Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 939–944

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles/Théorie du potentiel

Inégalité de Kato et inégalité de Kato jusqu'au bord

Alano Ancona

Département de mathématiques, campus d'Orsay, bâtiment 425, université Paris Sud, 91405 Orsay cedex, France

Reçu et accepté le 30 juillet 2008

Présenté par Haïm Brezis

Résumé

Haïm Brezis et Augusto Ponce ont introduit et étudié dans leurs travaux des prolongements de l'inégalité de Kato, en particulier des inégalités de Kato jusqu'au bord portant sur la dérivée normale et le Laplacien de la partie positive d'une fonction. On résout à l'aide de méthodes de théorie du Potentiel des questions mises en évidence dans Brezis et Ponce (2008). ***Pour citer cet article : A. Ancona, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***
© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Kato's inequality and Kato's inequality up to the boundary. Haïm Brezis and Augusto Ponce introduced and studied in their works several extensions of Kato's inequality, in particular Kato's inequalities up to the boundary involving the Laplacian and the normal derivative of the positive part of a function. Using Potential theoretic methods we answer here some questions raised in Brezis and Ponce (2008). ***To cite this article: A. Ancona, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***
© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let U be a domain in $\mathbb{R}^d$ and let $u \in L^1(U)$ be such that $\Delta u \in L^1(U)$. Kato's inequality [11] says that Δu_+ is a measure and that $\Delta u_+ \geqslant \mathbf{1}_{\{u \geqslant 0\}} \Delta u$. B. Fuglede [7] (see also references therein) and Brezis–Ponce [3] have extended this inequality to the case where Δu is an arbitrary Radon measure and recently in [4], H. Brezis and A. Ponce have studied extensions of Kato's inequality "up to the boundary". For U bounded and smooth, $u \in W^{1,1}(U)$ such that (i) Δu is a finite measure in U and (ii) the weak normal derivative $\partial_n u$ is a measure on ∂U, it is shown in [4] that Δu_+ and $\partial_n(u_+)$ are finite measures and that $\|\Delta u_+\| + \|\partial_n u_+\| \leqslant \|\Delta u\| + \|\partial_n u\|$ ($\|.\|$ denotes the total mass). If Δu is a finite measure and $\partial_n u \in L^1(\partial U)$, [4] also shows that $\partial_n(u_+) \leqslant \mathbf{1}_{\{u>0\}}\, \partial_n u - \mathbf{1}_{\{u=0\}}\, (\partial_n u)_-$ – with even equality if $u \in W^{2,1}(U)$ – and asks about several possible extensions of these results. We show here that whenever Δu and $\partial_n u$ are finite measures then it always holds that $\partial_n u_+ = \mathbf{1}_{\{u>0\}}.\partial_n u \,-\, \mathbf{1}_{\{u=0\}}.(\partial_n u)_-$ where $\{u > 0\}$ and $\{u = 0\}$ must be adequately defined. The result holds for a class of symmetric second order elliptic operator $\mathcal{L}$ in divergence form. See Theorem 4.2 below.

Adresse e-mail : alano.ancona@math.u-psud.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2008.07.027

The idea of the proof is to introduce a double of the manifold with boundary $\overline{U}$ so as to be reduced to the case where M is a compact manifold equipped with a symmetry $\Phi : M \to M$ fixing each point in ∂U, and where $U' := \Phi(U)$ is such that $U \cap U' = \emptyset$ and $M = \overline{U} \cup \overline{U'}$. Moreover the operator $\mathcal{L}$ is invariant under Φ. Extending u by symmetry to M and using an extended form of Kato's "inner" inequality as proven by B. Fuglede [7] one gets that $\partial_n u_+ = \mathbf{1}_{\{u>0\}} \partial_n u - \lambda_+$ where λ_+ is a measure supported by the fine boundary $\partial_f\{u > 0\}$ of the set $\{u > 0\}$. After some reductions λ_+ is the swept-out on $\{u > 0\}^c$ of some signed Borel measure λ concentrated on $\{u > 0\}$.

To finish the proof it is shown that if the similar decomposition for u_- writes $\partial_n u_- = -1_{u<0} \partial_n u - \lambda'_+$ then $\lambda_+ \wedge \lambda'_+ = 0$. It is enough to show that λ_+ and λ'_+ cannot be mutually absolutely continuous on a compact subset $K \subset \partial U$. This follows from known results on the $\mathcal{L}$-Martin boundary of $M \setminus K$ [1].

