Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 521–526

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Existence et unicité de la solutions faible-renormalisée pour un système non linéaire de Boussinesq

Nicolas Bruyère

Laboratoire de mathématiques Raphaël-Salem, UMR 60-85, Université de Rouen, avenue du Madrillet, BP12, 76801 Saint Étienne du Rouvray cedex, France

Reçu le 4 décembre 2007 ; accepté le 28 février 2008

Disponible sur Internet le 11 avril 2008

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Nous donnons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible-renormalisée d'un système non linéaire de Boussinesq. On établit des résultats de régularité pour l'équation de la chaleur que l'on combine avec les techniques usuelles pour les équations de Navier–Stokes et celles des solutions renormalisées pour des problèmes paraboliques. ***Pour citer cet article : N. Bruyère, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Existence and uniqueness of weak-renormalized solutions of a nonlinear Boussinesq system. We give existence and uniqueness results of the weak-renormalized solution for a class of nonlinear Boussinesq systems. We establish regularity results for the heat equation which we combine with the usual techniques for Navier–Stokes equations mixed with the tools involved for renormalized solutions. ***To cite this article: N. Bruyère, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abridged English version

Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^2$ and $T > 0$. We consider the following nonlinear Boussinesq system

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot Du + Dp = F(\theta) & \text{in } (0,T) \times \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{in } (0,T) \times \Omega, \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + u \cdot D\theta = f & \text{in } (0,T) \times \Omega \end{cases} \tag{1}$$

with $\theta = 0$, $u = 0$ on $(0,T) \times \partial\Omega$ and $\theta(t=0) = \theta_0$, $u(t=0) = u_0$ on Ω.

The data f, θ_0, u_0 respectively belong to $L^1(Q)$, $L^1(\Omega)$ and $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$. We are interested in proving existence and uniqueness of the solution of the above problem, which is particularly intricate because of the strong coupling of

Adresse e-mail : nicolas.bruyere@univ-rouen.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.03.005

the equations. As we consider weak solutions for Navier–Stokes equations, the known uniqueness results require to consider the 2-dimensional case.

Similar nonlinear systems were investigated in [1,7–9,12]. Attaoui, Blanchard and Guibé (in [1]), proved existence results for more general system than (1), where in particular, the fixed function f is replaced by $|Du|^2$. Since weak solutions for Navier–Stokes equations are considered, the term $|Du|^2$ belongs to $L^1(Q)$. Therefore, to define a notion of solution for the system, the authors use the framework of renormalized solutions for parabolic problems (introduced in [10,11], see e.g. [4,13,14] for a few applications to the elliptic problems and [2] for parabolic problems). However, proving the uniqueness is more intricate due to the strong nonlinear coupling between the equations. Therefore, we study the simpler version (1) where the right-hand-side f of the heat equation is fixed in $L^1(Q)$. To define the notion of weak-renormalized solution of the system (1) (Definition 2.1 in the French version), we use the formulation of renormalized solutions for parabolic problems introduced by Blanchard and Porretta in [3], which is more effective than the classic one because it simplifies the existence proof.

We assume that F is continuous and satisfies the growth condition $|F(r)| \leqslant a + b|r|^\alpha$, for every $r \in \mathbb{R}$. The parameter α is chosen according to the regularity of θ, such that $F(\theta)$ belongs to $\boldsymbol{L}^2(Q)$ or $L^2(0,T;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$.

The crucial difficulty in the uniqueness proof is that, a priori, $u \cdot D\theta \notin L^1(Q)$ (because $u \in \boldsymbol{L}^4(Q)$ and $D\theta \in \boldsymbol{L}^q(Q)$, for every $q < 4/3$). Therefore, we make stronger hypotheses on the data in order to have $u \cdot D\theta \in L^1(Q)$, more precisely we suppose $f \in L^1(0,T;L^m(\Omega))$ and $\theta_0 \in L^m(\Omega)$ where $1 < m < 2$. We first prove regularity results for the heat equation with such data (see Théorème 2.2 in the French version), specifying the summability with respect to space and time of the solution and its gradient. Moreover we get precise estimates of the solution θ with respect to the data. Then we establish this existence theorem.

