Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 17–20
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique

Inégalité de la fonction maximale de Hardy–Littlewood dans les espaces d'Orlicz

Nasser Towghi

Northrop Grumman Corporation, Electronic Systems, 10 Norden Place, Norwalk, CT 06855, États-Unis

Reçu le 21 novembre 2007 ; accepté le 22 novembre 2007

Disponible sur Internet le 31 décembre 2007

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Il est bien connu que, si $f \in L^p[0, 2\pi]$ est périodique de période 2π, alors sa fonction maximale de Hardy–Littlewood, $M_f(x)$, appartient à $L^p[0, 2\pi]$ pour $p > 1$. Si $f \in L^1[0, 2\pi]$, alors sa fonction maximale n'a pas besoin d'être intégrable. Dans cette courte Note nous considérons les espaces d'Orlicz des fonctions définies sur $[0, 2\pi]$. Nous montrons que, si Φ est une fonction d'Orlicz, alors $\|M_f\|_{L^\Phi} \leqslant C_\Phi \|f\|_{L^\Phi}$ pour tout $f \in L^\Phi[0, 2\pi]$ si et seulement si $\sum_{j=1} \Phi(\frac{1}{j}) < \infty$, où C_Φ est une constante qui dépend seulement de Φ, et $\|\cdot\|_{L^\Phi}$ est la norme de l'espace d'Orlicz. ***Pour citer cet article : N. Towghi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Hardy–Littlewood maximal function inequality in Orlicz spaces. It is known that if a function $f \in L^p[0, 2\pi]$ then its Hardy–Littlewood Maximal function $M_f(x)$, belongs to $L^p[0, 2\pi]$ for $p > 1$. This results is not true for the case that $p = 1$. In this Note we consider Maximal function for functions belonging to Orlicz spaces. We show that Φ is an Orlicz function then $\|M_f\|_{L^\Phi} \leqslant C_\Phi \|f\|_{L^\Phi}$ for each $f \in L^\Phi[0, 2\pi]$ if and only if $\sum_{j=1} \Phi(\frac{1}{j}) < \infty$. ***To cite this article: N. Towghi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

1. Introduction

Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π et intégrable sur $[0, 2\pi]$. La fonction *maximale* (*de Hardy–Littlewood*) de $f \in L^1([0, 2\pi])$ est la fonction

$$M_f(t) = \sup_{t \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f(x)| \, dx. \tag{1}$$

L'opérateur $f \to M_f$ est appelé opérateur *maximal ou maximal de Hardy–Littlewood*. Il est bien connu que l'opérateur maximal de Hardy–Littlewood est un opérateur borné sur $L^p[0, 2\pi]$ pour $p > 1$. Il n'est cependant pas borné sur

Adresse e-mail : Nasser.Towghi@ngc.com.

1631-073X/$ – see front matter © 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2007.11.020

$L^1[0,2\pi]$ (voir par exemple [4,3] ou le chapitre 3 de [1]). Dans cette Note nous considérons des espaces d'Orlicz générés par des fonctions autres que les puissances de p, et nous examinons les bornes de l'opérateur maximal de Hardy–Littlewood.

Dans cette Note, une fonction d'Orlicz $\Phi(t)$ est une fonction continue non-décroissante et convexe définie pour $t \geqslant 0$ telle que $\lim_{t\to\infty}\Phi(t)=\infty$, et $\Phi(t)=0$ si et seulement si $t=0$. La dernière hypothèse sur Φ dans notre définition est plus forte que l'hypothèse usuelle. Cependant, nous considérerons uniquement les espaces d'Orlicz correspondant à des fonctions d'Orlicz qui tendent vers zéro à l'origine et seulement à l'origine. Puisque Φ est convexe et croissante, il existe une fonction monotone non-décroissante ϕ telle que (voir par exemple le chapitre 4 de [2]), $(\Phi(x)=\int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}t$. Si Φ est une fonction d'Orlicz alors $\frac{\Phi(t)}{t}$ est une fonction non-décroissante. Tout au long de cet article nous supposons que la fonction d'Orlicz Φ satisfait les conditions suivantes,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Phi(x)}{x}=0, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\Phi(x)}{x}=\infty.$$