The extended "inner" Kato's inequality Theorem 3.1 is essentially due to [7]. We sketch in Section 3 an argument somewhat different from [7]. Brezis and Ponce have also obtained in [3] an extended form of Kato's inequality (with $\mathcal{L}(u)$ an arbitrary measure), different from [7] and using much less of the fine potential theory. As an application of Theorem 4.2 a formula for $\partial_n f(u)$ is given in Theorem 5.1 for $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuous and such that f'' is a finite measure.

1. Introduction

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $u \in L^1(U)$ telle que $\Delta u \in L^1(U)$. L'inégalité de Kato [11] dit qu'alors $\Delta(u_+)$ est une mesure et que $\Delta u_+ \geqslant \mathbf{1}_{\{u\geqslant 0\}} \Delta u$. B. Fuglede [7] et Brezis–Ponce [3] ont étendu cette inégalité au cas où Δu est une mesure de Radon (voir aussi les références de [7]). Dans [4] H. Brezis et A. Ponce ont étudié des prolongements « jusqu'au bord » de cette inégalité. Pour U lisse et borné, $u \in W^{1,1}(U)$ telle que Δu est une mesure finie dans U et la dérivée normale $\partial_n u$ une mesure sur ∂U, il est montré dans [4] que Δu_+, $\partial_n(u_+)$ sont des mesures finies telles que $\|\Delta u_+\| + \|\partial_n u_+\| \leqslant \|\Delta u\| + \|\partial_n u\|$ (où $\|.\|$ désigne la masse totale). Si $\partial_n u \in L^1(\partial\Omega)$, on a $\partial_n(u_+) \leqslant \mathbf{1}_{\{u>0\}} \partial_n u - \mathbf{1}_{\{u=0\}} (\partial_n u)_-$, – et même $\partial_n(u_+) = \mathbf{1}_{\{u>0\}} \partial_n u - \mathbf{1}_{\{u=0\}} (\partial_n u)_-$ si $u \in W^{2,1}(U)$ – (voir [4]). On résout ici (Théorème 4.2) des questions de [4] sur des améliorations possibles de ces résultats. Pour y parvenir il sera commode de se placer dans le cadre des variétés.

2. Le cadre : définitions

Soit M une variété de classe C^1 séparée de dimension $d \geqslant 2$, dénombrable à l'infini (un cadre plus naturel mais plus lourd serait celui d'une variété Lipschitz). Pour U ouvert de M et pour $p \geqslant 1$, on utilisera l'espace de distributions $\mathcal{D}'_1(U) := [C^1_c(U)]'$ et l'espace fonctionnel $W^{1,p}_{loc}(U)$. La « fonction » f sur U est $W^{1,p}$ au voisinage de $a \in U$ s'il existe une carte locale en a, $\psi : V \to V' \subset \mathbb{R}^d$ avec $V \subset U$, $f \circ \psi^{-1}$, $\partial_i(f \circ \psi^{-1}) \in L^p(V')$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$. On se donne sur M une forme *de Dirichlet* symétrique β qui, relativement à une (ou toute) métrique riemannienne g de classe C^0 sur M, s'écrit (on note σ_g le volume riemannien et ∇_g le gradient associés à g) :

$$\beta(u, v) = \int_M \langle A(\nabla_g u), \nabla_g v\rangle_g \, d\sigma_g \quad \text{pour } u, v \in W^{1,2}_c(M) \tag{1}$$

où $A = A_g$ est une section mesurable de $\mathrm{End}(T(M))$ telle que (i) $A(x)$ est g-symétrique pour tout $x \in M$, (ii) A est *localement* uniformément g-accrétive et bornée. La forme β induit des applications $\mathcal{L} : W^{1,1}_{loc}(U) \to \mathcal{D}'_1(U)$ – vues ici comme un opérateur elliptique qu'on dira elliptique de **type standard** sur M. On dira que $\mathcal{L}$ **est régulier** si toute solution $u \in W^{1,1}_{loc}(U)$ de $\mathcal{L}(u) = 0$ dans un ouvert U de M est $W^{1,2}_{loc}$ (donc continue). Voir [13] pour des exemples d'opérateurs irréguliers.