Theorem 0.1. *Assume that $f \in L^1(0,T;L^m(\Omega))$, $\theta_0 \in L^m(\Omega)$, where $1 < m < 2$, and $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$. We set $0 \leqslant \alpha < \frac{3m}{2}$. We suppose that the function $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ is continuous and satisfies the growth condition*

$$\left|F(r)\right| \leqslant a + b|r|^\alpha, \quad \text{for every } r \in \mathbb{R},$$

where a, b are constants which can depend on α.

Then, the problem (1) *admits at least a weak-renormalized solution.*

Next, we can remark that $u \cdot D\theta \in L^1(0,T;L^m(\Omega))$. Thus, if (u_1,θ_1) and (u_2,θ_2) are two weak-renormalized solutions for same data (f,θ_0,u_0), subtracting the linear heat equations satisfied by θ_1 and θ_1, implies that $\theta_1 - \theta_2$ is solution of the heat equation with convection term $u_2 \cdot D(\theta_1 - \theta_2)$ and data $(u_1 - u_2) \cdot D\theta_1 \in L^1(0,T;L^m(\Omega))$. Therefore, assuming moreover that F satisfies a Lipschitz type condition and combining the regularity results satisfied by $u_1 - u_2$ and $\theta_1 - \theta_2$, we prove the following uniqueness theorem:

Theorem 0.2. *Assume that the hypotheses of Theorem* 0.1 *hold true. We suppose moreover that F satisfies the following Lipschitz condition*:

$$\left|F(r) - F(s)\right| \leqslant \Lambda|r - s|\left(1 + |r|^\beta + |s|^\beta\right), \quad \text{for every } r, s \in \mathbb{R},$$

where Λ is a positive constant and β satisfies $\max(0, \alpha - 1) \leqslant \beta < \frac{3m}{2} - 1$. *Then, if $\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}$ is sufficiently small, the weak-renormalized solution of the problem* (1) *is unique.*

In [5], we also obtain existence and uniqueness results taking more regular data for Navier–Stokes equations.

1. Introduction

On étudie des systèmes non linéaires d'évolution en dimension 2 dérivant de modèles de mécanique des fluides et décrivant l'écoulement de fluides newtoniens visqueux lorsque des phénomènes thermiques sont pris en compte. Ces systèmes, dits de Boussinesq, couplant les équations de Navier–Stokes et l'équation de la chaleur, s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot Du + Dp = F(\theta) \quad \text{dans } (0,T) \times \Omega, \tag{1a}$$

$$\operatorname{div}(u) = 0 \quad \text{dans } (0,T) \times \Omega, \tag{1b}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \Delta\theta + u\cdot D\theta = f \quad \text{dans } (0,T)\times\Omega, \tag{1c}$$

$$u(t=0) = u_0, \quad \theta(t=0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{1d}$$

$$u = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega \tag{1e}$$

où $T > 0$ et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. On pose $Q = (0,T)\times\Omega$. On rappelle les espaces fonctionnels classiques pour l'étude des équations de Navier–Stokes :

$$\boldsymbol{H}_0^1(\Omega) = \big(H_0^1(\Omega)\big)^2, \quad \boldsymbol{H}_{0,\sigma}^1(\Omega) = \big\{u\in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega);\ \operatorname{div}(u) = 0\big\}, \quad \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega) = \big(\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\big)'$$
$$\boldsymbol{L}^p(\Omega) = \big(L^p(\Omega)\big)^2, \quad \boldsymbol{L}_\sigma^p(\Omega) = \overline{\boldsymbol{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{\boldsymbol{L}^p(\Omega)}}, \quad \boldsymbol{L}_\sigma^2(Q) = L^2\big(0,T;\boldsymbol{L}_\sigma^2(\Omega)\big).$$

On suppose que $f\in L^1(Q)$, $\theta_0\in L^1(\Omega)$ et $u_0\in \boldsymbol{L}_\sigma^2(\Omega)$. On s'intéresse ici à l'existence et surtout à l'unicité particulièrement délicate à prouver du fait du couplage fort entre les deux équations. Comme on considère des solutions faibles pour les équations de Navier–Stokes, on se placera en dimension 2, pour avoir unicité de la solution faible.