Nous définissons maintenant la classe d'Orlicz $L^\Phi([a,b])$ des fonctions. Soit f une fonction mesurable sur $[a,b]$ et Φ une fonction d'Orlicz. Nous définissons la L^Φ-norme de f comme

$$\|f\|_{L^\Phi}=\inf\left\{\rho:\ \int_a^b \Phi\left(\frac{x}{\rho}\right)\mathrm{d}x \leqslant 1\right\}. \tag{2}$$

Soit $Ł^\Phi([a,b])=\{f:\ \|f\|_{L^\Phi}<\infty\}$. Pour plus de détails sur les espaces d'Orlicz nous renvoyons le lecteur au chapitre 4 de [2]. Notre résultat principal est

1.1. Théorème. *Si Φ est une fonction d'Orlicz, alors il existe une constante $C=C(\Phi)$ qui dépend seulement de Φ telle que $\|M_f\|_{L^\Phi}\leqslant C\|f\|_{L^\Phi}$ pour chaque $f\in L^\Phi([0,2\pi])$ si et seulement si $\sum_{j=1}^\infty \Phi(\frac{1}{j})<\infty$.*

1.2. Corollaire. *Si $f\in L^\Phi$, et $\Phi(t)=\frac{t}{|\ln t|^{1+\epsilon}}$ alors $\|M_f\|_{L^\Phi}\leqslant C[\|f\|_{L^\Phi}]$ pour chaque $f\in L^\Phi([0,2\pi])$ si et seulement si $\epsilon>0$.*

Lorsqu'il s'agit d'une fonction d'Orlicz dans le contexte d'une séquence ou d'espaces de fonctions d'Orlicz, nous pouvons supposer que la fonction d'Orlicz est dérivable (voir chapitre 3 de [2]). Compte tenu de cela nous allons prouver le lemme suivant qui sera requis pour démontrer le Théorème 1.1.

1.3. Lemme. *Soit Φ une fonction d'Orlicz telle que $\sum_{j=1}^\infty \Phi(\frac{1}{j})<\infty$, alors l'intégrale suivante existe au sens de l'intégrale de Riemann impropre : $\int_0^1 \frac{\Phi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant C_\Phi \sum_{j=1}^\infty \Phi(\frac{1}{j})$.*

Démonstration. Pour $\epsilon>0$, considérons l'approximation de l'intégrale ci-dessus :

$$\int_\epsilon^1 \frac{\Phi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant C_\Phi \sum_{j=1}^N \int_{\frac{1}{j+1}}^{\frac{1}{j}} \frac{\Phi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant C_\Phi \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)(j+1)^2\Phi\left(\frac{1}{j}\right) \leqslant C_\Phi \sum_{j=1}^N \Phi\left(\frac{1}{j}\right). \qquad \square$$

1.4. Démonstration du Théorème 1.1. Supposons que $\sum_{j=1}^\infty \Phi(\frac{1}{j})<\infty$. D'après l'argument présenté dans [1] (voir page 75 de [1]), il suffit de montrer que,

$$-\int_0^\infty \frac{\Phi'(t)}{t}\int_t^\infty y\,\mathrm{d}F(y)\,\mathrm{d}t \leqslant C\left|\int_0^\infty \Phi(y)\,\mathrm{d}F(y)\right|,$$

où $F(y)$ est la fonction de distribution de f. Autrement dit, $F(y)$ est la mesure de l'ensemble $\{t\in[0,2\pi]:\ |f(t)|\geqslant y\}$. Or

$$\int_0^\infty \frac{\Phi'(t)}{t} \int_t^\infty y \, \mathrm{d}F(y) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\Phi'(t)}{t} \int_t^\infty y \, \mathrm{d}F(y) \, \mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{\Phi'(t)}{t} \int_t^\infty y \, \mathrm{d}F(y) \, \mathrm{d}t.$$