Soit $u \in W^{1,1}_{loc}(U)$ telle que $\lambda := \mathcal{L}(u)$ est une mesure de Borel finie dans U. On définit, relativement à U et $\mathcal{L}$, la **dérivée conormale** extérieure $\partial_n u \in \mathcal{D}'_1(M)$ en posant : $(\partial_n u)(v) := \int_U v \, d\lambda + \int_U \langle A(\nabla u), \nabla v\rangle \, d\sigma$ pour $v \in C^1_c(M)$. Cette distribution est portée par ∂U et ne dépend pas du choix de g pour $\mathcal{L}$ donné. Si U est C^1, on a $(\partial_n u)(\varphi) = 0$ pour $\varphi \in C^1_c(M)$ nulle sur ∂U (voir [4]).

3. Préliminaires : théorie du potentiel, inégalité de Kato « intérieure »

A. Il est bien connu, [14,10], qu'à $\mathcal{L}$ est associée une théorie du Potentiel *à la Brelot*, [2,9], définie par les solutions de $\mathcal{L}(u) = 0$ de classe $W^{1,2}_{loc}$. En particulier, tout domaine U de M où existe une $\mathcal{L}$-sursolution positive non constante admet une $\mathcal{L}$-fonction de Green $G = G^{\mathcal{L}}_U : U \times U \to \overline{\mathbb{R}}_+$ continue symétrique, finie hors la diagonale. Pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ finie sur U, G_μ est un $\mathcal{L}$-potentiel, $G_\mu \in W^{1,1}_{loc}(U)$ et $\mathcal{L}G_\mu = -\mu$ au sens faible. On note $\mathcal{P}(U)$ (resp., $\mathcal{S}(U)$) l'ensemble des $\mathcal{L}$-potentiels (resp., des fonctions $\mathcal{L}$-surharmoniques) dans l'ouvert U de M.

A.1. *Topologie fine.* (Ref. [6]) Rappelons que $V \subset M$ est un voisinage fin de $a \in M$ si $a \in V$ et si $A = V^c$ est effilé en a, donc s'il existe U voisinage ouvert de a et $s \in \mathcal{S}_U$ tels que $s(a) < \inf_{x \in U \cap A} s(x)$.

Rappelons aussi que si $p, q \in \mathcal{P}(U)$ alors $\mathcal{L}(p) = \mathcal{L}(q)$ dans l'intérieur fin de $\{x \in U;\, p(x) = q(x)\}$. Voir [5] p. 186.

A.2. *Balayage.* Si $p = G^U_\mu \in \mathcal{P}(U)$ (U ouvert, μ mesure $\geqslant 0$) et si $A \subset U$, la balayée relativement à U de μ sur A est la mesure $\mu^A = -\mathcal{L}(\widehat{R}^A_p)$ où R^A_p est la réduite de p sur A et $\widehat{R}^A_p$ sa régularisée sci. Rappelons que R^A_p est l'enveloppe inférieure des fonctions $\mathcal{L}$-surharmoniques $\geqslant 0$ dans U minorées par p sur A. On a $\widehat{R}^A_p = R^A_p$ q.p. et si la mesure extérieure $\mu^*(A)$ de A est nulle, la balayée μ^A est portée par un F_σ contenu dans $\partial_f(A)$, la frontière fine de A [6].

B. *Une inégalité de Kato précisée.* Supposons maintenant $\mathcal{L}$ **régulier.** Soit $u \in W^{1,1}_{loc}(M)$ telle que $\mathcal{L}(u)$ soit une mesure. Alors u est différence de deux fonctions surharmoniques et donc bien définie et finement continue dans le complémentaire d'un G_δ polaire de M. On définit $\{u > 0\} := \{a \in M;\, \liminf\text{fine}_a\, u > 0\}$ [7]. L'essentiel de l'énoncé suivant est dû à B. Fuglede [7]. Une forme différente est due à Brezis et Ponce [3]. On indiquera une preuve du Théorème 3.1 un peu différente de celle de [7].

Théorème 3.1. *On a $\mathcal{L}(u_+) = \mathbf{1}_{\{u>0\}}.\mathcal{L}(u) + \lambda_+$ où λ_+ est une mesure positive portée par le fermé fin $\partial_f\{u > 0\}$. Si $u \in \mathcal{P}(M) - \mathcal{P}(M)$, λ_+ est majorée par la balayée sur $\{u > 0\}^c$ d'une mesure positive portée par $\{u > 0\}$.*

Remarque 1. Si $u \in W^{1,1}_c(M)$ on a donc $\|\mathcal{L}(u_+)\| \leqslant \|\mathcal{L}(u)\|$ puisque $\int \mathrm{d}\mathcal{L}(u_+) = 0$.

