

Analyse numérique/Problèmes mathématiques de la mécanique

Sur la modélisation de la stabilité d'une colonne atmosphérique avec gravité dépendant de l'altitude

Alain-Yves LeRoux, Ludivine Vignon

IMB, UMR 5251, Université Bordeaux 1, 33405 Talence, France

Reçu le 16 février 2007 ; accepté après révision le 22 novembre 2007

Disponible sur Internet le 11 janvier 2008

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Les mesures des champs de densité, pression et température d'une colonne atmosphérique sont souvent réduites et quelquefois erronées, rendant nécessaire une reconstitution. Une technique originale de reconstitution et de stockage concentré, réduit à seulement 6 paramètres, est proposée, puis validée par un modèle mathématique à gravité dépendante de l'altitude, que l'on discrétise par un schéma équilibre original. **Pour citer cet article :** A.-Y. LeRoux, L. Vignon, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008)*.

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

On modelling the stability of an atmospheric column, with an altitude dependent gravity. The measures of the fields of density, pressure and temperature of an atmospheric column are often scarce and sometimes inaccurate, which needs a necessary reconstruction. An original technique of reconstruction with a confined storage reduced to 6 parameters only, is proposed and validated by using a mathematical model with an altitude dependent gravity, and a discretization by an original well-balanced scheme. **To cite this article:** A.-Y. LeRoux, L. Vignon, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008)*.

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Les mesures des champs de densité, de température ou de pression à différents niveaux d'une colonne atmosphérique, par un ballon sonde par exemple, se retrouvent en général très réduites, quelquefois de l'ordre de seulement une dizaine de valeurs fiables sur une colonne de 20 000 mètres de hauteur, en un point donné, de latitude ϕ connue (et fixe, bien entendu). La reconstitution de ces champs par de simples méthodes d'interpolation n'est absolument pas exploitable. Nous proposons une méthode de reconstruction comportant très peu de paramètres, de telle façon qu'un jeu de mesures réduit à peu de valeurs puisse encore être exploité. La validation est assurée par un schéma équilibre (ou *Well Balanced scheme*, voir [3]) opérant sur les équations d'Euler, en utilisant les données reconstruites comme données initiales, et elle n'est effective que si l'immobilité totale, ou équilibre statique, est constatée, ce que les tests confirment. La sensibilité de la méthode numérique est ensuite éprouvée, en introduisant une perturbation par un dépôt d'énergie concentré à une certaine altitude. Un retour à l'équilibre statique est également observé.

Adresses e-mail : Alain-Yves.LeRoux@math.u-bordeaux1.fr (A.-Y. LeRoux), Ludivine.Vignon@math.u-bordeaux1.fr (L. Vignon).

2. La méthode de reconstruction

A une latitude ϕ et une altitude z données, l'expression du paramètre de gravité est de la forme $g(z, \phi) = g_0(1 + \gamma_1 \sin^2 \phi + \gamma_2 \sin^2 2\phi - \gamma_0 z)$, avec $g_0 = 9,780318$, $\gamma_0 = 3,15 \times 10^{-7}$, $\gamma_1 = 5,3024 \times 10^{-3}$, $\gamma_2 = 5,9 \times 10^{-6}$. Ici, la latitude ϕ est fixe et g s'écrit $g(z, \phi) = g_\phi(1 - \alpha_\phi z)$, avec g_ϕ et α_ϕ indépendants de z . On note ρ la densité, w la composante verticale de la vitesse, p la pression, $E = \frac{w^2}{2} + I$ l'énergie totale par unité de masse, où I est l'énergie interne liée à p et ρ par la loi d'état ou loi de Mariotte, en introduisant la température T , $p = (\gamma - 1)\rho I = K\rho T$, avec $K = 287,06$ et $\gamma = 1,4$ étant la constante adiabatique de l'air. Les équations d'Euler s'écrivent

$$\rho_t + (\rho w)_z = 0, \quad (\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_z + \rho g(z, \phi) = 0, \quad (\rho E)_t + ((\rho E + p)w)_z + \rho g(z, \phi)w = 0. \quad (1)$$

Lorsque l'équilibre statique ($w = 0$ et invariance en temps) est réalisé, ce système se réduit à une loi d'état et une seule équation non triviale, traduisant l'équilibre géostrophique :

$$p = K\rho T, \quad p_z + \rho g(z, \phi) = 0, \quad (2)$$

pour trois inconnues : p , ρ et T . Il reste à proposer une troisième équation.

