

Équations aux dérivées partielles

Vers des lois de parois multi-échelle implicites

Didier Bresch^a, Vuk Milisic^b

^a LAMA UMR5127, Université de Savoie, 73000 Le Bourget du lac cedex, France

^b LMC-IMAG UMR5223, 51, rue des Mathématiques, B.P. 53, 38041 Grenoble cedex 9, France

Reçu le 26 octobre 2006 ; accepté après révision le 3 juin 2008

Disponible sur Internet le 3 juillet 2008

Présenté par Gérard Iooss

Résumé

Le but de cette Note est de présenter une approche unifiée des approximations de type couche limite pour l'opérateur de Laplace dans un domaine à bord rugueux périodique. On montre un résultat négatif pour une loi de paroi moyennée du second ordre. Pour contourner la difficulté, on propose de nouvelles lois de parois multi-échelles incluant les oscillations microscopiques sur la frontière fictive. Dans un premier temps, elles sont explicites et s'expriment comme des conditions de Dirichlet non-homogènes, ensuite on dérive une loi multi-échelle implicite de type Saffman–Joseph mais à coefficient variable. On établit des ordres de convergence et on montre leur validité numérique. On montre également sur un contre-exemple l'impossibilité de construire une loi d'ordre 2 effectif et qui soit moyennée dans les variables rapides. *Pour citer cet article : D. Bresch, V. Milisic, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Towards implicit multi-scale wall-laws. The purpose of this Note is to present a unifying approach of boundary layer approximations for the Laplace operator in domains with periodic rugous boundaries. We show a negative result for an averaged second-order like wall-law. To circumvent this difficulty, we propose new multi-scale wall-laws that include microscopic oscillations on the fictitious boundary. In a first step they are explicit non-homogeneous Dirichlet conditions, afterwards an implicit multi-scale Saffman–Joseph-like wall-law is derived. We establish theoretical orders of convergence and provide their numerical assessment, as well as a counter-example that demonstrates the impossibility of a real averaged second order wall-law. *To cite this article : D. Bresch, V. Milisic, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

The general idea of wall-laws is to remove the stiff part from boundary layers, replacing the classical no-slip boundary condition by a more sophisticated relation between the variables and their derivatives. Depending on the field of applications, (porous media, fluid mechanics, heat transfert, electromagnetism), different names for wall-laws are encountered such as Saffman–Joseph's, Navier's etc. High order effective macroscopic boundary conditions may also be proposed depending on the order we cut off the process in the ansatz. Anyway, in the steady case, numerical

Adresses e-mail : Didier.bresch@univ-savoie.fr (D. Bresch), vuk.milisic@imag.fr (V. Milisic).

simulations have shown that first or second order macroscopic wall-laws provide the same order of approximation [1]. Generalization of wall-laws functions formulation have been obtained recently for curved rough boundaries (see [6] and references therein) and for random roughness [3].

This Note summarizes the paper [4]. Instead of dealing directly with the full problem of Navier–Stokes flow, we consider a simplified setting that avoids theoretical difficulties and non-linear complications. We built a specific Poisson problem representing to some extent the axial component of the velocity.

In a first step, we briefly sum up the asymptotic expansion performed by W. Jäger et al. [5] and the formal results by Y. Achdou et al. [1]. We explore the relationship between the two approaches and show that they can be deduced one from each other by simple liftings at both the macro and the micro scales. Moreover we show that Sobolev norms of the difference is of higher order w.r.t. the rugosity length-scale ε . Thus the two approximations lead to the same wall-laws. In a second part we derive exact approximations on the rugous wall up to the second order in ε . For this fully oscillatory approximation we prove exponential convergence inside the domain. Nevertheless, the corresponding macroscopic wall-law does not conserve the same order of convergence. So we derive new explicit multi-scale wall-laws that do converge exponentially. In a third part we derive a first order implicit multi-scale wall-law that only needs the trace of the first order cell problem. This lead to a new Saffman–Joseph’s wall-law that contains the microscopic oscillations. We rigorously prove the convergence rate of $O(\varepsilon^{3/2})$. To show the practical importance of theoretical results, we compute a numerical evidence of our theoretical claims on a 2D test case.