Lemme 3.2. *Soient p_1, $p_2 \in \mathcal{P}(M)$ tels que $p_2 \leqslant p_1$, $u = p_1 - p_2$, $V = \{u > 0\}$ et $\mu_j = -\mathcal{L}(p_j)$. Alors $\mathcal{L}(u) = \mathbf{1}_V.(\mu_2 - \mu_1) + ([\mathbf{1}_V.\mu_1]^{V^c} - [\mathbf{1}_V.\mu_2]^{V^c})$.*

On peut supposer $\mu_1 \wedge \mu_2 = 0$. Alors $\lim\text{fine}_a \frac{p_1}{p_2} = +\infty$ en μ_1'-p.t. $a \in M$ si $\mu_1' = \mathbf{1}_{\{p_1 = +\infty\}}\mu_1$. Les propriétés du balayage assurent alors que $\mathcal{L}(\widehat{R}^{V^c}_{p_j}) = -\mathbf{1}_{V^c}.\mu_j - (\mathbf{1}_V.\mu_j)^{V^c}$ puisque V^c est non effilé en quasi tout $a \in V^c$ et donc en $\mu_1 + \mu_2$ p.t. $a \in V^c$. Et $u = (p_1 - R^{V^c}_{p_1}) - (p_2 - R^{V^c}_{p_2})$.

Démonstration du Théorème 3.1. Il suffit de traiter le cas où $u = p_1 - p_2$, $p_j \in \mathcal{P}(M)$, $p_2 \leqslant p_1$, $\mu_1 \wedge \mu_2 = 0$ où $\mu_j = -\mathcal{L}(p_j)$. Soit $V = \{u > 0\}$ et pour $\varepsilon > 0$ fixé, $W = \{x \in M;\, p_1(x) < p_2(x) + \varepsilon\}$. Posons $u = v + w$, $v = (u - \varepsilon)_+$, $w = u \wedge \varepsilon$. La mesure $\mathcal{L}(v)$ ne charge pas l'ouvert fin W puisque $v = 0$ p.p. dans W et comme $V^c \setminus W \subset \{p_1 = \infty\}$ on voit que $\mathcal{L}(v)$ ne charge pas V^c.

D'autre part $\mathcal{L}(w)$ ne charge pas l'ouvert fin $U_\varepsilon := \{p_1 > p_2 + \varepsilon\}$ puisque $w = \varepsilon$ p.p. dans U_ε et par ailleurs $\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(p_1 \wedge (p_2 + \varepsilon)) - \mathcal{L}(p_2) \leqslant \mu_2$. Donc $\mathcal{L}(w) \leqslant \mathbf{1}_{V \setminus U_\varepsilon}.\mu_2$ dans V et d'après le Lemme 3.2 $\mathbf{1}_{V^c}\mathcal{L}(u) \geqslant -[\mathbf{1}_{V \setminus U_\varepsilon}.\mu_2]^{V^c}$ sur V^c. Faisant tendre ε vers zéro, on obtient $\mathbf{1}_{V^c}\mathcal{L}(u) \geqslant 0$. $\square$

4. L'inégalité de Kato au bord

Dans cette partie on suppose que M est $C^{1,1}$ et que dans la représentation (1) de β relative à une métrique g localement $C^{0,1}$, A_g est localement lipschitzienne.

Lemme 4.1. *Sous ces hypothèses, l'opérateur $\mathcal{L}$ est régulier.*

Soit U un ouvert de classe $C^{1,1}$ relativement compact dans M et soit $u \in W^{1,1}(U)$. On *définit* $\{u > 0\} := \{a \in \overline{U};\ \exists A$ effilé en a, $\exists \varepsilon > 0$ tels que $u \geqslant \varepsilon$ p.p. sur $U \setminus A\}$.

Théorème 4.2. *Si $\mathcal{L}(u)$ et $\partial_n u$ sont des mesures finies sur U et ∂U respectivement, il en va de même de $\mathcal{L}(u_+)$ et $\partial_n(u_+)$ et on a $\partial_n u^+ = (\mathbf{1}_{\{u>0\}}.\partial_n u) - \lambda_+$ où λ_+ est une mesure positive portée par $\partial U \cap \partial_f\{u > 0\}$. Plus précisément*

$$\partial_n(u_+) = (\mathbf{1}_{\{u>0\}}.\partial_n u) - \mathbf{1}_{\{|u|>0\}^c}(\partial_n u)_-. \tag{2}$$

En particulier, on obtient (ce qui répond à des questions de [4] §8) : $|\partial_n u_+| \leqslant |\partial_n u|$ et si $\partial_n u \in L^1(\partial U)$ alors $\partial_n(u_+) \in L^1(\partial U)$.

