W_k} = (v^k, p^k)$ sont la vitesse et la pression dans W_k .

2. Problème renormalisé

Dans la suite on utilise la convention de sommation d'Einstein, et $k \in \{1, 2\}$. Considérons les changements de variables et de fonctions suivants. Sur $W_1^{\epsilon, \delta}$ on pose $(x_1, x_2, x_3) = (y_1, \frac{y_2}{\delta}, \frac{y_3}{\epsilon})$, et $(u_1, u_2, u_3) = (v_1, \frac{v_2}{\delta}, \frac{v_3}{\epsilon})$. Sur $W_2^{\epsilon, \delta}$ on pose $(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, \frac{y_3}{\epsilon})$, et $(u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, \frac{v_3}{\epsilon})$. Le problème (3)–(8) devient :

$$u^k \cdot \nabla u_1^k - \partial_j e_{1j}(u^k) + \partial_1 p^k = f_1^k, \quad \text{dans } \Omega_k, \tag{18}$$

$$\delta^{2(2-k)}(u^k \cdot \nabla u_2^k - \partial_j e_{2j}(u^k)) + \partial_2 p^k = \delta^{2-k} f_2^k, \quad \text{dans } \Omega_k, \tag{19}$$

$$\epsilon^2(u^k \cdot \nabla u_3^k - \partial_j e_{3j}(u^k)) + \partial_3 p^k = \epsilon f_3^k, \quad \text{dans } \Omega_k, \tag{20}$$

$$\nabla \cdot u^k = 0, \quad \text{dans } \Omega_k, \tag{21}$$

$$u^k \cdot n^k = \sigma(u^k, p^k) \cdot n^k = 0, \quad \text{sur } \Gamma_b^k, \tag{22}$$

$$u_3^k = \mu_1 \partial_3 u_1^k = \delta^{2-k} \mu_1 \partial_3 u_2^k = 0, \quad \text{sur } \Gamma_s^k, \tag{23}$$

$$u^k = 0, \quad \text{sur } \Gamma_d^k, \tag{24}$$

$$[u_1] = 0, \quad \delta u_2^1 = u_2^2, \quad \epsilon [u_3] = 0, \quad \text{sur } \Gamma, \tag{25}$$

$$[-p + e_{11}(u)] = 0, \quad \delta e_{21}(u^1) = e_{21}(u^2), \quad [\epsilon e_{31}(u)] = 0, \quad \text{sur } \Gamma, \tag{26}$$

avec $e_{ij}(u) = \mu_1(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$, $\Omega_k = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; (x_1, x_2) \in \Gamma_s^k, -h(x_1, x_2) < x_3 < 0\}$, et $\partial\Omega_k = \Gamma_s^k \cup \Gamma_b^k \cup \Gamma_d^k \cup \Gamma$, $k = 1, 2$. On a noté $[\varphi] = \varphi|_{\Omega_1} - \varphi|_{\Omega_2}$ le saut de φ à travers Γ . Intuitivement lorsque $(\epsilon, \delta) \rightarrow 0$ dans (18)–(26) on déduit le modèle limite (9)–(17).

3. Espaces fonctionnels et formulation faible globale du problème renormalisé

Définissons les espaces fonctionnels

$$V^k = H_{\Gamma_d^k}^1(\Omega_k)^2 \times H_{\Gamma_s^k \cup \Gamma_d^k}^1(\Omega_k),$$

avec (voir [1])

$$H_{\Sigma}^1(\Omega_k) = \{\varphi \in H^1(\Omega_k), \varphi = 0 \text{ sur } \Sigma\},$$

et posons $V = \{\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in V^1 \times V^2; [\varphi_1] = [\varphi_3] = 0 \text{ sur } \Gamma; \delta\varphi_{2|_{\Gamma}}^1 = \varphi_{2|_{\Gamma}}^2; (\varphi \cdot n)|_{\Gamma_b} = 0\}$, $Q = L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$, muni de la norme produit. Considérons les fonctionnelles

