Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 969–974

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Functional Analysis

L^p spaces of the von Neumann algebra of a measured groupoid

Patricia Boivin

Université d'Orléans, MAPMO, B.P. 6759, 45067 Orléans cedex 2, France

Received 3 December 2007; accepted after revision 23 July 2008

Available online 26 August 2008

Presented by Gilles Pisier

Abstract

The Hausdorff–Young inequality is well known for the Fourier transform in $\mathbf{R}^n$. More recently, Hausdorff–Young inequalities were established for unimodular groups (Kunze, 1958) and non-unimodular groups (Terp, 1980). A version was also given for $X \times X$ by Russo (1977), where X denotes a measured space. In this Note, we first study the L^p-spaces of the von Neumann algebra of a groupoid, and propose identifications of some of them as function spaces. Using interpolation, we then give a Hausdorff–Young inequality for groupoids. ***To cite this article: P. Boivin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Résumé

Espaces L^p de l'algèbre de von Neumann d'un groupoïde. L'inégalité de Hausdorff–Young est bien connue pour la transformée de Fourier dans $\mathbf{R}^n$. Plus récemment, une inégalité de Hausdorff–Young a été établie pour les groupes unimodulaires (Kunze, 1958) et pour les groupes non unimodulaires (Terp, 1980). Russo (1977) en a également donné une version pour $X \times X$, où X est un espace mesuré. Dans cette Note, nous commençons par étudier les espaces L^p de l'algèbre de von Neumann d'un groupoïde, et nous proposons des identifications de certains d'entre eux avec des espaces de fonctions. En utilisant l'interpolation, on peut alors établir une inégalité de Hausdorff–Young pour les groupoïdes. ***Pour citer cet article : P. Boivin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Version française abrégée

Introduction

Dans cette Note, nous commençons par définir un espace de coefficients qui remplace l'algèbre de Fourier d'un groupe ; nous identifions ensuite certains espaces L^p de l'algèbre de von Neumann d'un groupoïde avec des espaces de fonctions, en particulier dans les cas $p = 1$ et $p = 2$. Les résultats permettent ensuite d'utiliser l'interpolation pour prouver une inégalité de Hausdorff–Young pour un groupoïde.

Notations. (G, λ, μ) désignera un groupoïde mesuré localement compact à base dénombrable d'ouverts [5], où $\lambda = (\lambda^x)_{x \in G^{(0)}}$ est un système de Haar à gauche et μ est une mesure quasi-invariante sur l'espace des unités $G^{(0)}$. On pose $\nu = \mu \circ \lambda$, $\delta = \frac{d\nu}{d\nu^{-1}}$ et $\nu_0 = \delta^{\frac{1}{2}} \nu^{-1}$. Par ailleurs, le module δ est supposé continu.

E-mail address: patricia.boivin@ac-orleans-tours.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.
doi:10.1016/j.crma.2008.07.020

La forme standard de l'algèbre de von Neumann de G, notée $\mathcal{M}$ est obtenue en appliquant la théorie de Tomita–Takesaki [11,12] à l'algèbre hilbertienne $C_c(G)$ et l'espace de Hilbert $H = L^2(G, \nu^{-1})$. La représentation régulière gauche, notée L, est définie par $L(f)g = f \star g$ pour $f \in C_c(G)$ et $g \in H$. L'opérateur modulaire Δ est l'opérateur de multiplication par δ. Enfin, il existe un poids fidèle normal semi-fini sur $\mathcal{M}$, noté φ_0, et un poids dual sur $\mathcal{M}'$, noté ψ_0.

Soit ξ et η appartenant à l'ensemble $\mathcal{B}_l$ des vecteurs bornés à gauche de $L^2(G, \nu^{-1})$; on définit, comme dans [2], $\Theta^{\psi_0}(\xi, \eta) = L(\xi)L(\eta^\star)$. Si φ est un poids normal fidèle semi-fini sur $\mathcal{M}$, on définit alors une forme quadratique semi-continue inférieurement, de domaine dense, en posant $q(\xi) = \varphi(\Theta^{\psi_0}(\xi, \xi))$ pour tout $\xi \in \mathcal{B}_l$. La dérivée spatiale $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi_0}$ est l'unique opérateur autoadjoint positif associé à la fermeture de q. C'est également le plus grand opérateur positif autoadjoint T tel que, quel que soit $\xi \in \mathcal{B}_l$, $q(\xi) = (T\xi|\xi)$. En utilisant la théorie spatiale d'A. Connes [2] et la théorie des espaces L^p d'U. Haagerup [4], M. Hilsum [6] definit alors $L^p(\mathcal{M}, \psi_0)$ comme étant l'ensemble de tous les opérateurs fermés, densément définis, tels que, si $T = U|T|$, il existe $\varphi \in \mathcal{M}_\star^+$ tel que $|T|^p = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi_0}$. Une autre façon de définir les espaces L^p d'une algèbre de von Neumann consiste à utiliser l'interpolation entre le prédual $\mathcal{M}_*$ et $\mathcal{M}$, en utilisant les théories développées par Kosaki [8] et Terp [14].