L'analyse des fichiers de mesures z_m, p_m, ρ_m, T_m (empruntés à [1] et [4], et portant sur une hauteur H de 20 000 mètres) conduit à proposer l'équation supplémentaire sous la forme $p = A(z)\rho^\beta$, où $A(z)$ est une fonction positive de $z \geq a$, a étant l'altitude au sol par rapport au niveau $z = 0$, détaillée plus loin, et β est une constante qui peut être évaluée par régression linéaire en échelle logarithmique sur $\ln(p_m) = \beta \ln(\rho_m) + \ln(A(z_m))$. La fonction $A(z)$ est évaluée à partir de l'interpolée $R_m(z)$ des valeurs $KT_m\rho_m^{1-\beta}$, une fois la valeur de β déterminée. On observe un rebroussement à une altitude $z = M$, déterminée en recherchant le minimum de $R'_m(z)$. Ensuite, les données au sol $R_m(a)$ étant connues, on note P_M la projection orthogonale (au sens classique dans $L^2([a, H])$) de $R_m(z) - R_m(a)$ sur l'espace de dimension 3 généré par

$$A_1(z) = z - a, \quad A_2(z) = (z - a) \text{Min}(z - M, 0), \quad A_3(z) = (z - a) \text{Max}(0, z - M).$$

Ainsi, pour un point donné (c'est-à-dire ϕ et a donnés), il suffit de 6 données : $\beta, M, T_m(a)$, et les 3 composantes sur la base A_1, A_2, A_3 pour reconstituer complètement les champs de p, ρ et T sur la colonne atmosphérique. Le paramètre M peut être assimilé à la tropopause et la variation de $A(z)$ n'est sensible que sur les températures. En pratique $\beta > 1$, en restant proche de 1.

3. La validation par un schéma équilibre

Il s'agit maintenant de tester la stabilité statique de ces données, en les utilisant comme données initiales pour une simulation numérique discrétisant le système (1) et en observant qu'il n'y a strictement aucune mise en mouvement perceptible, après un nombre conséquent de cycles de calculs. Ceci est possible en introduisant un schéma équilibre (*Well Balanced scheme*) particulier. Les conditions aux limites sont $w(a, t) = 0$ au sol et $\frac{\partial w}{\partial z}(H, t) = 0$ en altitude.

Un schéma équilibre consiste à s'affranchir du terme source pour donner au système une forme conservative homogène « $U_t + F(U)_z = 0$ », au niveau de chaque maille. Comme $g_\phi(\rho_t + (\rho w)_z) = 0$, avec g_ϕ indépendant de z , le vecteur $(g_\phi \rho, -g_\phi \rho w)$ s'interprète comme le gradient d'un potentiel q appelé *pression hydrostatique*, c'est-à-dire $q_t = -g_\phi \rho w, q_z = g_\phi \rho$, ce qui permet de remplacer (1) par les quatre équations suivantes, où $h(z) = 1 - \alpha_\phi z$,

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho w)_z &= 0, & (\rho q)_t + (\rho q w)_z &= 0, \\ (\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_z + h q_z &= 0, & (\rho E - h q)_t + ((\rho E + p)w)_z &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

qui constituent un système de forme conservative et homogène, en posant

$$U = (\rho, \rho q, \rho w, \rho E - \bar{h} q), \quad F(U) = (\rho w, \rho q w, \rho w^2 + p + \bar{h} q, (\rho E + p)w),$$

où $h(z)$ est approché par une constante (par maille) notée ici \bar{h} .