Remarque 2. La preuve montrera aussi que $\|\mathcal{L}(u_+)\| + \|\partial_n(u_+)\| \leqslant \|\mathcal{L}(u)\| + \|\partial_n u\|$ (où $\|\mu\|$ désigne la masse totale de μ) et on étend donc des inégalités de [4].

La démonstration de la première assertion va consister à se ramener au Théorème 3.1 en s'appuyant sur le Lemme 4.3 suivant. On suppose pour ce lemme que M est compacte de classe C^1, que U est un ouvert de classe C^1 de M et qu'on dispose d'un C^1 automorphisme involutif $\Phi : M \to M$ tel $\Phi(x) = x$ pour $x \in \partial U$ et $\Phi(U) \cap U = \emptyset$. On suppose aussi que la forme de Dirichlet β associée à $\mathcal{L}$ est invariante par Φ.

Lemme 4.3. *Si $u \in W^{1,1}(U)$ est telle que $\lambda := \mathcal{L}(u)$ soit une mesure finie dans U, la fonction $\tilde{u} \in W^{1,1}(M)$ obtenue en prolongeant u par symétrie (soit $\tilde{u}(x) = u(\Phi(x))$ pour $x \notin \overline{U}$) est telle que $\mathcal{L}(\tilde{u}) = \lambda + \Phi(\lambda) - 2\partial_n u$.*

Démonstration du Théorème 4.2. On introduit une variété C^1 compacte $\widetilde{M}$ qui est un double de la variété à bord $\overline{U}$: topologiquement elle s'obtient en recollant à $\overline{U}$ une copie $\overline{U'} = \overline{U} \times \{1\}$ de $\overline{U}$ par identification des points correspondants sur ∂U et $\partial U'$ et elle est munie de la symétrie naturelle $\Phi : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ telle que $\Phi(x) = (x, 1)$, $\forall x \in \overline{U}$. On fixe une structure C^1 sur $\widetilde{M}$ induisant les structures C^1 initiales sur $\overline{U}$ et $\overline{U'}$ et rendant $\Phi : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ de classe C^1, puis une métrique de classe C^0 Φ-invariante sur $\widetilde{M}$. On prolonge $\mathcal{L}$ en un opérateur elliptique $\tilde{\mathcal{L}}$ sur $\widetilde{M}$ de la forme (1) Φ-invariant.

L'opérateur $\tilde{\mathcal{L}}$ est **régulier** sur $\widetilde{M}$: on montre que pour chaque $m_0 \in \partial U$, il existe un homéomorphisme bilipschitzien d'un voisinage V de m_0 dans $\widetilde{M}$ sur la boule unité ouverte B de $\mathbb{R}^d$ et transformant $\mathcal{L}|_V$ en un opérateur elliptique (à structure divergence et) à coefficients lipschitziens dans B. Ce qui ramène au Lemme 4.1.

On suppose donc désormais que $M = \widetilde{M}$ (M est maintenant seulement C^1), U étant vu comme un ouvert C^1-lisse de $\widetilde{M}$ et $\mathcal{L}$ comme Φ-invariant et régulier sur $\widetilde{M}$.

Si $\tilde{u}$ est la fonction Φ-symétrique égale à u sur $\overline{U}$, on a $\tilde{u} \in W^{1,1}(M)$ et $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{u})|_{\Phi(U)} = \Phi[\mathcal{L}(u)]$. En appliquant le Théorème 3.1 à $\tilde{u}$ puis le Lemme 4.3 on obtient la première assertion : $\mathcal{L}(\tilde{u}_+) = \mathbf{1}_{\{\tilde{u}>0\}}.\mathcal{L}(\tilde{u}) + \lambda_+$ avec λ_+ mesure positive portée par $\partial_f(\tilde{u} > 0)$ d'une part et $\mathcal{L}(\tilde{u}) = \mathbf{1}_{U\cup\Phi(U)}\mathcal{L}(\tilde{u}) - 2\partial_n(u)$, $\mathcal{L}(\tilde{u}_+) = \mathbf{1}_{U\cup\Phi(U)}\mathcal{L}(\tilde{u}_+) - 2\partial_n(u_+)$ d'autre part entraînent que $\partial_n(u_+) = \mathbf{1}_{\{u>0\}}.\partial_n(u) - \frac{1}{2}\lambda_+$. La Remarque 2 résulte maintenant de la Remarque 1.