Des systèmes non linéaires similaires à (1) ont été étudiés dans [1,7–9,12]. Attaoui, Blanchard et Guibé (dans [1]), montrent des résultats d'existence pour des systèmes plus généraux que (1) où notamment le second membre de l'équation de la chaleur est remplacé par $|Du|^2$. Si l'on considère des solutions faibles pour les équations de Navier–Stokes alors le terme $|Du|^2$ est dans $L^1(Q)$. Pour définir une notion de solution pour le système, on est donc amené à travailler dans le cadre des solutions renormalisées pour des problèmes paraboliques, cadre qui s'avère avantageux car on montre l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions (voir [10,11] pour l'introduction de ce type de solutions, et, par exemple [4,13,14] pour l'application aux problèmes elliptiques et [2], pour le cas parabolique). L'unicité étant particulièrement délicate à montrer du fait du fort couplage non linéaire entre les équations, nous en étudions la version simplifiée (1), où l'on fixe le second membre de l'équation de la chaleur dans $L^1(Q)$. Pour définir la notion de solution faible-renormalisée (Définition 2.1), on utilise la formulation des solutions renormalisées pour des problèmes paraboliques introduite par Blanchard et Porretta dans [3]. Cette formulation s'avère plus aisée à manipuler que la formulation classique car elle simplifie substantiellement la preuve de l'existence. On suppose que F est continue et satisfait une condition de croissance, $|F(r)| \leqslant a + b|r|^\alpha$, pour tout $r\in\mathbb{R}$. Le paramètre α est choisi de telle façon qu'en fonction de la régularité de θ, $F(\theta)$ appartienne à $L^2(0,T;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$ ou $\boldsymbol{L}^2(Q)$.

Pour parvenir à montrer l'existence et l'unicité de la solution du système (1), on établit des estimations précises des solutions des équations de Navier–Stokes et de la chaleur en fonctions des données, à savoir les estimations du type suivant :

$$\|u\| \leqslant C\big(\|g\| + \|u_0\|\big), \qquad \|\theta\| \leqslant C\big(\|f\| + \|\theta_0\|\big), \tag{2}$$

$$\|u_1 - u_2\| \leqslant C\big(\|g_1 - g_2\| + \|u_{0,1} - u_{0,2}\|\big), \qquad \|\theta_1 - \theta_2\| \leqslant C\big(\|f_1 - f_2\| + \|\theta_{0,1} - \theta_{0,2}\|\big) \tag{3}$$

où $\|\cdot\|$ désigne différentes normes associées aux espaces de régularité des fonctions en jeu et où (f,θ_0) et (g,u_0) sont des données respectivement pour l'équation de la chaleur et les équations de Navier–Stokes.

Une des difficultés essentielles dans la preuve de l'unicité réside dans le fait que, a priori, $u\cdot D\theta\notin L^1(Q)$ (car $u\in \boldsymbol{L}^4(Q)$ et $D\theta\in \boldsymbol{L}^q(Q)$, pour tout $q < 4/3$). On fait donc des hypothèses plus fortes sur les données pour avoir au moins $u\cdot D\theta\in L^1(Q)$, à savoir $f\in L^1(0,T;L^m(\Omega))$ et $\theta_0\in L^m(\Omega)$, avec $1 < m < 2$. On montre tout d'abord des résultats de régularité de la solution de l'équation de la chaleur pour de telles données (voir Théorème 2.2) et les estimations du type (2) et (3). On montre alors l'existence d'au moins une solution faible-renormalisée (u,θ) du système (1) (Théorème 2.3). En remarquant qu'alors $u\cdot D\theta\in L^1(0,T;L^m(\Omega))$ et en supposant de plus que F vérifie une condition de type Lipschitz (voir (10)), on montre l'unicité de la solution pour des données suffisamment petites (Théorème 2.4).