En intégrant par parties et en utilisant le fait que $\lim_{t\downarrow 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0$, et pour $y > 1$, $\Phi(y) \geqslant C_{\Phi 1} y$ nous obtenons

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \frac{\Phi'(t)}{t} \int_t^\infty y \, \mathrm{d}F(y) \, \mathrm{d}t\right| &\leqslant \left[\left|\frac{\Phi(1)}{1} \int_1^\infty y \, \mathrm{d}F(y)\right| + \left|\int_0^1 \frac{\Phi(t)}{t^2} \int_t^\infty y \, \mathrm{d}F(y) \, \mathrm{d}t\right| + \left|\int_0^1 \Phi(t) \, \mathrm{d}F(t)\right|\right] \\ &\leqslant C_\Phi \Phi(1) \left|\int_0^\infty \Phi(y) \, \mathrm{d}F(y)\right| + \left|\int_0^1 \frac{\Phi(t)}{t^2} \int_t^\infty y \, \mathrm{d}F(y) \, \mathrm{d}t\right| + \left|\int_0^\infty \Phi(t) \, \mathrm{d}F(t)\right| \\ &\leqslant C_1 \left|\int_0^\infty \Phi(t) \, \mathrm{d}F(t)\right| + \left|\int_0^1 \frac{\Phi(t)}{t^2} \int_t^\infty y \, \mathrm{d}F(y) \, \mathrm{d}t\right|.\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 1.3 nous obtenons

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1 \frac{\Phi(t)}{t^2} \int_t^\infty y \, \mathrm{d}F(y) \, \mathrm{d}t\right| \leqslant C_2(\Phi) \left[\left|\int_0^1 y \, \mathrm{d}F(y)\right| + \left|\int_1^\infty y \, \mathrm{d}F(y)\right|\right] \\ &\quad \leqslant C_2(\Phi) \left[2\pi + C_\Phi \left|\int_1^\infty \Phi(y) \, \mathrm{d}\Phi(y) F(y)\right|\right] \leqslant C_3 \left[2\pi + \left|\int_0^\infty \Phi(y) \, \mathrm{d}F(y)\right|\right].\end{aligned}$$

Nous estimons à présent le terme $\int_1^\infty \frac{\Phi'(t)}{t} \int_t^\infty y \, \mathrm{d}F(y) \, \mathrm{d}t$. Tout d'abord nous notons que,

$$\lim_{t\uparrow\infty} \frac{\Phi(t)}{t} \int_t^\infty y \, \mathrm{d}F(y) = 0. \tag{3}$$

Pour montrer (3), en utilisant le fait que $\frac{\Phi(t)}{t}$ est non-décroissante, nous obtenons

$$\frac{\Phi(t)}{t} \int_t^\infty y \, \mathrm{d}F(y) \leqslant \int_t^\infty \frac{\Phi(y)}{y} y \, \mathrm{d}F(y) = \int_t^\infty \Phi(y) \, \mathrm{d}F(y).$$

Puisque $f \in L^\Phi[0, 2\pi]$, nous obtenons l'égalité (3). En utilisant une intégration par parties et (3), nous obtenons

$$\begin{aligned}&\left|\int_1^\infty \frac{\Phi'(t)}{t} \int_t^\infty y \, \mathrm{d}F(y) \, \mathrm{d}t\right| \\ &\quad \leqslant \left[\left|\frac{\Phi(1)}{1} \int_1^\infty y \, \mathrm{d}F(y)\right| + \left|\int_1^\infty \frac{\Phi(t)}{t^2} \int_t^\infty y \, \mathrm{d}F(y) \, \mathrm{d}t\right| + \left|\int_1^\infty \Phi(t) \, \mathrm{d}F(t)\right|\right] \\ &\quad \leqslant C_\phi \Phi(1) \left|\int_0^\infty \Phi(y) \, \mathrm{d}F(y)\right| + \left|\int_1^\infty \frac{\Phi(t)}{t^2} \int_t^\infty y \, \mathrm{d}F(y) \, \mathrm{d}t\right| + \left|\int_0^\infty \Phi(t) \, \mathrm{d}F(t)\right| \\ &\quad \leqslant C_5 \left|\int_0^\infty \Phi(t) \, \mathrm{d}F(t)\right| + \left|\int_1^\infty \frac{\Phi(t)}{t^2} \int_t^\infty y \, \mathrm{d}F(y) \, \mathrm{d}t\right|.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\frac{\Phi(t)}{t}$ est non-décroissante, et en intégrant par parties, nous obtenons