Identification de $L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$

Définissons tout d'abord des coefficients :

Définition 0.1. (i) Étant donnés ξ et η dans $L^2(G, \nu^{-1})$, on pose $\underline{\xi} = \Delta^{-\frac{1}{2}}\xi$ and $\underline{\eta} = \Delta^{-\frac{1}{2}}\eta$. On obtient ainsi $\underline{\xi}$ et $\underline{\eta}$ dans $L^2(G, \nu)$; on définit le coefficient (ξ, η) comme étant la fonction définie ν-presque partout par

$$(\xi, \eta)(\gamma) = \big(L(\gamma)\underline{\xi}^{s(\gamma)}|\underline{\eta}^{r(\gamma)}\big),$$

où $L(\gamma)$ est l'application de $L^2(G^{s(\gamma)}, \lambda^{s(\gamma)})$ sur $L^2(G^{r(\gamma)}, \lambda^{r(\gamma)})$ définie pour $\alpha \in L^2(G^{s(\gamma)}, \lambda^{s(\gamma)})$ et $\gamma' \in G^{r(\gamma)}$ par $L(\gamma)\alpha(\gamma') = \alpha(\gamma^{-1}\gamma')$ et $\underline{\xi} = (\underline{\xi}^x) \in L^2(G, \mu \circ \lambda) = L^2(G^{(0)}, \mu; L^2(G, \lambda))$.

(ii) On note $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$ l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des (ξ, ξ) avec $\xi \in L^2(G, \nu^{-1})$.

La première identification est donnée par le théorème suivant :

Théorème 0.2. (i) *Tout coefficient (ξ, η) avec $\xi, \eta \in L^2(G, \nu^{-1})$ appartient à $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$; réciproquement, tout élément de $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$ est un coefficient.*

On définit une norme sur $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$, par $\omega \mapsto \|\omega\| = \inf\{\|\xi\|_2\|\eta\|_2\colon \omega = (\xi, \eta),\ \xi, \eta \in L^2(G, \nu^{-1})\}$.

(ii) *Soit $\varphi \in \mathcal{M}_*$. Il existe un unique coefficient $\omega = (\xi, \eta)$ avec $\xi, \eta \in L^2(G, \nu^{-1})$ tel que*

$$\forall f \in C_c(G), \quad \varphi\big(L(f)\big) = \big(L(f)\xi|\eta\big).$$

Ce coefficient est en fait égal à $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\nu_0}$.

(iii) *L'application F définie sur $\mathcal{M}_*$ par $F(\varphi) = \omega$ est un isomorphisme isométrique de $\mathcal{M}_*$ sur $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$.*

On obtient ainsi le diagramme commutatif (Fig. 1). On cherche alors à expliciter l'isomorphisme de $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$ sur $L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$:

Théorème 0.3. (i) *Il existe un isomorphisme isométrique positif $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty$ de $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$ sur $L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$ tel que le diagramme cité soit commutatif.*

(ii) *Si $F = (e, e)$ avec $e \in C_c(G)$, $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty(F)$ est la fermeture de l'opérateur symétrique positif $\Delta^{\frac{1}{2}}L(\widetilde{F})\Delta^{\frac{1}{2}}$ défini sur le domaine $C_c(G)$.*

(iii) *L'isomorphisme $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty$ est complètement déterminé par les conditions précédentes.*

