



## Problèmes mathématiques de la mécanique

# Modélisation du trafic autoroutier au second ordre

Jean Patrick Lebacque, Xavier Louis, Salim Mammar, Bernard Schnetzler,  
Habib Haj-Salem

*Paris Est, Inrets, Gretia, 94114 Arcueil, France*

Reçu le 25 février 2008 ; accepté après révision le 23 septembre 2008

Présenté par Olivier Pironneau

---

### Résumé

Nous considérons un modèle de trafic autoroutier au second ordre que nous bâtissons à partir de considérations comportementales simples. L'analyse du problème de Riemann afférent sera menée. Dans la seconde partie nous développerons la définition d'une solution obtenue à la limite, issue d'une famille de problèmes perturbés rendant le problème de Riemann toujours solvable. Nous constaterons enfin les conséquences de cette extension en terme de limite de compressibilité et de conservation de quantités comportementales. **Pour citer cet article :** *J.P. Lebacque et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**Modelling of motorway traffic to second order.** In the first part of the Note, we introduce a second order traffic flow model, which we derive from simple physical considerations. We consider the related Riemann problem and solve it in any cases. In the second part, we examine what is required for the construction of proper analytical solutions to be always possible, and what the extended model implies in term of incompressibility, and conservation of physically meaningful quantities. **To cite this article:** *J.P. Lebacque et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

---

## 1. Introduction

Le modèle de premier ordre dit « d'équilibre » ou « LWR » (Lighthill, Whitham, Richards [7]) fixe la vitesse du flot autoroutier comme fonction décroissante de sa densité, constituant ainsi une « loi d'état » du trafic. Il fait alors évoluer en temps et espace cette dernière par une simple équation scalaire. Les modèles de trafic « au **second ordre** » font évoluer **indépendamment** densité et vitesse, variables caractérisant leur conceptualisation macroscopique et continue du trafic. Après leur remise en cause [3], ils ont été modifiés et repopularisés par Zhang [10], Aw et Rascle [1] et Lebacque et son équipe [8,5,6]. On rappelle ainsi (voir [3]) que le comportement des variables du trafic autoroutier monovoie est fortement anisotrope : les véhicules se déplacent dans un sens donné et ne sont attirés que par le vide aval et pas par le vide amont. Le modèle étudié ici prend en charge ces aspects.

---

Adresses e-mail : [lebacque@inrets.fr](mailto:lebacque@inrets.fr) (J.P. Lebacque), [xavier.louis@inrets.fr](mailto:xavier.louis@inrets.fr) (X. Louis), [Salim.Mammar@equipement.gouv.fr](mailto:Salim.Mammar@equipement.gouv.fr) (S. Mammar), [schnetzler@inrets.fr](mailto:schnetzler@inrets.fr) (B. Schnetzler), [haj-saleem@inrets.fr](mailto:haj-saleem@inrets.fr) (H. Haj-Salem).

**Théorème.** *Un modèle de trafic au second ordre fourni par le système d'équations suivant*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho v = 0, \\ \partial_t y + \partial_x y v = 0, \end{cases} \quad (1)$$

avec  $y = \rho I = \rho(v - V_e(\rho))$  où  $\rho$  est la densité,  $v$  la vitesse,  $I$  la vitesse relative,  $y$  le débit relatif, muni d'un prolongement régulier du diagramme fondamental,  $V_e(\rho)$ , admet **une unique solution entropique** (au sens des inégalités de Lax). Sa solution respecte l'anisotropie,  $q$  une densité réaliste, une vitesse bornée par les vitesses initiales et permet de retrouver la nécessaire limite de compressibilité inhérente à la propagation du trafic.

Voir aussi [4] pour une analyse générique de ces systèmes  $2 \times 2$  et le très complet travail [2] sur un modèle très proche intégrant l'analyse de l'ajout d'un terme source de relaxation.