$$D(u, v, \varphi) = \sum_{i=1}^2 d(u^i, v_1^i, \varphi_1^i) + \delta^2 d(u^1, v_2^1, \varphi_2^1) + d(u^2, v_2^2, \varphi_2^2) + \epsilon^2 \sum_{i=1}^2 d(u^i, v_3^i, \varphi_3^i),$$

$$B(v, q) = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 b_i(v_i^k, q^k);$$

$$L(v) = \sum_{i=1}^2 l_1(v_1^i) + \delta(l_2(v_2^1)) + l_2(v_2^2) + \epsilon \sum_{i=1}^2 l_3(v_3^i),$$

$$T(v, \varphi) = \sum_{i=1}^2 T_1(v^i, \varphi^i) + \delta^2 T_2(v^1, \varphi^1) + T_2(v^2, \varphi^2) + \epsilon^2 \sum_{i=1}^2 T_3(v^i, \varphi^i),$$

avec

$$d(u^k, v_i^k, \varphi_i^k) = - \int_{\Omega_k} (u^k \cdot \nabla \varphi_i^k) v_i^k, \quad T_i(v^k, \varphi^k) = \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega_k} e_{ij}(v^k) \cdot \partial_j \varphi_i^k,$$

$$b_i(v_i^k, q^k) = - \int_{\Omega_k} \partial_i v_i^k \cdot q^k, \quad l_i(v_i^k) = \int_{\Omega_k} f_i^k v_i^k, \quad i = 1, 2, 3.$$

La formulation faible de (18)–(26) est donnée par : Etant donné $f \in H^{-1}(\Omega)^3$, trouver $(u, p) \in V \times Q$, vérifiant,

$$D(u, u, \varphi) + T(u, \varphi) + B(\varphi, p) = L(\varphi), \quad (27)$$

$$B(u, q) = 0, \quad (28)$$

pour tout $(\varphi, q) \in V \times Q$. Comme dans [5], on prouve que (27)–(28) admet au moins une solution $(u, p) \in V \times Q$.

4. Estimation des termes vitesses et pressions

On déduit de la formulation faible précédente les estimations suivantes (C étant une constante flottante au gré des courants et des équations et est indépendante de ϵ et de δ) :

Lemme 4.1. Pour $j = 1, 2, 3$ on a

$$\begin{aligned} & \|e_{1j}(u^k)\|_{L^2(\Omega_k)} + \delta^{2-k} \|e_{2j}(u^k)\|_{L^2(\Omega_k)} + \epsilon \|e_{3j}(u^k)\|_{L^2(\Omega_k)} + \|u_1^k\|_{H^1(\Omega_k)} + \delta^{2-k} \|u_2^k\|_{H^1(\Omega_k)} \\ & + \epsilon \|u_3^k\|_{H^1(\Omega_k)} \leq C. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Poincaré–Friedrich puis celle de Gagliardo [6], nous obtenons des estimations de la vitesse dans $L^p(\Omega_k)$.

Lemme 4.2 (Estimations dans $L^p(\Omega_k)$).

$$\begin{aligned} & \|u_1^k\|_{L^2(\Omega_k)} + \|u_2^k\|_{L^2(\Omega_k)} + \|u_3^k\|_{L^2(\Omega_k)} + \|u_1^1\|_{L^6(\Omega_1)} + \delta^{\frac{2}{3}} \|u_2^1\|_{L^6(\Omega_1)} + \epsilon^{\frac{2}{3}} \|u_3^1\|_{L^6(\Omega_1)} \\ & + \|u_1^2\|_{L^6(\Omega_2)} + \|u_2^2\|_{L^6(\Omega_2)} + \|u_3^2\|_{L^6(\Omega_2)} + \|u_1^1\|_{L^3(\Omega_1)} + \delta^{\frac{2}{3}} \|u_2^1\|_{L^3(\Omega_1)} + \epsilon^{\frac{2}{3}} \|u_3^1\|_{L^3(\Omega_1)} \\ & + \|u_1^2\|_{L^3(\Omega_2)} + \|u_2^2\|_{L^3(\Omega_2)} + \|u_3^2\|_{L^3(\Omega_2)} \leq C. \end{aligned}$$