Inégalité de Hausdorff–Young

Une inégalité de Hausdorff–Young a été établie pour les groupes unimodulaires par Kunze [9], puis pour les groupes non-unimodulaires par Terp [13]. Nous nous inspirons de leurs méthodes ainsi que de celle de Russo [1] pour en obtenir une pour les groupoïdes. Les définitions proposées pour les espaces à normes mixtes $L^{p,p'}(G)$ généralisent celles de [1] valables pour le groupoïde grossier $X \times X$. On se donne p et p' dans $[1;+\infty]$ tels que $p^{-1} + p'^{-1} = 1$. La formule 2 permet de définir les espaces $L^{p,p'}(G)$ en fonction des valeurs de p. On obtient alors des espaces de Banach $(L^{p,p'}(G), \|\cdot\|_{p,p'})$. On définit par ailleurs de nouveaux opérateurs non bornés comme suit :

Définition 0.4. Soit $q \in [2;+\infty]$ et p tels que $p^{-1} + q^{-1} = 1$; soit $f \in C_c(G)$. On définit l'opérateur $\Delta^{\frac{1}{2q}} L(f) \Delta^{\frac{1}{2q}}$ sur le domaine $C_c(G)$. Cet opérateur est fermable, et on note $\mathcal{F}_p(f)$ sa fermeture.

En particulier, pour $p = q = 2$, on obtient une nouvelle identification :

Théorème 0.5. *L'application $\mathcal{F}_2 : f \mapsto \mathcal{F}_2(f)$ admet un prolongement en un isomorphisme isométrique de $(L^2(G,\nu_0), \| \|_{L^2(G,\nu_0)})$ sur $(L^2(\mathcal{M},\psi_0), \| \|_2)$.*

En utilisant l'interpolation complexe entre $p = 1$ et $p = 2$ et le plongement symétrique de M. Terp (Théorème 27, [14]), on peut alors démontrer une inégalité de Hausdorff–Young

Théorème 0.6. *Étant donné $p \in [1;2]$ et p' tel que $p^{-1} + p'^{-1} = 1$.*
Soit $f \in C_c(G)$. Alors $\mathcal{F}_p$ appartient à $L^{p'}(\mathcal{M},\psi_0)$ et

$$\left\|\mathcal{F}_p(f)\right\|_{p'} \leqslant \sqrt{\|f\|_{p,p'} \|f^\star\|_{p,p'}}.$$

1. Introduction

In this Note, we present some results about L^p-spaces of the von Neumann algebra of a measurable groupoid. We first define a space of coefficients which replace the Fourier algebra of a group, and we then identify some L^p-spaces of the von Neumann algebra of a measurable groupoid with function spaces, particularly for $p = 1$ and $p = 2$. We then use interpolation to prove a Hausdorff–Young inequality for groupoids.

Notation. (G,λ,μ) will denote a second countable Hausdorff locally compact measured groupoid as defined for example by P. Hahn [5], with left Haar system $\lambda = (\lambda^x)_{x \in G^{(0)}}$ and a quasi-invariant measure μ on the unit space $G^{(0)}$. If we call ν the measure $\mu \circ \lambda$, the module δ is equal to $\frac{d\nu}{d\nu^{-1}}$, and will be supposed to be continuous on G. We shall also define a measure ν_0 by $\delta^{\frac{1}{2}}\nu^{-1}$.

For $\gamma \in G$, $r(\gamma)$ and $s(\gamma)$ will denote the range and source of γ in $G^{(0)}$. We now consider the space of continuous functions on G with compact support, that we call $C_c(G)$. Applying the GNS-construction to $C_c(G)$ equipped with the inner product defined by $(f|g) = \int f(\gamma)\overline{g(\gamma)}\, d\nu^{-1}(\gamma)$, we get the Hilbert space $H = L^2(G,\nu^{-1})$. If we define, for $f \in C_c(G)$ and $g \in C_c(G)$, $f \star g$ by $f \star g(\gamma) = \int f(\gamma\gamma')g(\gamma'^{-1})\, d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma')$ and $f^\star$ by $f^\star(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}$, we obtain a Hilbert algebra.

We define the left representation $L : C_c(G) \to \mathcal{L}(H)$ by $L(f)g = f \star g$ for $f \in C_c(G)$ and $g \in H$; and the right representation R by $R(f)g = g \star f$ for $f \in C_c(G)$ and $g \in H$.

We define the von Neumann algebra $\mathcal{M}$ of G as the weak-closure of $L(C_c(G))$ in $\mathcal{L}(H)$, i.e. the bi-commutant of $L(C_c(G))$ in $\mathcal{L}(H)$.

The S operator of Tomita's theory [11,12] is given, on its domain, by $f \mapsto f^\star$.