1. Introduction

L’idée générale des lois de parois est de supprimer les parties raides des couches limites, et de remplacer la condition classique de non glissement par une relation plus compliquée entre les variables et leurs dérivées. Dépendant des champs d’application, (milieux poreux, mécanique des fluides, transfert de chaleur, électromagnétisme), les noms donnés aux lois de parois Saffman–Joseph, Navier, etc., diffèrent. Des conditions effectives d’ordre plus élevé peuvent également être proposées. Malgré tout, dans le cas stationnaire, des simulations numériques ont montré que les lois de parois moyennées d’ordre un ou deux procurent le même ordre d’approximation par rapport à ε , l’épaisseur des rugosités [1]. Des formulations de lois de parois plus générales ont été récemment obtenues pour des frontières courbes (voir [6] et les références qui y sont contenues) et pour des rugosités aléatoires [3].

Cette Note présente les résultat de [4]. Au lieu d’étudier un écoulement de type Navier–Stokes, on considère un cadre simplifié qui exclue des difficultés techniques liées aux non-linéarités par exemple. On considère ainsi un problème de Poisson qui représente la vitesse axiale. Dans une première partie, on résume brièvement le développement asymptotique obtenu par W. Jäger et al. [5] et les résultats plus formels de Y. Achdou, et al. [1]. On explore la relation liant les deux approches et on montre qu’elles peuvent être déduites l’une de l’autre et que de plus leur différence est d’ordre plus élevé que l’effet de rugosité. Ceci prouve que les deux approximations mènent aux mêmes lois de parois.

Dans une deuxième partie, on obtient des approximations exactes sur la paroi rugueuse au deuxième ordre en ε . Pour ces approximations entièrement oscillantes, on montre la convergence exponentielle à l’intérieur du domaine. Malgré ce taux de convergence élevé, la loi de paroi macroscopique correspondante se comporte mal et ne conserve pas l’ordre de l’approximation complète. On dérive alors de nouvelles lois de paroi multi-échelle explicites qui elles convergent exponentiellement. Dans une troisième partie, on obtient une loi de paroi multi-échelle implicite, qui nécessite seulement la connaissance de la trace du problème cellule sur la frontière fictive. On a ainsi une loi de Paroi de type Saffman–Joseph qui contient des oscillations microscopiques. On montre un taux de convergence en $O(\varepsilon^{3/2})$. Pour illustrer l’importance pratique des résultats théoriques, on montre des preuves numériques des résultats obtenus théoriquement sur un cas test 2D.

2. Domaines, notations et problème simplifié

Pour le reste de la note, on considère un canal 2D limité par des parois horizontales : la paroi lisse appelée Γ^1 et celle rugueuse Γ^ε située en bas. Cette dernière est paramétrisée par la courbe $x_2 = \varepsilon f(x_1/\varepsilon)$ où f est périodique, Lipschitz et à valeurs dans $[-1 : 0[$. On définit Γ^0 , une interface fictive située en $x_2 = 0$. On appelle $\Gamma_{\text{in}} := \{0\} \times [\varepsilon f(0), 1]$ l’entrée verticale du domaine, et $\Gamma_{\text{out}} := \{L\} \times [\varepsilon f(0), 1]$ sa sortie. Dans ce contexte, on considère le problème de Poisson

$$-\Delta u^\varepsilon = C \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \quad u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\varepsilon \cup \Gamma^1, \quad u^\varepsilon \text{ est } x_1 \text{ périodique sur } \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}} \quad (1)$$

où la constante C peut représenter la composante axiale du gradient de pression dans les équations de Stokes. Par ailleurs on définit un domaine microscopique cellule $P \cup Z^+$ composé par $Z^+ = \{y \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+\}$ et $P = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \in [0, 2\pi] \text{ et } y_2 \in [f(y_1), 0]\}$. On note P^0 le fond de la cellule défini par $P^0 = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 = f(y_1)\}$ et Γ , l'interface fictive du problème cellule située en $y_2 = 0$.