L'approximation numérique utilise le principe du schéma de Godunov, en notant U_j^n la valeur approchée de $U(j\Delta z, n\Delta t)$, Δz et Δt étant les pas de discrétisation en espace et en temps. La solution du problème de Riemann, qui consiste à résoudre (3) à partir d'une condition initiale égale à un état constant U_g pour $z < 0$ et à un état constant U_d pour $z > 0$, ne dépend que du rapport $\frac{z}{\bar{h}}$ et est notée $R(U_g, U_d, \frac{z}{\bar{h}})$. Le principe du schéma de Godunov consiste,

à partir d'une solution constante par maille, à résoudre tous les problèmes de Riemann associés à chaque interface entre les mailles, puis à effectuer une projection orthogonale sur chaque maille après une durée Δt . On obtient le schéma

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} (F(R(U_j^n, U_{j+1}^n, 0)) - F(R(U_{j-1}^n, U_j^n, 0)))$$

lorsque Δt est suffisamment petit pour limiter l'interaction entre les problèmes de Riemann voisins, ce qui se traduit par la condition (dite CFL)

$$\frac{\Delta t}{\Delta z} \max(|w_j^n| + c_j^n) \leq 1,$$

où $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ est la vitesse du son.

La résolution du problème de Riemann consiste à déterminer des états constants séparés par des ondes qui peuvent être des détente, des chocs ou des discontinuités de contact, et qui se propagent à des vitesses données par les valeurs propres de la matrice de flux $F'(U)$, à savoir $w - c$, w (double), $w + c$ pour les détente et les discontinuités de contact, ou par les relations de Rankine Hugoniot pour les chocs. Pour mémoire, les invariants de Riemann sont respectivement $q = cte$, $\frac{p}{\rho^\gamma} = cte$ et $w + \frac{2c}{\gamma-1} = cte$ pour une onde de vitesse $w - c$, puis $q = cte$, $\frac{p}{\rho^\gamma} = cte$ et $w - \frac{2c}{\gamma-1} = cte$ pour une onde de vitesse $w + c$, et enfin $w = cte$, $p + \bar{h}q = cte$ pour une discontinuité de contact de vitesse w . Cependant l'exploitation des invariants de Riemann et les tests de distinction d'avec les ondes de choc rend un solveur exact relativement complexe et pénalise inutilement les durées de calcul. Ceux-ci peuvent être considérablement réduits, sans perte de précision (qui reste d'ordre un) en n'utilisant que les relations de Rankine Hugoniot, sans distinguer la nature des ondes.

Sur chaque saut d'une quantité Q , passant de Q_g à Q_d , on note : $[Q] = Q_d - Q_g$ et $\bar{Q} = \frac{Q_g + Q_d}{2}$. Ainsi, les relations de Rankine Hugoniot conduisent aux conditions suivantes, où $v = \frac{1}{\rho}$,

$$[w] = \pm \sqrt{\frac{\gamma \bar{p}}{\bar{v}}} [v] \quad \text{et} \quad [q] = 0 \quad (\text{vitesse } \bar{w} \mp \sqrt{\gamma \bar{p} \bar{v}}), \quad [w] = [p + \bar{h}q] = 0 \quad (\text{vitesse } w).$$

Ces équations, résolues par une méthode itérative, permettent de déterminer les différents états intermédiaires, et en particulier $R(U_j^n, U_{j+1}^n, 0)$ à chaque interface. Dans chaque maille, $h(z)$ est approché par la constante $\bar{h}_j = h(j \Delta z)$. La construction de ce solveur est détaillée dans [5]. Il s'agit d'un schéma équilibre (voir [1]) qui généralise [1] et [2] dans le cas g variable, également adaptable au cas où Δz est aussi variable.

4. Les tests de validation

Le schéma précédent permet de tester la fiabilité de la reconstruction des différents champs de pression, densité et température. Les champs reconstruits sont projetés sur un maillage (de l'ordre de 160 mailles dont la longueur augmente avec l'altitude) et sont interprétés comme la condition initiale. On constate l'immobilité après une centaine de pas de temps (quelques millièmes de micron par heure). La Fig. 1, de gauche, représente le champ de pression en fonction de l'altitude à différents pas de temps. Les modifications induites sur les champs de pression, densité et température restent imperceptibles, même au bout de 60 000 pas de temps, ce qui correspond à la simulation de 25 minutes de temps réel.