We can also make explicit the modular operator Δ, which is in fact the operator of multiplication by δ.

According to the general theory, there exists a normal faithful semi-finite weight φ_0; the dual weight is denoted by ψ_0.

We can now define the L^p spaces of the von Neumann algebra $\mathcal{M}$ constructed by M. Hilsum [6] using A. Connes' spatial theory [2] and U. Haagerup' L^p-spaces' theory [4]. For ξ and η in the space $\mathcal{B}_l$ of all left bounded vectors of $L^2(G,\nu^{-1})$, we can define $\Theta^{\psi_0}(\xi,\eta)$ by $L(\xi)L(\eta^\star)$. If φ is a faithful normal semi-finite weight on $\mathcal{M}$, one can define a lower semi-continuous quadratic form with dense domain by $q(\xi) = \varphi(\Theta^{\psi_0}(\xi,\xi))$ for all $\xi \in \mathcal{B}_l$. The spatial derivative $\frac{d\varphi}{d\psi_0}$ is the self-adjoint positive operator associated to the closure of q. More precisely, it is the largest positive self-adjoint operator T such that, for all $\xi \in \mathcal{B}_l$, $q(\xi) = (T\xi|\xi)$. M. Hilsum defines then $L^p(\mathcal{M},\psi_0)$ as the space of all closed operators T with dense domain such that, if $T = U|T|$ denotes the polar decomposition, there exists $\varphi \in \mathcal{M}_\star^+$ such that $|T|^p = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi_0}$. The L^p spaces of $\mathcal{M}$ can also be defined by interpolation between $\mathcal{M}_*$ and $\mathcal{M}$, as in Kosaki [8] or Terp [14].

2. Identification of the $L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$

First, by the general theory of L^p-spaces of a non-commutative von Neumann algebra, we can identify $L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$ to the predual $\mathcal{M}_\star$, through the isomorphism $\varphi \mapsto \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi_0}$ from $\mathcal{M}_\star$ to $L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$.

On the other hand, we can also consider the usual Radon–Nikodym derivative $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\nu_0}$. Our first aim is to identify the spatial derivative and the Radon–Nikodym derivative. To obtain this result, we first define a space of coefficients:

Definition 2.1. (i) Let ξ, η in $L^2(G, \nu^{-1})$. We define $\underline{\xi}$ and $\underline{\eta}$ in $L^2(G, \nu)$ by $\underline{\xi} = \Delta^{-\frac{1}{2}}\xi$ and $\underline{\eta} = \Delta^{-\frac{1}{2}}\eta$. The coefficient (ξ, η) is the function defined for $\mu \circ \lambda$ almost every $\gamma \in G$ by

$$(\xi, \eta)(\gamma) = \big(L(\gamma)\underline{\xi}^{s(\gamma)} \big| \underline{\eta}^{r(\gamma)}\big),$$

where $\underline{\xi} = (\underline{\xi}^x) \in L^2(G, \mu \circ \lambda) = L^2(G^{(0)}, \mu, L^2(G, \lambda))$ and $L(\gamma)$ is the map of $L^2(G^{s(\gamma)}, \lambda^{s(\gamma)})$ into $L^2(G^{r(\gamma)}, \lambda^{r(\gamma)})$ defined for $\alpha \in L^2(G^{s(\gamma)}, \lambda^{s(\gamma)})$ and $\gamma' \in G^{r(\gamma)}$ by $L(\gamma)\alpha(\gamma') = \alpha(\gamma^{-1}\gamma')$.

(ii) We define $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$ as the linear span of $\{(\xi, \xi),\ \xi \in L^2(G, \nu^{-1})\}$.

If G is a group, we get the classical Fourier algebra defined by P. Eymard [3].

As in the group case, we have the following theorem:

Theorem 2.2. (i) *Every coefficient (ξ, η), where $\xi, \eta \in L^2(G, \nu^{-1})$ belongs to $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$. Conversely, every element of $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$ is a coefficient.*

Moreover, if ω is a coefficient, the formula $\|\omega\| = \inf\{\|\xi\|_2\|\eta\|_2\colon\ \omega = (\xi, \eta),\ \xi, \eta \in L^2(G, \nu^{-1})\}$ defines a norm on $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$.