En utilisant l'incompressibilité, on peut démontrer les estimations des termes de convection dans $H^{-1}(\Omega_k)$ et $W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_k)$

Lemme 4.3 (Estimations dans $H^{-1}(\Omega_k)$).

$$\begin{aligned} & \|u^1 \cdot \nabla u_1^1\|_{H^{-1}(\Omega_1)} + \|u^2 \cdot \nabla u_1^2\|_{H^{-1}(\Omega_2)} + \|u^2 \cdot \nabla u_2^2\|_{H^{-1}(\Omega_2)} + \|u^2 \cdot \nabla u_3^2\|_{H^{-1}(\Omega_2)} \leq C, \\ & \delta^{\frac{2}{3}} \|u^1 \cdot \nabla u_2^1\|_{H^{-1}(\Omega_1)} + \epsilon^{\frac{2}{3}} \|u^1 \cdot \nabla u_3^1\|_{H^{-1}(\Omega_1)} \leq C(1 + \epsilon^{-\frac{2}{3}} + \delta^{-\frac{2}{3}}). \end{aligned}$$

Lemme 4.4 (Estimations dans $W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_k)$).

$$\|u^1 \cdot \nabla u_1^1\|_{W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_1)} + \delta^{\frac{2}{3}} \|u^1 \cdot \nabla u_2^1\|_{W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_1)} + \epsilon^{\frac{2}{3}} \|u^1 \cdot \nabla u_3^1\|_{W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_1)} + \|u^2 \cdot \nabla u^2\|_{(W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_2))^3} \leq C.$$

Par les résultats précédents, on obtient le résultat suivant en utilisant [2,5].

Proposition 4.5. La pression $p = (p^1, p^2)$ est bornée dans $L^{\frac{3}{2}}(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ uniformément en (ϵ, δ) . De plus, si $\epsilon = \delta$ alors p est bornée dans Q , uniformément en ϵ .

5. Problème limite

Introduisons d'abord les espaces anisotropes suivants [4,3]

$$\begin{aligned} H(\partial_i, \Omega_k, \Sigma) &= \{\varphi \in L^2(\Omega_k), \partial_i \varphi \in L^2(\Omega_k), \varphi \cdot n_{i\Sigma} = 0\}, \\ H(\text{div}, \Omega_k, \Sigma) &= \{\varphi \in L^2(\Omega_k)^3, \text{div} \varphi \in L^2(\Omega_k), \varphi \cdot n_{i\Sigma} = 0\}. \end{aligned}$$

Considérons les sous-espaces de Hilbert de $H(\text{div}, \Omega)$

$$\begin{aligned} Z^1 &= \{\varphi^1 \in H_{\Gamma_d}^1(\Omega_1) \times H(\partial_2, \Omega_1, \Gamma_d) \times H(\partial_3, \Omega_1, \Gamma_d \cup \Gamma_s); \\ & \varphi^1 \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_b; \nabla \cdot \varphi^1 \in L^3(\Omega_1); \partial_2 \varphi_1^1, \partial_3 \varphi_1^1 \in L^3(\Omega_1)\}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$Z^2 = \{\varphi^2 \in H_{\Gamma_d}^1(\Omega_2)^2 \times H(\partial_3, \Omega_2, \Gamma_s \cup \Gamma_d); \varphi^2 \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_b\}, \tag{30}$$

$$Y_0^1 = \{\varphi^1 \in (H_{\Gamma_d}^1(\Omega_1) \times L^2(\Omega_1)^2) \cap H(\text{div}, \Omega_1, \Gamma_d \cup \Gamma_b \cup \Gamma_s); e_{1j}(\varphi^1) \in L^2(\Omega_1), j = 2, 3\}, \tag{31}$$