## 2. Création et analyse du modèle

Le domaine d'évolution considéré est :

$$\Omega = \{W = (\rho, v) \in \mathbb{R}_+^2 \text{ tel que } \rho \leq \rho_{\max}\} \quad (2)$$

et la loi de conservation des véhicules est

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho v = 0. \quad (3)$$

Soit  $I \in \mathbb{R}$  une caractéristique liée à un ensemble de conducteurs, choisie ici tel que  $I = v - V_e$  où on a intégré un comportement moyen sur un intervalle réel suffisamment long pour que l'approximation continue ait un sens. On suppose que cet ensemble désire maintenir cette caractéristique sur sa trajectoire  $X(t)$ . D'où  $\frac{d}{dt} I(t, X(t)) = 0$  soit encore  $\frac{\partial I}{\partial t} + v \frac{\partial I}{\partial x} = 0$ . Pour obtenir une relation conservative on multiplie cette équation par  $\rho$  et (3) par  $I$  :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho v = 0, \\ \partial_t \rho I + \partial_x \rho I v = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Muni d'un diagramme fondamental  $C^1$  concave  $Q_e(\rho) = \rho V_e(\rho)$ , où  $Q_e(\rho_{\max}) = Q_e(0) = 0$ , et  $Q'_e(\rho_{\max})$  est la valeur maximale de remontée de congestion observée sur les réseaux autoroutiers ( $-W_{\max}$ ) :

$$Q_e(\rho) = \begin{cases} \rho(V_{\max} - \frac{\rho - \alpha}{\rho_{\text{crit}}}) & \text{si } \rho \leq \rho_{\text{crit}}, \\ Q_{\max} - B \frac{\rho - \rho_{\text{crit}}}{\rho_{\max} - \rho_{\text{crit}}} - C \left( \frac{\rho - \rho_{\text{crit}}}{\rho_{\max} - \rho_{\text{crit}}} \right)^2 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5)$$

où  $\alpha = V_{\max} - \frac{Q_{\max}}{\rho_{\text{crit}}} > 0$ ,  $B = 2Q_{\max} - W_{\max}(\rho_{\max} - \rho_{\text{crit}})$  et  $C = Q_{\max} - B$  avec  $B$  et  $C > 0$ .<sup>1</sup> On ajoute un raccord  $C^1$  via un polynôme d'ordre trois (quatre conditions de raccord pour être  $C^1$ ) concave sur  $[\rho_c - \delta, \rho_c + \delta]$  ( $1 \gg \delta > 0$ ) (voir Fig. 1). On montre que ce système est strictement hyperbolique si  $\rho > 0$ , doté des valeurs et vecteurs propres :  $\lambda_1(W) = v + \rho V'_e$  et  $\lambda_2(W) = v$  et  $r^1(W) = (\rho, y)$  et  $r^2(W) = (\rho, y - \rho^2 V'_e(\rho))$ . Le premier champ est « vraiment non linéaire » (VNL) car  $\nabla \lambda_1(W) r^1(W) = \rho(Q_e)'' \neq 0$  du fait de la concavité, tandis que le second est « linéairement dégénéré » (LD)  $\nabla \lambda_2(W) r^2(W) = 0, \forall W \in \Omega$ .

## 3. Solution analytique définie à la limite

Résoudre le problème de Riemann (voir [9]) revient à connecter deux états « gauche-droit » constants ( $W_g, W_d$ ) en parcourant d'abord une courbe d'états reliés à  $W_g$  via un choc ou une détente et à connecter l'état constant « central » (noté  $W_1$ , ici) à  $W_d$  via une discontinuité de contact. Il est indispensable d'exiger que  $V_e = \frac{Q_e}{\rho}$  soit décroissante (un nombre croissant de véhicule devant ralentir la vitesse d'équilibre) ce qui assure la majoration de  $\lambda_1(W)$  par  $\lambda_2(W)$  dans  $\Omega$ . On déduit des relations de 1-choc que  $[\frac{y}{\rho}] = 0$ . Les invariants de Riemann fournissent exactement la même paramétrisation (le système est dit « de Temple » voir [2]). La concavité de la fonction de flux  $Q_e(\rho)$  permet de discerner ces deux demi-courbes. Des inégalités de Lax :

$$\lambda_1(W_g) > s > \lambda_1(W_1), \quad (6)$$

<sup>1</sup> E.g.  $Q_{\max} = 2200$  veh/h ;  $\rho_{\text{crit}} = 32$  veh/km ;  $\rho_{\max} = 200$  vh/km ;  $V_{\max} = 130$  km/h ;  $W_{\max} = 17$  km/h.