$$\left|\int_1^\infty \frac{\Phi(t)}{t^2}\int_t^\infty y\,\mathrm{d}F(y)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_1^\infty \frac{1}{t}\int_t^\infty \Phi(y)\,\mathrm{d}F(y)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_1^\infty \Phi(y)\,\mathrm{d}F(y)\right| + \left|\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\int_t^\infty \Phi(y)\,\mathrm{d}F(y)\,\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant \left|\int_0^\infty \Phi(y)\,\mathrm{d}F(y)\right| + C_6\left|\int_0^\infty \Phi(y)\,\mathrm{d}F(y)\right|.$$

Ceci complète la partie « seulement si » de la démonstration. Supposons maintenant que $\sum_{j=1}^\infty \Phi(\frac{1}{j}) = \infty$. Nous allons construire une fonction f telle que $f \in L^\Phi[0, 2\pi]$, mais M_f n'appartienne pas à $L^\Phi[0, 2\pi]$. Notre contre-exemple est une modification du contre-exemple tiré de la page 77 de [3]. Dans [3] il est montré que, $h(y) = I_{(0,.5)}(y)(\frac{\mathrm{d}(1/\ln(1/y))}{\mathrm{d}y}$ est intégrable mais M_h ne l'est pas. Ici $I_{(0,.5)}(y)$ est la fonction indicatrice de l'intervalle (0, .5). Pour notre contre-exemple nous prenons simplement $f(y) = \Phi^{-1}(h(y))$. Par conséquent $f \in L^\Phi[0, 2\pi]$. Or par un argument présenté en page 77 de [3], il est possible de montrer que $M_f(x) \geqslant \frac{1}{|4x|}\int_0^{|x|} f(y)\,\mathrm{d}y$. En utilisant des sommes de Riemann pour estimer $\int_0^1 \Phi(M_f(t))\,\mathrm{d}t$ nous obtenons

$$\int_0^1 \Phi\big(M_f(t)\big)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \Phi\left(\frac{N\int_0^{\frac{j}{N}} f(y)\,\mathrm{d}y}{4j}\right) \geqslant \frac{1}{N}\sum_{j\geqslant N/2}^N \Phi\left(\frac{N\int_0^{\frac{1}{2}} f(y)\,\mathrm{d}y}{4j}\right).$$

Soit $c(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(y)\,\mathrm{d}y/4$, alors $\int_0^1 \Phi(M_f(t))\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{N}\sum_{j\geqslant N/2}^N \Phi(\frac{c(f)N}{j}) \geqslant \sum_{j\geqslant N/2}^N \Phi(\frac{c(f)}{j})$ (puisque Φ est convexe). Puisque $\sum_{j=1}^\infty \Phi(\frac{1}{j}) = \infty$ si et seulement si $\sum_{j=1}^\infty \Phi(\frac{k}{j}) = \infty$ pour n'importe quel k positif, $\sum_{j\geqslant N/2}^N \Phi(\frac{c(f)}{j})$ tend vers l'infini quand N tend vers l'infini. Ceci complète la démonstration du Théorème 1.1.

Références

[1] Y. Katznelson, An Introduction to Harmonic Analysis, Dover Publications, Inc., New York, 1968.
[2] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I: Sequence Spaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 92, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
[3] A. Torchinsky, Real-Variable Methods in Harmonic Analysis, Academic Press, New York, 1986.
[4] A. Zygmund, Trigonometric Series, second ed., Cambridge Univ. Press, London, 1968.