(ii) *Let φ be a linear functional of $\mathcal{M}_*$. There exists a unique coefficient $\omega = (\xi, \eta)$ with $\xi, \eta \in L^2(G, \nu^{-1})$ such that*

$$\forall f \in C_c(G), \quad \varphi\big(L(f)\big) = \big(L(f)\xi \big| \eta\big). \tag{1}$$

(iii) *The map F defined on $\mathcal{M}_*$ by $F(\varphi) = \omega$ is an isometric isomorphism of $\mathcal{M}_*$ into $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$.*

Proof. Let φ be a linear functional of $\mathcal{M}_*$. Then there exist ξ and η in H such that $\varphi = \omega_{\xi,\eta}$, i.e. $\varphi(T) = (T\xi|\eta)$ for all $T \in \mathcal{M}_*$. We then prove that if $\omega_{\xi_1,\eta_1} = \omega_{\xi_2,\eta_2}$, then the associated coefficients (ξ_1, η_1) and (ξ_2, η_2) are equal. We then obtain (ii).

Conversely, if we take a coefficient (ξ, η), the formula (1) allows us to define a unique linear functional on $\mathcal{M}$. The isometry follows from the definition of the norms. $\square$

In the proof, we establish that, if (ξ, η) is the unique coefficient associated to a linear functional φ, we have the equality $\varphi(L(f)) = \int f(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\nu_0$. This proves that (ξ, η) is in fact the Radon–Nikodym derivative $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\nu_0}$ and we get the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^1(\widehat{G}) \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, shift left, "F"] & & L^1(\mathcal{M}, \psi_0) \arrow[dl, shift left] \\
& \underset{\varphi}{\mathcal{M}_\star} \arrow[ul, shift left, "\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\nu_0}"] \arrow[ur, shift left, "\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi_0}"'] &
\end{tikzcd}$$

We now are interested in writing elements of $L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$ in terms of functions on G. In order to do that, we want to explicit the isomorphism of $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$ into $L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$.

Theorem 2.3. (i) *There exists an isometric linear positive isomorphism $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty$ of $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$ into $L^1(\mathcal{M},\psi_0)$ such that the previous diagram is commutative.*

(ii) *For $F=(e,e)$ with $e\in C_c(G)$, $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty(F)$ is the closure of the positive symmetric operator $\Delta^{\frac12}L(\widetilde{F})\Delta^{\frac12}$ defined on the domain $C_c(G)$.*

(iii) *This isomorphism $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty$ is completely determined by the previous conditions.*

Proof. Assertion (i) follows from the previous theorem. As $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty$ is completely determined by its expression on $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$, and because $C_c(G)$ is dense in $L^2(G,\nu^{-1})$, we only need to find a formula for $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty(e,e)$ for $e\in C_c(G)$. We then only have to prove (ii). In order to do that, we first prove that, if $T\in L^1(\mathcal{M},\psi_0)_+$ and $F=\widetilde{\mathcal{F}}_\infty^{-1}(T)$, the restriction to $C_c(G)$ of the quadratic form q_T associated to T is q_F, where q_F is defined for $\xi\in C_c(G)$ by the formula

$$q_F(\xi)=\int\overline{\xi(\gamma)}\delta^{\frac12}(\gamma)\widetilde{F}\star(\delta^{\frac12}\xi)(\gamma)\,\mathrm{d}\lambda_x(\gamma)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

We then let $F=(e,e)$, with $e\in C_c(G)$, and prove that, for any $\xi\in L^2(G,\nu^{-1})$, $\delta^{\frac12}\widetilde{F}\star(\delta^{\frac12}\xi)$ is a function almost everywhere defined and the unbounded operator $\Delta^{\frac12}L(\widetilde{F})\Delta^{\frac12}$, defined on the domain $C_c(G)$, is symmetric positive. We then justify that the sequilinear form $q_T(\xi,\eta)$ is equal to $(\Delta^{\frac12}L(\widetilde{F})\Delta^{\frac12}\xi|\eta)$, for any $\xi,\eta\in\mathcal{B}_l$. By using Kato's result (see [7], cor. 2.4, section 2.1), we deduce that the closure of $T|_{C_c(G)}$ is equal to T and we get the expected result. □

3. Hausdorff–Young inequality

Hausdorff–Young inequalities were established for unimodular groups by Kunze [9], and for non-unimodular groups by Terp [13]. So as to generalise the Hausdorff–Young inequality to groupoids, we need to define $L^{p,p'}(G)$ spaces, similar to those defined by [1] and used by Russo [10] in $X\times X$ case.