3. Deux méthodes de construction des correcteurs couche limite (CCL)

L'ordre principal u^0 , si l'on considère formellement la limite quand ε tend vers 0, satisfait

$$-\Delta u^0 = C \quad \text{dans } \Omega^0, \quad u^0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma^0 \cup \Gamma^1, \quad u^0 \text{ est } x_1 \text{ périodique sur } \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}}. \quad (2)$$

W. Jäger et al. considèrent l'écoulement de Poiseuille de (2) dans Ω^0 et le prolongent par 0 sur tout le domaine $\Omega^\varepsilon \setminus \Omega^0$, c'est-à-dire que : $u_J^0 = \frac{C}{2} x_2(1 - x_2) \chi_{\Omega^0}$. Ils corrigent cette solution en compensant le saut sur le gradient localisé sur l'interface Γ^0 . Ils recherchent une fonction β périodique en y_1 et solution du problème cellule suivant :

$$-\Delta \beta = 0 \quad \text{dans } Z^+ \cup P, \quad [\partial_{y_2} \beta] = 1 \quad \text{sur } \Gamma, \quad \beta = 0 \quad \text{sur } P^0, \quad (3)$$

où les crochets $[\cdot]$ désignent le saut à travers Γ . Parce que cette fonction est harmonique, elle ne s'annule pas nécessairement à l'infini mais tend vers sa moyenne $\bar{\beta} = \lim_{y_2 \rightarrow +\infty} \beta(y_1, y_2)$. Pour construire le CCL, on soustrait cette constante à $\beta(x/\varepsilon)$ sur le domaine Ω^0 pour limiter l'erreur sur Γ^1 . La solution est alors discontinue à travers Γ^0 . Ils définissent donc « le contre-flot » d , solution de

$$-\Delta d = 0 \quad \text{dans } \Omega^0, \quad d = 1 \quad \text{sur } \Gamma^0, \quad d = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}} \quad (4)$$

et ils posent finalement

$$u_J^{1,1} = u^0 + \varepsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + (1 - d) \bar{\beta} \chi_{[0,1]} \right).$$

L'ordre de convergence entre u^ε et $u_J^{1,1}$ dans Ω^ε est de ε en norme $H^1(\Omega^\varepsilon)$ et de $\varepsilon^{3/2}$ dans $L^2(\Omega^0)$.

Dans l'approche de Y. Achdou et al. il n'y a pas de saut de gradient sur l'interface. En effet, le profil de Poiseuille est étendu en dessous de l'interface Γ^0 par linéarisation :

$$u_{\text{ext},1}^0 = u^0 \chi_{\Omega^0} + \partial_{x_2} u^0(x_1, 0) x_2 \chi_{\Omega^\varepsilon \setminus \Omega^0}.$$

Alors l'approximation d'ordre zéro ne satisfaisant pas les conditions au fond, on introduit donc un problème cellule :

$$-\Delta \beta = 0, \quad \forall y \in Z^+ \cup P \cup \Gamma, \quad \beta = -y_2, \quad \text{pour } x \in P^0. \quad (5)$$

On étend la solution d calculée en (4), linéairement à tout Ω^ε pour corriger l'effet de la soustraction de $\bar{\beta}$ sur Γ^ε . Il est à noter que cette étape n'est pas présentée dans [1] : les auteurs remplacent seulement l'approximation d'ordre zéro $u_{\text{ext},1}^0$ par la loi de paroi, (ce qui revient au même, [1] p. 198 étape 5, pour une explication plus détaillée voir aussi [4]). Finalement on définit le CCL :

$$u_A^{1,1} = u_{\text{ext},1}^0 + \varepsilon \bar{\beta} \frac{\partial u^0}{\partial x_2}(x_1, 0) \left(\beta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta} (1 - d) \right).$$