Dans [5], on obtient également des résultats d'existence et d'unicité en prenant des données plus régulières pour les équations de Navier–Stokes.

2. Résultats

On définit tout d'abord la notion de solution faible-renormalisée du système (1) :

Définition 2.1. On dit que que le couple de fonctions mesurables (u, θ) est solution faible-renormalisée du problème (1) si u vérifie

$$u \in L^\infty\big(0, T; \boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)\big) \cap L^2\big(0, T; \boldsymbol{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)\big) \tag{4}$$

et si pour presque tout $t \in (0, T)$, pour tout $v \in \boldsymbol{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega u \cdot v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega Du \cdot Dv \,\mathrm{d}x + \int_\Omega (u \cdot D)u \cdot v \,\mathrm{d}x = \big\langle F(\theta), v\big\rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega), \boldsymbol{H}^1_0(\Omega)}; \tag{5}$$

et si θ est une fonction mesurable finie presque partout et vérifiant

$$T_k(\theta) \in L^2\big(0, T; H^1_0(\Omega)\big), \quad \forall k \geqslant 0; \tag{6}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n \leqslant |\theta| \leqslant 2n\}} |D\theta|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = 0; \tag{7}$$

pour tout $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ avec S' à support compact, pour tout $\varphi \in C^\infty_c([0, T) \times \bar{\Omega})$ tel que $S'(\theta)\varphi \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$,

$$\begin{aligned} &-\int_Q \varphi_t S(\theta) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \int_\Omega \varphi(0) S(\theta_0) \,\mathrm{d}x + \int_Q S''(\theta) |D\theta|^2 \varphi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_Q S'(\theta) D\theta \cdot D\varphi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_Q u \cdot DS(\theta)\phi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \int_Q f S'(\theta)\varphi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{8}$$

On donne un résultat de régularité de l'équation de la chaleur avec terme de convection :

Théorème 2.2. *Soient $f \in L^1(0, T; L^m(\Omega))$, $\theta_0 \in L^m(\Omega)$ $(1 < m < 2)$ et $u \in L^2(0, T; \boldsymbol{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega))$. L'équation* (1c) *couplée avec les conditions $\theta = 0$ sur $(0, T) \times \partial\Omega$ et $\theta(t = 0) = \theta_0$ sur Ω admet une unique solution renormalisée θ (i.e. θ vérifie* (6)–(8)*). La fonction θ vérifie de plus*

$$\begin{aligned} &\theta \in L^\infty\big(0, T; L^m(\Omega)\big), \\ &\theta \in L^r\big(0, T; W^{1,q}_0(\Omega)\big), \quad \textit{pour tout } r, q \textit{ vérifiant } \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, \ 1 \leqslant r, q < 2, \\ &\theta \in L^\kappa\big(0, T; L^\mu(\Omega)\big), \quad \textit{pour tout } \kappa, \mu \textit{ vérifiant } \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m}, \ 1 \leqslant \kappa, \mu < +\infty. \end{aligned}$$

De plus, les estimations du type (2) *dans ces espaces sont satisfaites.*

Remarque 1. On obtient également les estimations du type (3) dans les espaces du théorème précédent en utilisant la linéarité de l'équation de la chaleur. Les constantes dans les estimations obtenues sont indépendantes de u car $\operatorname{div}(u) = 0$ et $u = 0$ sur $(0, T) \times \partial\Omega$ et donc dans les estimations le terme de convection disparait à l'aide de la formule de Stokes.