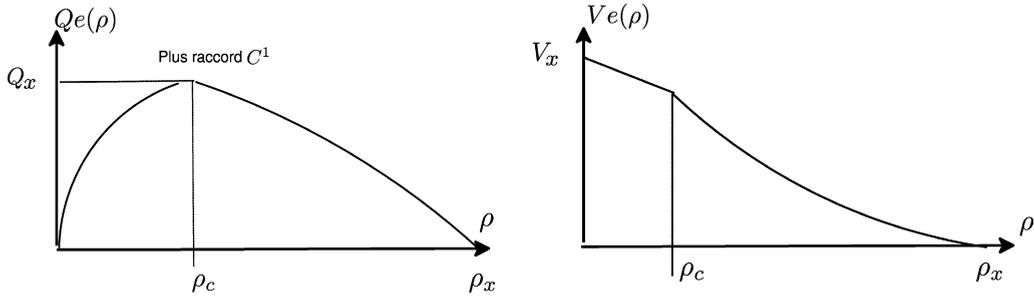


Fig. 1.  $Q_e(\rho)$  et  $V_e(\rho)$ .

on tire  $v_g + \rho_g V_e'(\rho_g) > v_1 + \rho_1 V_e'(\rho_1)$ . Puisque  $\frac{y_1}{\rho_1} = \frac{y_g}{\rho_g}$ , on a  $v_1 + \rho_1 V_e'(\rho_1) = v_g - V_e(\rho_g) + V_e(\rho_1) + \rho_1 V_e'(\rho_1)$  d'où  $V_e(\rho_g) + \rho_g V_e'(\rho_g) > V_e(\rho_1) + \rho_1 V_e'(\rho_1)$ . La fonction  $V_e(\rho) + \rho V_e'(\rho)$  est la dérivée de  $Q_e(\rho)$  qui est concave ( $Q_e''(\rho) < 0$ ). Ainsi à travers un choc entropique, on obtient  $\rho_1 \geq \rho_g$ .

On a donc à travers la première onde  $v_g - V_e(\rho_g) = v_1 - V_e(\rho_1)$  et comme  $\lambda_2(W)$  est constant à travers la deuxième onde on a  $V_e(\rho_1) = v_d - v_g + V_e(\rho_g) = v_d - I_g$ . La résolution revient à inverser  $V_e$  qui est monotone. Cependant la présence de  $I_g$  décale cette fonction et interdit dans deux cas de relier deux états initiaux quelconques de  $\Omega$ . On peut interpréter le premier cas  $v_d > V_{\max} + I_g$  comme un critère **d'apparition du vide**, et l'autre cas  $v_d < I_g$ , comme **la limite de compressibilité** du modèle. Pour traiter le cas où  $v_d > V_{\max} + I_g$ , on peut considérer pour tout  $\epsilon > 0$  la famille de problèmes de Riemann suivants :

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\epsilon + \partial_x \rho^\epsilon \left( \frac{y^\epsilon}{\rho^\epsilon} + V_e^\epsilon(\rho^\epsilon) \right) = 0, \\ \partial_t y^\epsilon + \partial_x \left( \left( \frac{y^\epsilon}{\rho^\epsilon} + V_e^\epsilon(\rho^\epsilon) \right) y^\epsilon \right) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

de solution  $W^\epsilon = (\rho^\epsilon, y^\epsilon)$ , avec un diagramme fondamental étendu  $C^1$ ,

$$V_e^\epsilon(\rho) = \begin{cases} V_e(\rho) & \text{si } \rho_{\max} \geq \rho > \epsilon, \\ -V_e(\rho) + 2V_e(\epsilon) - 2V_e'(\epsilon)\epsilon \log\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{8}$$

La fonction proposée tend vers  $V_e$  simplement (pp) quand  $\epsilon \rightarrow 0$  et vérifie, quelque soit  $\epsilon > 0$ , les propriétés (9), (10), (12) essentielles à la modélisation, et (11) au croisement des deux ondes portant les états admissibles :

$$V_e^\epsilon(\rho) \geq 0, \tag{9}$$

$$V_e^{\epsilon'}(\rho) < 0, \tag{10}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_e^\epsilon(\rho) = +\infty, \tag{11}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} (Q_e(\rho) - \rho V_e^\epsilon(\rho)) = 0. \tag{12}$$

On remarque en outre que la fonction  $V_e^\epsilon$  n'est pas définie en  $\rho = 0$  et que si on s'intéresse au cas d'un état initial gauche à densité nulle, on doit aussi considérer des CI elles aussi dépendantes de  $\epsilon$ , i.e. remplacer  $(0, v_g)$  par  $(\epsilon, v_g)$ .