Pour relier les deux approches, il suffit de remarquer que

$$u_A^0 = u_{\text{ext},1}^0 \equiv u_J^0 + \partial_{x_2} u^0(x_1, 0) x_2 \chi_{\Omega^\varepsilon \setminus \Omega^0}.$$

On peut également remarquer que les correcteurs peuvent être reliés par un relèvement localisé sous la frontière fictive Γ .

$$\beta_A = \beta_J + y_2 \chi_P,$$

ceci implique qu'à l'infini les deux solutions convergent vers la même limite $\bar{\beta}_J = \bar{\beta}_A$. Pour les CCL respectifs, on a donc en résumé :

$$u_A^{1,1} = u_J^{1,1} - \varepsilon \partial_{x_2} u^0 x_2 \bar{\beta} \chi_{\Omega^\varepsilon \setminus \Omega^0}.$$

Ceci implique directement que

$$\|u_A^{1,1} - u_J^{1,1}\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{3/2}.$$

Il est évident alors pourquoi les deux approches donnent lieu à la même loi de paroi.

4. Un CCL du second ordre satisfaisant du Dirichlet homogène sur Γ^ε

On peut étendre le profil de Poiseuille sur tout le domaine Ω^ε , $u_{\text{ext},2}^0 = C/2(1-x_2)x_2$, on corrige l'erreur quadratique commise sur Γ^ε en résolvant le problème cellule du second ordre : trouver γ y_1 -périodique solution de

$$-\Delta\gamma = 0 \quad \text{dans } Z^+ \cup P, \quad \gamma = -y_2^2 \quad \text{sur } P^0. \quad (6)$$

Par la méthodologie de Achdou et al., on construit alors le CCL du second ordre

$$u^{2,1} = u_{\text{ext},2}^0 + \varepsilon \partial_{x_2} u^0(x_1, 0) \left(\beta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta} x_2 \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \partial_{x_2}^2 u^0(x_1, 0) \left(\gamma \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\gamma} x_2 \right)$$

l'erreur produite sur le bord par les deux approximations macroscopiques est encore linéaire [2], donc on peut itérer indéfiniment en corrigeant avec $\beta(x/\varepsilon) - \bar{\beta}$, ceci donne le CCL exact sur Γ^ε qui s'écrit :

$$u_\varepsilon^{2,\infty} = u_{\text{ext},2}^0 + \omega(\varepsilon) \frac{\partial u^0}{\partial x_2} \left(\beta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta} x_2 \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_2^2} \left[\left(\gamma \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\gamma} x_2 \right) - \bar{\gamma} \omega(\varepsilon) \left(\beta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - \bar{\beta} x_2 \right) \right]$$

où $\omega = \varepsilon/(1 + \varepsilon\beta)$ contient le dénominateur de la série convergente de terme $-\varepsilon\bar{\beta}$. Pour ce CCL, on montre que l'erreur en norme $H^1(\Omega^\varepsilon)$ se comporte comme $\exp(-1/\varepsilon)$. Dans [4], on donne une nouvelle façon de dériver les loi de parois à partir des CCL, ici cela donne l'approximation u^2 solution de

$$-\Delta u^2 = C \quad \text{dans } \Omega^0, \quad u^2 = \varepsilon \bar{\beta} \frac{\partial u^2}{\partial x_2} + \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{\gamma} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2} \quad \text{sur } \Gamma^0, \quad u^2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma^1.$$

On montre en utilisant les techniques de [5], que

$$\|u^\varepsilon - u^2\|_{L^2(\Omega^0)} \leq \|u^\varepsilon - u_\varepsilon^{2,\infty}\|_{L^2(\Omega^0)} + \|u_\varepsilon^{2,\infty} - u^2\|_{L^2(\Omega^0)} \leq K(\exp^{1/\varepsilon} + \varepsilon^{3/2}).$$

Ce résultat montre que les oscillations des CCL du premier ordre $\beta - \bar{\beta}$ sont d'amplitude suffisamment grande pour que si on ne les inclut pas dans la loi de paroi, celle ci ne converge pas plus vite que $\varepsilon^{3/2}$. Dans [1], p. 209 les auteurs avaient déjà constaté numériquement que « la loi de paroi n'apportait pas une amélioration claire des résultats » (voir aussi les tests en Section 7).