Pour la seconde assertion, on note que $\partial_n u_- = -\mathbf{1}_{\{u<0\}}\partial_n u - \frac{1}{2}\lambda_-$ avec λ_- mesure positive portée par $\partial U \cap \partial_f\{u < 0\}$. La proposition suivante montre que $\lambda_+ \wedge \lambda_- = 0$ ce qui établira la seconde assertion. □

Considérons $M' = M \setminus (T \cup T')$, $T \subset U$ compact d'intérieur non vide, $T' = \Phi(T)$.

Proposition 4.4. *Soient V, W deux ouverts fins disjoints et Φ-invariants contenus dans M' et μ, ν deux mesures positives portée par V et W, respectivement. Soient μ' (resp., ν') les traces sur $\Sigma = \partial U$ des balayées μ^{V^c} (resp., ν^{W^c}). Alors $\mu' \wedge \nu' = 0$.*

Démonstration. Si la proposition était en défaut on pourrait trouver un compact $\mathbb{K} \subset \partial U \setminus V \cup W$ ($\mathbb{K} \neq \partial U$) tel que les traces de μ' et ν' sur $\mathbb{K}$ soient non nulles et absolument continues chacune par rapport à l'autre. Considérons alors la frontière de Martin minimale Δ_1 de $\Omega := M' \setminus \mathbb{K}$ (Ref. [12]). Rappelons que si $a \in \partial\Omega$ et $\Omega \cap B(a, r)$ est non effilé minimal en ζ pour tout $r > 0$, a est dit pôle de ζ.

Lemme 4.5. *Soit V un ouvert fin de M', $\mathbb{K}$ une partie compacte de $\partial_f V$, μ une mesure positive finie portée par V et μ' la trace sur $\mathbb{K}$ de la balayée de μ sur V^c. Alors relativement à $\Omega := M' \setminus \mathbb{K}$, μ' presque tout $x \in \mathbb{K}$ est pôle unique d'au moins un point minimal $\zeta \in \Delta_1$ tel que $\Omega \setminus V$ soit effilé minimal en ζ.*

Suite de la preuve de la Proposition 4.4. Comme $\mathbb{K}$ est inclus dans une hypersurface régulière, on sait décrire la frontière minimale Δ_1 de $M' \setminus \mathbb{K}$ ([1] §7 et p. 258) : il existe une projection continue π de Δ_1 sur $\mathbb{K}$, associant à chaque $\zeta \in \Delta_1$ son unique pôle $x \in \mathbb{K}$, chaque $x \in \mathbb{K}$ étant pôle d'un ou de deux points minimaux. Si $\#\pi^{-1}(x) = 2$, Φ échange les deux points minimaux associés à x ; un des points est limite au sens Martin des suites convergeant non tangentiellement vers x dans U, l'autre est associé de même à U'. **Conséquence** : Si dans les conditions du Lemme 4.5, V est de plus Φ-symétrique et $\mathbb{K} \subset \partial U$, alors pour μ'-presque tout $x \in \mathbb{K}$, $M' \setminus V$ est effilé minimal en chacun des points minimaux admettant le pôle x. La Proposition 4.4 est alors établie, puisque pour $\mu' \wedge \nu'$ p.t. $x \in \mathbb{K}$ les ensembles $M' \setminus V$ et $M' \setminus W$ sont à la fois effilés et non effilés en chaque minimale de pôle x. $\square$

Variantes du Théorème 4.2. (a) Si M est une variété C^1, U un ouvert de classe C^1 dans M, et $u \in W^{1,2}(U)$ le Théorème 4.2 et la formule (2) s'étendent (sans qu'il soit nécessaire de supposer $\mathcal{L}$ régulier). (b) De même si M est $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, U est de classe $C^{1,\alpha}$, $\mathcal{L}$ à coefficients C^α et $u \in W^{1,1+\varepsilon}$ pour un $\varepsilon > 0$. On utilise ici [8]. (c) (*ajouté sur les épreuves*) Très récemment H. Brezis a montré qu'un opérateur elliptique standard à coefficients höldériens dans $\mathbb{R}^d$ est régulier, ce qui résout un problème de [13] ; il s'ensuit que la remarque précédente, on peut faire $\varepsilon = 0$.