On a alors une solution définie pour tout  $\epsilon > 0$  dont l'état constant intermédiaire tend géométriquement vers l'intersection limite. La détente s'effectue alors dans le cadre *usuel* d'un système de loi de conservation doté d'une fonction flux *régulière* avec lorsque  $v_d > V_{\max} + I_g$  une célérité (caractéristique)  $\lambda_1^\epsilon(\xi = v_g + \rho_g V_e(\rho_g))$  de début de détente égale à  $v_g + \rho_g V_e(\rho_g)$  et celle de fin de détente tendant par valeurs inférieures vers  $\lambda_2(W_d) = v_d$ . Cela ne signifie nullement que l'on ait créé une détente qui ignore le nécessaire vide intermédiaire. En effet, la densité est donnée sur la 1. onde à travers une détente par  $\rho_\epsilon(\xi) = Q_e^{\epsilon'}{}^{-1}(\xi)$  qui, passé  $\xi = V_{\max} + I_g$ , est majoré par  $\epsilon$  et tend donc vers 0 avec  $\epsilon$  si on **définit la solution** heuristique **comme la limite** simple des solutions  $W_1^\epsilon(t, x)$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

#### 4. Limite de compressibilité et conservativité

Ce modèle présente deux originalités, toutes deux nées du prolongement régularisant du diagramme vers  $\rho = \rho_{\max}$  :

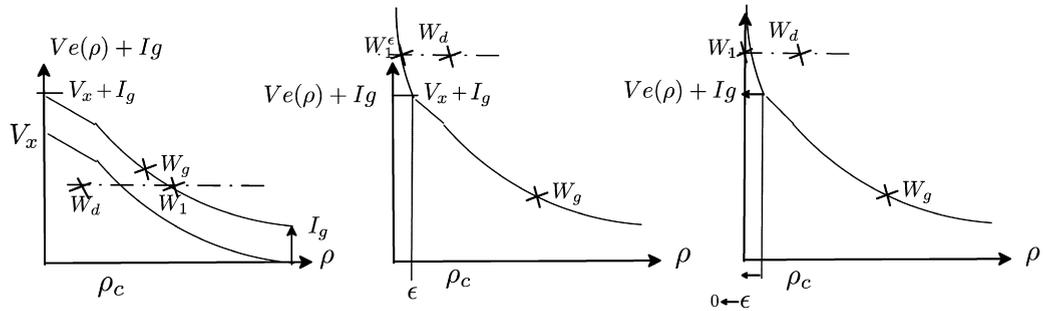


Fig. 2. La résolution avec ou sans extension, cas du vide.

*Premièrement* Un aspect original offert par le prolongement est la possibilité de stocker des flux d'intentions en plus des véhicules. Ainsi, par exemple, si un domaine avait pour condition à la limite aval une valeur de  $v$  imposée à zéro avec en entrée des débits relatifs ( $\rho_g I_g > 0$ ) positifs, la solution au problème de Riemann serait à l'intersection du diagramme translaté (1. onde) et de la courbe  $v = cste$  (2. onde), soit  $v_1 = 0$ ,  $\rho_1 = \rho_{\max}$ , ce qui n'est cohérent avec l'intégration dans tout domaine ayant cette vitesse aval nulle que si le prolongement du diagramme admet des valeurs négatives. En effet,  $y^1 = (y^0 = 0) + \frac{dt}{dx}(\rho_g v_g I_g - 0) > 0$  impose la positivité de  $y_1 = \rho_1 I_1 = \rho_{\max}(v_1 (=0) - V_e(\rho_{\max}))$ . Pour résoudre les problèmes de Riemann où  $v_d < I_g$  on a imposé à la 1. courbe de tendre vers 0 en  $\rho_{\max}$ , impliquant  $V_e(\rho_{\max}) + I_g = 0$  soit  $V_e(\rho_{\max}) = -I_g$ . Cela permet de stocker des densités de débit d'intentions  $y = \rho(v - V_e(\rho))$ .