Let p, p' in $[1;\infty]$ such that $\frac1p+\frac1{p'}=1$. If p and p' are finite, $L^{p,p'}(G)$ is the linear space of all measurable functions f from G into $\mathbf{C}$ such that $\int(\int|f|^p\,\mathrm{d}\lambda^x)^{\frac{p'}{p}}\,\mathrm{d}\mu(x)<+\infty$.

We then set,

$$\|f\|_{p,p'}=\left(\int\left(\int|f|^p\,\mathrm{d}\lambda^x\right)^{p'/p}\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p'},\tag{2}$$

with the usual modifications when p or p' are infinite. As in the case of $X\times X$, one can prove that $\|\cdot\|_{p,p'}$ is a norm on $L^{p,p'}(G)$, and that $L^{p,p'}(G)$ becomes a Banach space. Now, before stating the Hausdorff–Young inequality for groupoids, we need to define particular operators of $L^q(\mathcal{M},\psi_0)$ for $q\in[2;+\infty]$.

Definition 3.1. Let $q\in[2;+\infty]$, p such that $p^{-1}+q^{-1}=1$ and $f\in C_c(G)$. We can define the operator $\Delta^{\frac{1}{2q}}L(f)\Delta^{\frac{1}{2q}}$ on the domain $C_c(G)$. It is closable and we then denote by $\mathcal{F}_p(f)$ the closure of this operator.

In particular, for $p=q=2$, we obtain the following expected result:

Theorem 3.2. *The map $\mathcal{F}_2: f\mapsto\mathcal{F}_2(f)$ extends to an isometric isomorphism of $(L^2(G,\nu_0),\|\ \|_{L^2(G,\nu_0)})$ into $(L^2(\mathcal{M},\psi_0),\|\ \|_2)$.*

Using complex interpolation between $p=1$ and $p=2$ in the same fashion as in [10] and the symmetric embedding of M. Terp (Theorem 27, [14]), we can prove the following Hausdorff–Young inequality:

Theorem 3.3. *Let $p\in[1;2]$ and p' such that $p^{-1}+p'^{-1}=1$.*

Let $f\in C_c(G)$. Then $\mathcal{F}_p(f)$ belongs to $L^{p'}(\mathcal{M},\psi_0)$ and

$$\left\|\mathcal{F}_p(f)\right\|_{p'}\leqslant\sqrt{\|f\|_{p,p'}\|f^\star\|_{p,p'}}.$$

References

[1] A. Benadek, R. Panzone, The spaces L^p with mixed norm, Duke Math. J. 28 (1961) 301–324.
[2] A. Connes, On the spatial theory of von Neumann algebras, J. Funct. Anal. 35 (1980) 153–164.
[3] P. Eymard, L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, Bull. Soc. Math. France 92 (2) (1964) 181–236.
[4] U. Haagerup, L^p-spaces associated with an arbitrary von Neumann algebra, in: Algèbres d'opérateurs et leurs applications en physique mathématique, Proc. Colloq., Marseille, 1977, in: Colloq. Internat. CNRS, vol. 274, 1979, pp. 175–184.
[5] P. Hahn, Haar measure for measure groupoids, Trans. Amer. Math. Soc. 242 (1978).
[6] M. Hilsum, Les espaces L^p d'une algèbre de von Neumann définies par la dérivée spatiale, J. Funct. Anal. 40 (1981) 151–169.
[7] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1976.
[8] H. Kosaki, Applications of the complex interpolation method to a von Neumann algebra: Non-commutative L^p-spaces, J. Funct. Anal. 56 (1984) 29–78.
[9] R.A. Kunze, L_p Fourier Transforms on locally compact unimodular groups, Trans. Amer. Math. Soc. 89 (1958) 519–540.
[10] B. Russo, On the Hausdorff–Young theorem for integral operators, Pacific J. Math. 68 (1977) 241–253.
[11] M. Takesaki, Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications, Lecture Notes in Math., vol. 128, Springer, 1970.
[12] M. Takesaki, Theory of Operator Algebras T3, E.M.S., vol. 125, Springer, 2003.
[13] M. Terp, L^p Fourier Transformation on non-unimodular locally compact groups, Kobenhavns Universitet Matematisk Institut, Preprint, 1980.
[14] M. Terp, Interpolation spaces between a von Neumann algebra and its predual, J. Operator Theory 8 (1982) 327–360.