On a alors $u \cdot D\theta \in L^1(0, T; L^m(\Omega))$, avec pour tout $\sigma \geqslant 2/(2 - m)$, l'estimation

$$\|u \cdot D\theta\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} \leqslant C \|u\|^{\frac{2}{m\sigma}}_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))} \|u\|^{\frac{m\sigma-2}{m\sigma}}_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^1_0(\Omega))} \big(\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}\big). \tag{9}$$

On établit les résultats d'existence et d'unicité suivants :

Théorème 2.3. *On suppose $f \in L^1(0, T; L^m(\Omega))$, $\theta_0 \in L^m(\Omega)$, pour $1 < m < 2$ et $u_0 \in \boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)$. Soit $0 \leqslant \alpha < \frac{3m}{2}$. On suppose que F est continue et vérifie l'hypothèse de croissance*

$$\big|F(r)\big| \leqslant a + b|r|^\alpha, \quad \textit{pour tout } r \in \mathbb{R},$$

où a, b sont des constantes pouvant dépendre de α.

Alors, il existe au moins une solution faible-renormalisée du problème (1) *au sens de la Définition* 2.1.

Théorème 2.4. *On fait les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent. On suppose de plus que F vérifie la condition de Lipschitz suivante :*

$$\left|F(r)-F(s)\right| \leqslant \Lambda|r-s|\left(1+|r|^{\beta}+|s|^{\beta}\right), \quad \text{pour tout } r, s \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

où Λ est une constante positive et β satisfait $\max(0, \alpha-1) \leqslant \beta < \frac{3m}{2}-1$.

Alors, pour $\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))}+\|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}$ suffisamment petit, il y a unicité de la solution faible-renormalisée du problème (1).

Remarque 2. Attaoui, Blanchard et Guibé ont montré dans [1] que le résultat d'existence ci-dessus est aussi valable dans le cas $m=1$. On précise cependant ce résultat d'existence car dans le cas $m>1$ l'ensemble des valeurs permises pour α est plus grand ($\alpha \in [0, \frac{3m}{2}[$).

Idée de la démonstration du Théorème 2.3. La preuve repose sur le théorème de point fixe de Schauder. On fixe $\hat{\theta}$ dans un espace de Lebesgue L (précisé plus loin) de sorte que $F(\hat{\theta})$ appartienne à $\boldsymbol{L}^2(Q)$ ou $L^2(0,T;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$. Le choix de L dépend donc de la croissance α de F. Puis à $\hat{\theta}$, on associe u l'unique solution faible des équations de Navier–Stokes (1a), (1b). Enfin, on associe à ce u, l'unique solution renormalisée θ de l'équation de la chaleur (1c). On choisira également L, en fonction des résultats de régularité sur θ, de sorte que θ soit aussi dans L. On a donc construit une application $\Psi : \hat{\theta} \in L \mapsto \theta \in L$. Il s'agit de montrer que cette application est continue, compacte et préserve un convexe fermé borné. On distingue trois cas pour le choix de L :

- $0 \leqslant 2\alpha \leqslant 1$, $L = L^1(Q)$,
- $1 < 2\alpha < 2m$, $L = L^{2\alpha}(Q)$,
- $2m \leqslant 2\alpha < 3m$, $L = L^{\kappa_0}(0,T;L^{\mu_0}(\Omega))$.

Dans les deux premiers cas, on a clairement, d'après la croissance en α de F, $F(\hat{\theta}) \in L^2(Q)$. Tandis que dans le troisième cas, κ_0 et μ_0 sont choisis de telle sorte que

$$\kappa_0 = 2\alpha, \quad \mu_0 = q\alpha, \quad q > 1, \quad \frac{1}{\kappa_0}+\frac{1}{\mu_0} > \frac{1}{m}.$$

D'une part, la croissance α de F implique que $F(\hat{\theta}) \subset L^2(0,T;\boldsymbol{L}^q(\Omega)) \subset L^2(0,T;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$ car $q>1$. D'autre part, en utilisant le Théorème 2.2, on montre que $\theta \in L = L^{\kappa_0}(0,T;L^{\mu_0}(\Omega))$. L'application Ψ est donc bien définie.