Un autre test de fiabilité a consisté en un dépôt d'énergie (une surpression de 5 %) dans une maille à une hauteur donnée (proche de $0,25H$). Le calcul produit deux ondes partant de cette maille, l'une vers le sol et l'autre vers le zénith, puis un retour à une nouvelle situation d'équilibre immobile, proche de la précédente, dans la mesure où l'apport d'énergie est conservé (figure au centre qui représente la vitesse). Le profil de température (Fig. 1, de droite) s'équilibre plus lentement (le saut observé dans la maille du dépôt d'énergie s'atténue plus progressivement) que la pression, en provoquant au même niveau un déficit en densité (trou d'air). La pression atteint sa valeur d'équilibre en près de 200 s, alors que le temps de relaxation pour la température et la densité est d'environ 600 s. D'autres tests sont détaillés dans [5].

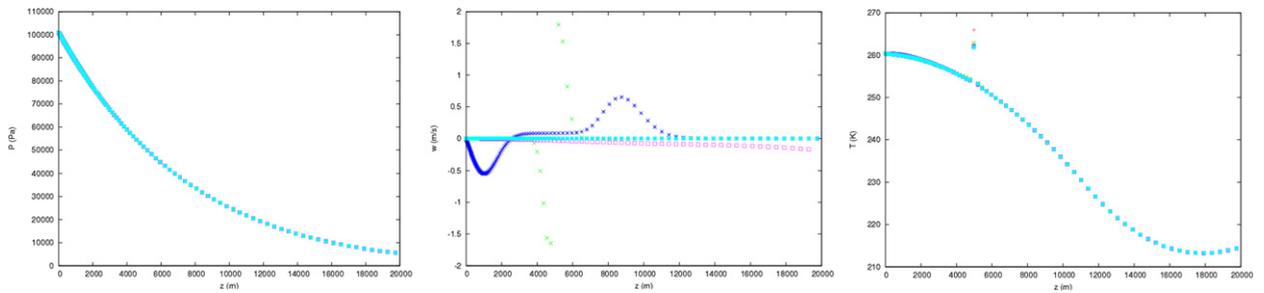


Fig. 1. Test équilibre : pression (gauche), dépôt d'énergie : vitesse (centre), température (droite).

Fig. 1. Equilibrium test: pressure (left), energy deposit: velocity (middle), temperature (right).

5. Conclusion

Un premier résultat essentiel est cette technique de reconstruction des mesures pauvres en données pour en faire des données complètement exploitables. Ensuite, la construction et l'exploitation du schéma équilibre proposé en confirment la totale fiabilité. Inversement, étant donné un profil de données mesurées en un point inconnu, il est possible d'en déterminer la latitude avec une très grande précision, de l'ordre de la minute (soixantième de degré). Il suffit d'exploiter le schéma pour différentes valeurs de ϕ et de procéder par exemple à une dichotomie. Enfin, le stockage des données devient considérablement réduit, dans la mesure où seulement la valeur de β , la température au sol, la hauteur de l'inflexion M , et trois paramètres caractérisant A sont exigés, soit 6 données seulement pour reconstituer les trois champs sur 20 000 m d'altitude, qui sont ainsi exploitables pour toute simulation de l'environnement (dispersion de polluants, météorologie, ...).

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Thierry Jimonet, de Météo-France DP/SERV/FDP, qui a bien voulu mettre gracieusement à notre disposition des jeux de données expérimentales effectuées en Guadeloupe, nous permettant de valider cette technique, en comparaison avec d'autres données obtenues par ailleurs, dont celles de [1] qui proviennent du CEA et concernent une latitude européenne.

Références

- [1] P. Cargo, Nouveaux modèles numériques pour l'hydrodynamique atmosphérique et la magnéto-hydrodynamique idéale, Thèse de l'Université de Bordeaux 1, 1995.
- [2] P. Cargo, A.Y. LeRoux, Un schéma équilibre adapté aux modèles d'atmosphère avec terme de gravité, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série A 318 (1995) 73–76.
- [3] J.M. Greenberg, A.Y. LeRoux, A well balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations, SIAM Journal on Numerical Analysis 33 (1) (1996) 1–16.
- [4] T. Jimonet, Données de Radiosondage, Météo-France DP/SERV/FDP, Comm. personnelle.
- [5] L. Vignon, A.Y. LeRoux, Représentation d'une colonne d'atmosphère au repos avec la gravité variable, sur le site <http://www-gm3.univ-mrs.fr/~leroux/frame.html>, 2006.