5. L'échelle microscopique prise en compte par les lois de paroi multi-échelle

Pour palier au défaut des lois de paroi moyennées, on propose de résoudre un problème de Dirichlet non-homogène explicite sur Γ^0 ,

$$-\Delta V_\varepsilon = C \quad \text{dans } \Omega^0, \quad V_\varepsilon = \varepsilon \frac{\partial u^2}{\partial x_2} \beta \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0 \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2} \gamma \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0 \right) \quad \text{sur } \Gamma^0, \quad V_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma^1.$$

On montre bien cette fois que

Proposition 1. Si on pose $r_{\text{bl}}^2 = u^\varepsilon - V_\varepsilon$ alors,

$$\|r_{\text{bl}}^2\|_{L^2(\Omega^0)} \leq K \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

où K est une constante indépendante de ε .

On voit que ce procédé est explicite, i.e. il dépend du calcul préalable de u^2 .

6. Une loi de paroi oscillante et implicite

Existe-t-il un moyen d'éviter la dépendance des lois paroi d'ordre élevé par rapport aux approximations d'ordre inférieur ? Pour répondre par l'affirmative on se propose de résoudre :

$$-\Delta \Upsilon_\varepsilon = C \quad \text{dans } \Omega^0, \quad \Upsilon_\varepsilon = \varepsilon \beta \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0 \right) \frac{\partial \Upsilon_\varepsilon}{\partial x_2} \quad \text{sur } \Gamma^0, \quad \Upsilon_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma^1.$$

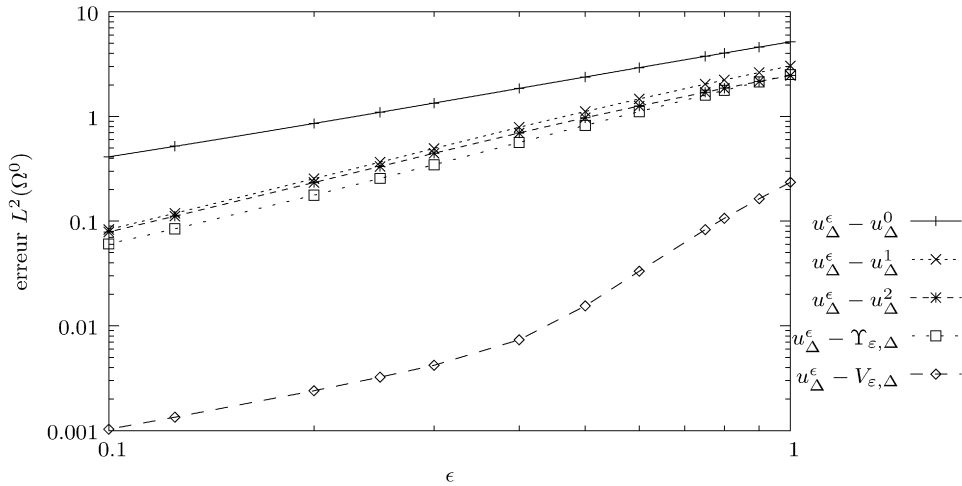


Fig. 1. Erreur $L^2(\Omega^0)$ par rapport à ε .
 Fig. 1. The error $L^2(\Omega^0)$ with respect to ε .

Tableau 1
 Ordres numériques de convergence
 Table 1
 Numerical order of convergence

e_Δ	$u_\Delta^\varepsilon - u_\Delta^0$	r_Δ^1	r_Δ^2	$r_{\text{bl},\Delta}^2$	$r_{\text{bl},i,\Delta}^1$
α	1,11	1,4786	1,3931	2–3,6	1,6227

On donne ici le premier résultat de convergence pour ce type de loi de paroi :

Théorème 2. *On suppose que P^0 est suffisamment régulière et ne touche Γ en aucun point, alors si on pose $r_{\text{bl},i}^1 = u^\varepsilon - \Upsilon_\varepsilon$, on a :*

$$\|r_{\text{bl},i}^1\|_{L^2(\Omega^0)} \leq K \varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

où K est une constante indépendante de ε .