Dans les trois cas, la compacité et la continuité de cette application découlent des propriétés de stabilité des solutions renormalisées pour des problèmes paraboliques et des estimations obtenues dans le Théorème 2.2. Tandis que la préservation d'un convexe fermé borné découle des estimations du Théorème 2.2 qui permettent d'affirmer

$$\|\theta\|_L \leqslant C\left(\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))}+\|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}\right). \qquad \square$$

Idée de la démonstration du Théorème 2.4. De manière classique on suppose que (u_1,θ_1) et (u_2,θ_2) sont deux solutions. On utilise les régularités découplées du Théorème 2.2, vérifiées par θ_1 et θ_2, afin d'utiliser le fait que $F(\theta_1)$ et $F(\theta_2)$ appartiennent à $L^2(0,T;\boldsymbol{L}^q(\Omega)) \subset L^2(0,T;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$. Il s'agit ensuite de combiner les inégalités du type (3) suivantes :

$$\begin{aligned}
&\|u_1-u_2\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}_0^1(\Omega))}+\|u_1-u_2\|_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))} \\
&\quad \leqslant C\left(\|u_0\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}, \left\|F(\theta_2)\right\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))}\right)\left\|F(\theta_1)-F(\theta_2)\right\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))}, \\
&\|\theta_1-\theta_2\|_{L^\kappa(0,T;L^\mu(\Omega))} \leqslant C\left\|(u_1-u_2)\cdot D\theta_1\right\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))}.
\end{aligned}$$

avec l'estimation (9) et la condition de Lipschitz (10). On montre finalement une inégalité du type

$$\|\theta_1-\theta_2\| \leqslant C \times \left(\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))}+\|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}\right)\|\theta_1-\theta_2\|.$$

On en déduit alors que pour $\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))}+\|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}$ suffisamment petit $\|\theta_1-\theta_2\| \leqslant 0$, donc $\theta_1=\theta_2$, et par suite $u_1=u_2$. $\square$

Les démonstrations détaillées de ces résultats seront présentées dans [6].

Références

[1] A. Attaoui, D. Blanchard, O. Guibé, Weak-renormalized solutions for a nonlinear Boussinesq system, in preparation.

[2] D. Blanchard, F. Murat, Renormalized solutions of nonlinear parabolic problems with L^1 data: existence and uniqueness, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 127 (6) (1997) 1137–1152.

[3] D. Blanchard, A. Porretta, Stefan problems with nonlinear diffusion and convection, J. Differential Equations 210 (2) (2005) 383–428.

[4] L. Boccardo, J.I. Diaz, D. Giachetti, F. Murat, Existence and regularity of renormalized solutions for some elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms, J. Differential Equations 106 (2) (1993) 215–237.

[5] N. Bruyère, Existence and uniqueness of the solution of a Boussinesq system with nonlinear dissipation, Preprint.

[6] N. Bruyère, Existence and uniqueness of the solution of Boussinesq type systems via regularity results on parabolic problems, Preprint.

[7] B. Climent, E. Fernández-Cara, Some existence and uniqueness results for a time-dependent coupled problem of the Navier–Stokes kind, Math. Models Methods Appl. Sci. 8 (4) (1998) 603–622.

[8] J.I. Díaz, G. Galiano, Existence and uniqueness of solutions of the Boussinesq system with nonlinear thermal diffusion, Topol. Methods Nonlinear Anal. 11 (1) (1998) 59–82.

[9] J.I. Díaz, J.-M. Rakotoson, P.G. Schmidt, A parabolic system involving a quadratic gradient term related to the Boussinesq approximation, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. 101 (1) (2007) 113–118.

[10] R.J. DiPerna, P.-L. Lions, On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability, Ann. of Math. (2) 130 (2) (1989) 321–366.

[11] R.J. DiPerna, P.-L. Lions, Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, Invent. Math. 98 (3) (1989) 511–547.

[12] P.-L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Vol. 1, Incompressible Models, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 3, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996. Oxford Science Publications.

[13] P.-L. Lions, F. Murat, Solutions renormalisées d'équations elliptiques non linéaires, in preparation.

[14] F. Murat, Soluciones renormalizadas de edp elipticas no lineales, Cours à l'université de Seville, Mars 1992.