*Deuxièmement*, l'extension proposée possède la propriété de ne pas borner la vitesse du choc de compression, plongeant les cas tolérés dans le domaine de l'incompressible. Soit la famille de problèmes de Riemann définie par un paramètre  $\epsilon$  où  $W_g^\epsilon$  est tel que  $l_g^\epsilon = \frac{y_g^\epsilon}{\rho_g^\epsilon}$  reste fixé ( $= l_g$ ) avec  $\rho_g^\epsilon \rightarrow \rho_{\max}$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$  alors pour  $0 < v_d < l_g = v_g^\epsilon - V_e(\rho_g^\epsilon) < v_g^\epsilon$  on a une célérité de choc  $\sigma^\epsilon$  qui vérifie  $\sigma^\epsilon = \frac{(\rho_1 = \rho_{\max})(v_1 = v_d) - \rho_g^\epsilon v_g^\epsilon}{(\rho_1 = \rho_{\max}) - \rho_g^\epsilon}$  encore égale à  $\frac{\rho_{\max}(v_d - v_g^\epsilon)}{(\rho_{\max} - \rho_g^\epsilon)} + v_g^\epsilon$ ;  $v_d - v_g^\epsilon$  demeure minoré par un terme  $> 0$  tandis que le dénominateur tend vers 0. Notons que toute régularisation de type (9)–(11) appliquée au voisinage de  $\rho_{\max}$  se heurtera toujours au problème de limite de compressibilité qui plonge nécessairement ce type de solution dans le domaine de l'incompressible (avec  $\sigma = -\infty$ )!

## 5. Conclusion

On a présenté et une modélisation au second ordre du trafic pour laquelle on a proposé une extension permettant d'en définir la solution pour toute condition initiale de type double état de Riemann. Existence et unicité ont été explicitées de même que des aspects, à la connaissance des auteurs, non remarqués jusque là. Le cas du problème de Riemann généralisé – avec deux diagrammes fondamentaux distincts de part et d'autre de l'interface – comme la construction de solveurs numériques de type Godunov usant des concepts d'offre et de demande [6] seront examinés dans un travail à paraître.

## Références

- [1] A. Aw, M. Rascle, Resurrection of second order models of traffic flows, SIAM J. Math. 60 (3) (2000) 916–938.
- [2] P. Bagnerini, R.M. Colombo, A. Corli, On the role of source terms in continuum traffic flow models, Math. Comp. Modelling 44 (2006) 917–930.
- [3] C.F. Daganzo, Requiem for second order fluid approximations of traffic flow, Transport. Res. B 29 (1995) 277–286.
- [4] B. Keyfitz, H.C. Kranzer, A system of non-strictly hyperbolic conservation laws arising in elasticity theory, Arch. Rational Mech. Anal. 72 (3) (1979) 219–241.
- [5] J.P. Lebacque, S. Mammari, H. Haj-Salem, The Aw–Rascle and Zhang models: Vacuum problems, existence and regularity of the solutions of the Riemann problem, Transport. Res. B 41 (2007) 710–721.
- [6] J.P. Lebacque, The Godunov scheme and what it means for first order traffic flows models, in: J.B. Lesort (Ed.), Proceedings of the 13th ISTTT, 1996, pp. 647–678.
- [7] M.H. Lighthill, G.B. Whitham, On kinematic waves II. A theory of traffic flows on long crowded roads, Proc. Roy. Soc. A 229 (1955) 317–345.
- [8] S. Mammari, Développement d'un modèle de simulation macro microscopique de simulation du trafic, Thèse de Doctorat, Univ. Evry, 2006.
- [9] J. Smoller, Shock Waves and Reaction–Diffusion Equations, Springer-Verlag, 1983, pp. 239–336.
- [10] H.M. Zhang, An non equilibrium traffic model devoid of gas like behavior, Transport. Res. B 36 (2002) 275–290.