5. Application et extension

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont la dérivée f' au sens des distributions est une fonction à variations bornées. Les dérivées à droite et à gauche $f'_d(t)$, $f'_g(t)$ existent en tout $t \in \overline{\mathbb{R}}$ (par passage à la limite si $t \pm \infty$).

Théorème 5.1. *Sous les hypohèses du Théorème 4.2, $v = f(u) \in W^{1,1}(U)$, $\mathcal{L}(v)$ est une mesure finie dans U et $\partial_n v$ est une mesure finie sur ∂U donnée par*

$$\partial_n v = f'_g(u)\partial_n(u) - \big(f'_d(u) - f'_g(u)\big)(\partial_n u)_- = f'_d(u)\partial_n(u) - \big(f'_d(u) - f'_g(u)\big)(\partial_n u)_+.$$

Si $\lambda = \partial_n u$, u est définie, finement continue (pas nécessairement finie) hors d'une partie polaire λ-négligeable et les expressions ci-dessus sont des mesures bien définies.

Indications. Soit $\nu = f''$; c'est une mesure positive finie sur $\mathbb{R}$. On peut voir $w := v - f(0) - f'_d(0)u_+ + f'_g(0)u_-$ comme une intégrale banachique dans $W^{1,1}(U)$, $w := \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} u_\theta \, d\nu(\theta)$ où $u_\theta = (u - \theta)_+$ pour $\theta > 0$ et $u_\theta = (u - \theta)_-$ pour $\theta \leqslant 0$. Comme les mesures $\mathcal{L}(u_\theta)$ sont de masses totales bornées, $\mathcal{L}(w)$ est la mesure $\int_{\theta \neq 0} \mathcal{L}(u_\theta) \, d\nu(\theta)$ et de même $\partial_n w = \int_{\{\theta \neq 0\}} \partial_n(u_\theta) \, d\nu(\theta)$. En détaillant à l'aide du Théorème 4.2 et en développant on obtient le Théorème 5.1. $\square$

Remerciements

Je remercie Haïm Brezis et Augusto Ponce qui m'ont communiqué le manuscrit [4], Haïm Brezis qui a bien voulu attirer mon attention sur les problèmes soulevés dans [4] et Augusto Ponce qui a soigneusement relu la première version de cette Note.

Références

[1] A. Ancona, Régularité d'accès des bouts et frontière de Martin d'un domaine euclidien, J. Math. Pures Appl. 63 (1984) 215–260.
[2] M. Brelot, Axiomatique des Fonctions Harmoniques, Les Presses de l'Université de Montréal, 1969.
[3] H. Brezis, A.C. Ponce, Kato's inequality when Δu is a measure, C. R. Acad. Sci. Paris Série I 338 (2004) 599–604.
[4] H. Brezis, A.C. Ponce, Kato's inequality up to the boundary, preprint, January 8, 2008.
[5] J.L. Doob, Classical potential theory and its probabilistic counterpart, in: Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001 (Reprint of the 1984 edition).
[6] B. Fuglede, Finely Harmonic Functions, Springer Lecture Notes, vol. 289, 1972.

[7] B. Fuglede, Some properties of the Riesz charges associated with a δ-subharmonic function, Potential Analysis 1 (4) (1992) 355–371.
[8] R.A. Hager, J. Ross, A regularity theorem for linear second order elliptic divergence equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 26 (1972) 283–290.
[9] R.-M. Hervé, Recherche sur la théorie axiomatique des fonctions surharmoniques et du Potentiel, Ann. Inst. Fourier XII (1962) 415–471.
[10] M. Hervé, R.-M. Hervé, Les fonctions surharmoniques associées à un opérateur elliptique du second ordre à coefficients discontinus, Ann. Inst. Fourier XIX (1969) 305–359.
[11] T. Kato, Schrödinger operators with singular potentials, Israël J. Math. 13 (1972) 135–148.
[12] L. Naïm, Sur le rôle de la frontière de R.S. Martin dans la théorie du Potentiel, Annales de l'institut Fourier 7 (1957) 183–281.
[13] J. Serrin, Pathological solutions of elliptic differential equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 18 (1964) 385–387.
[14] G. Stampacchia, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Ann. Inst. Fourier 15 (1) (1965) 189–258.