$$\begin{aligned} Y_0^2 &= \{\varphi^2 \in H_{\Gamma_d}^1(\Omega_2) \times H_{\Gamma_d \cup \Gamma}^1(\Omega_2) \times H(\partial_3, \Omega_2, \Gamma_d \cup \Gamma_s); e_{i3}(\varphi^2) \in L^2(\Omega_2), i = 1, 2; \\ & \varphi^2 \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_d \cup \Gamma_b \cup \Gamma_s\}, \end{aligned} \tag{32}$$

$$Y^1 = \{\varphi^1 \in Y_0^1; \nabla \cdot \varphi^1 = 0\}, \quad Y^2 = \{\varphi^2 \in Y_0^2; \nabla \cdot \varphi^2 = 0\}, \tag{33}$$

$$Y = \{\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in Y^1 \times Y^2; [\varphi_1] = 0 \text{ sur } \Gamma\}, \tag{34}$$

$$Z = \{\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in Z^1 \times Z^2; [\varphi_1] = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \tag{35}$$

Des résultats précédents nous obtenons que la solution $(u, p)_{\epsilon, \delta}$ du problème renormalisé (18)–(26) est bornée dans $(Y_0^1 \times Y_0^2) \times (L^{\frac{3}{2}}(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2))$. On peut donc supposer que lorsque $(\epsilon, \delta) \rightarrow 0$, $u_{\epsilon, \delta}$ converge faiblement vers u

dans Y , que $p_{\epsilon,\delta}$ converge faiblement vers p dans $L^{\frac{3}{2}}(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$, et $(u_{1,\epsilon,\delta}^1, u_{1,\epsilon,\delta}^2, u_{2,\epsilon,\delta}^2)$ est fortement convergent vers (u_1^1, u_1^2, u_2^2) dans $L^4(\Omega_1) \times (L^4(\Omega_2))^2$. Finalement, on déduit que le problème limite est donné par

$$\begin{aligned} d(u^1, u_1^1, \varphi_1^1) + d(u^2, u_1^2, \varphi_1^2) + d(u^2, u_2^2, \varphi_2^2) + T_1(u^1, \varphi^1) + T_1(u^2, \varphi^2) + T_2(u^2, \varphi^2) + B(\varphi, p) \\ = l_1(\varphi_1^1) + l_1(\varphi_1^2) + l_2(\varphi_2^2), \quad \forall (\varphi^1, \varphi^2) \in Z. \end{aligned} \quad (36)$$

Nous venons donc de démontrer le

Théorème 5.1. *Étant donnée $f \in H^{-1}(\Omega)^3$, le problème limite (9)–(17) est équivalent à (36) et admet une solution faible $(u, p) \in Y \times (L^{\frac{3}{2}}(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2))$. De plus cette solution est la limite lorsque $(\epsilon, \delta) \rightarrow 0$ d'une solution du problème renormalisé.*

Références

- [1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] C. Amrouche, V. Girault, Propriétés fonctionnelles d'opérateurs. Applications au problèmes de Stokes en dimension quelconque, Preprint, Université P. et M. Curie, Laboratoire d'analyse numérique, 1990.
- [3] P. Azerad, Analyse des équations de Navier–Stokes en bassin peu profond et de l'équation de transport, Thèse de doctorat, Université de neuchâtel, 1996.
- [4] O. Besson, M.R. Laydi, Some estimates for the anisotropic Navier–Stokes equations and for the hydrostatic approximation, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. 26 (1992) 855–865.
- [5] V. Girault, P.A. Raviart, Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations, Theory and Algorithms, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [6] J. Nečas, Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson, Paris, 1967.
- [7] A. Quarteroni, A. Valli, Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Oxford Science Publications, Oxford, 1999.