7. Validation numérique

Pour toutes les simulations on utilise le code éléments finis `rheolef`¹ avec une approximation \mathbb{P}_2 Lagrange. On se donne un domaine de longueur $L = 10$ et de hauteur $h = 1$, la rugosité est décrite à l'échelle microscopique comme $P^0 = \{y \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^- \mid y_2 = f(y_1) \equiv -(1 + \cos(y_1))/2 - \delta\}$, $\delta = 5e - 2$. Dans un premier temps on calcule u_Δ^ε , la solution complète sur le domaine rugueux Ω^ε , pour différentes valeurs de ε dans $[0, 1, 1]$. Une fois pour toutes, on calcule les problèmes cellules (3) et (6), desquels on tire les informations nécessaires pour les lois de parois : $\beta_\Delta(x_1/\varepsilon, 0)$, $\gamma_\Delta(x_1/\varepsilon, 0)$, $\bar{\beta}_\Delta$ et $\bar{\gamma}_\Delta$. On restreint le domaine à Ω^0 et on calcule les approximations u_Δ^0 , u_Δ^1 , u_Δ^2 , $V_{\varepsilon,\Delta}$ et $\Upsilon_{\varepsilon,\Delta}$, pour toutes les valeurs de ε . On évalue les erreurs dans la norme $L^2(\Omega^0)$ par interpolation de u_Δ^ε sur les maillages de u_Δ^0 , u_Δ^1 , u_Δ^2 , $V_{\varepsilon,\Delta}$ et $\Upsilon_{\varepsilon,\Delta}$.

On représente Fig. 1 les erreurs, et si on pose $e_\Delta = C\varepsilon^\alpha$, les ordres de convergence numériques sont donnés Tableau 1. On voit qu'on a vérifié numériquement que u^2 , la loi moyennée d'ordre deux donne un ordre de convergence inférieur à celui de u^1 , la loi d'ordre un, donc les estimations obtenues sont effectivement optimales. Ensuite, on remarque que les ordres obtenus pour toutes les estimations sont effectifs sauf pour $V_{\varepsilon,\Delta}$, son ordre étant limité par les

¹ <http://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Pierre.Saramito/rheolef/>

erreurs de l'espace d'approximation par éléments finis (\mathbb{P}_2). Enfin, les loi de paroi implicites donnent de moins bons résultats que les lois explicites, ces dernières contiennent l'information exacte des CCL sur l'interface Γ^0 . Néanmoins la loi implicite multi-échelle introduit une information microscopique oscillante et cela justifie les meilleurs résultats parmi les loi implicites.

Références

- [1] Y. Achdou, O. Pironneau, F. Valentin, Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries, *J. Comput. Phys.* 147 (1998) 187–218.
- [2] Y. Amirat, J. Simon, Influence of rugosity in laminar hydrodynamics, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 323 (1996) 313–318.
- [3] A. Basson, D. Gérard Varet, Wall laws for fluid flows at a boundary with random roughness, *Comm. Pure Appl. Math.* 61 (7) (2008) 941–987.
- [4] D. Bresch, V. Milisic, Higher order boundary layer correctors and wall-laws derivation: a unified approach, *Quart. Appl. Math.* (2008), in press.
- [5] W. Jäger, A. Mikelić, On the roughness-induced effective boundary condition for an incompressible viscous flows, *J. Differential Equations* 170 (2001) 96–122.
- [6] N. Neuss, M. Neuss-Radu, A. Mikelic, Effective laws for the Poisson equation on domains with curved oscillating boundaries, *Appl. Anal.* 85 (2006) 479–502.