

Géométrie/Logique

Modèle complétude des structures o-minimales polynomialement bornées

Olivier Le Gal

IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France

Reçu le 25 octobre 2006 ; accepté après révision le 30 octobre 2007

Disponible sur Internet le 3 décembre 2007

Présenté par Bernard Malgrange

Résumé

On montre un théorème du complémentaire explicite «à la Gabrielov '96» dans les structures o-minimales polynomialement bornées. Cette propriété équivaut à la modèle complétude de la structure $\langle \mathbb{R}, >, +, *, \mathcal{F} \rangle$, où \mathcal{F} est une algèbre différentielle globale d'applications définissables dans une structure o-minimale polynomialement bornée. *Pour citer cet article : O. Le Gal, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Model completeness in o-minimal polynomially bounded structures. We show an explicit theorem of the complement “Gabrielov’s ’96 like” for o-minimal polynomially bounded structures. In model theoretic terms, this is equivalent to the model completeness of $\langle \mathbb{R}, >, +, *, \mathcal{F} \rangle$ where \mathcal{F} is a global differential algebra of maps definable in an o-minimal polynomially bounded structure. *To cite this article: O. Le Gal, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

En '68, A. Gabrielov montre la stabilité des sous-analytiques globaux par passage au complémentaire [3]. Ce résultat est repris par L. van den Dries et J. Denef, qui en déduisent la modèle complétude de la structure \mathbb{R}_{an} [2]. En '96, A. Gabrielov améliore son résultat par une version explicite [4]. Les preuves de modèle complétude suivent en général le schéma de [3,2] (cf. [9,7]). Cette Note adapte la preuve plus directe de [4] dans le cadre o-minimal polynomialement borné.

Une structure sur \mathbb{R} est une famille $\mathcal{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n$ où \mathcal{S}_n est une sous-algèbre booléenne de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ contenant les semi-algèbres, telle que \mathcal{S} soit stable par projection canonique et produit cartésien. Si ses ensembles définissables ont un nombre fini de composantes connexes, \mathcal{S} est o-minimale, et si toute fonction définissable vérifie : $\exists n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x^n = 0$, \mathcal{S} est polynomialement bornée (cf. [1,8]). De nombreuses propriétés sous-analytiques sont vérifiées dans ce cadre. On retrouve par exemple les inégalités de Łojasiewicz. Notre preuve se fonde sur celles-ci, via un résultat de Miller (Théorème 1.3).

Adresses e-mail : olivier.legal@univ-rennes1.fr, Olivier.Le-Gal@u-bourgogne.fr.

Une *algèbre différentielle globale* est une famille $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$, où \mathcal{F}_n est une sous-algèbre de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ contenant les polynômes, stable par différentiation, et telle que \mathcal{F} soit stable par composition affine à droite. Ces conditions doivent aussi être vérifiées à l'infini : pour tout f de \mathcal{F}_n , si $\sigma(x) = x/\sqrt{1+x^2}$, l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(\sigma^{-1}(x_1), \dots, \sigma^{-1}(x_n))$ s'étend en une fonction g , C^∞ sur un voisinage de $[-1, 1]^n$, et $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto g(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_{n-1}), 1)$ appartient à \mathcal{F}_{n-1} .

Les *semi- \mathcal{F}* sont les ensembles $\bigcup_{i=1 \dots m} \{x \in \mathbb{R}^n; F_i(x) = 0, G_i(x) > 0\}$, où les coordonnées des F_i et G_i sont dans \mathcal{F} , l'inégalité $G(x) > 0$ se lisant $g(x) > 0$ pour toute coordonnée g de G . Les *sous- \mathcal{F}* sont les projections canoniques des semi- \mathcal{F} .

Théorème 1.1 (*Théorème du complément*). *Si \mathcal{F} est une algèbre différentielle globale d'applications définissables dans \mathcal{S} , o-minimale polynomialement bornée, le complémentaire d'un sous- \mathcal{F} est sous- \mathcal{F} .*

Classiquement (cf. [2]), ce résultat s'exprime en terme de théorie des modèles :

Théorème 1.2 (*Modèle complétude*). *Si \mathcal{F} est une algèbre différentielle globale d'applications définissables dans \mathcal{S} , o-minimale polynomialement bornée, $(\mathbb{R}, >, +, *, \mathcal{F})$ est modèle complète.*

Ces structures étant quasi-analytiques [5], le traitement de [7] donnerait le même résultat. Notre approche ne nécessite pas la résolution des singularités, et donne une description détaillée des semi- \mathcal{F} . Dans sa thèse, A. Rambaud obtient aussi des résultats similaires – et une élimination des quantificateurs, sur un autre langage [6]. L'intérêt de notre résultat tient à la constructivité de la preuve.

On fixe désormais \mathcal{F} et \mathcal{S} vérifiant les hypothèses du Théorème 1.1.

Voici le principe de certaines preuves de modèle complétude. Soit $Y \subset \mathbb{R}^n$ un sous- \mathcal{F} . On veut montrer que Y est sous- \mathcal{F} . Il est suffisant de montrer qu'il existe une partition finie de \mathbb{R}^n adaptée à $Y : \mathbb{R}^n = \bigcup_i S_i$, avec S_i sous- \mathcal{F} connexe et $S_i \subset Y$ ou $S_i \cap Y = \emptyset$. On procède par récurrence sur $d = \dim Y$. Projétons Y sur \mathbb{R}^d . On montre que l'on peut choisir cette projection p finie sur Y . Il existe alors un ensemble $Z \subset \mathbb{R}^d$ de codimension 1, tel que le cardinal de $Y_t = \{y \in Y; p(y) = t\}$ soit constant sur chaque composante de $\mathbb{R}^d \setminus Z$. Il s'agit de choisir Z sous- \mathcal{F} : en appliquant l'hypothèse de récurrence à Z et $Z \cap p(Y)$, on construit une partition de \mathbb{R}^n adaptée à Y (cf. [3,4,9,7]).

Il y a plusieurs façons de choisir Z sous- \mathcal{F} . Nous suivons là [4]. Le Lemme 3.1 montre que Y est l'image d'un semi- \mathcal{F} X de même dimension d par une projection π . On prend $Z = p \circ \pi(\partial X) \cup V \cup p \circ \pi(\{x; (x, x) \in \partial W\})$, où V désigne les valeurs critiques (y compris asymptotiques – d'où les conditions à l'infini) de $p \circ \pi|_X$ et où $W = \{(x, y) \in X^2; \pi(x) \neq \pi(y), p \circ \pi(x) = p \circ \pi(y)\}$. Le Lemme 2.1 montre que V est sous- \mathcal{F} , et le Lemme 4.1 que les frontières sont semi- \mathcal{F} . Par conséquent, Z est sous- \mathcal{F} . Les trois Lemmes 2.1, 3.1, 4.1 impliquent donc le Théorème 1.1. Nous consacrons une section à chacun d'entre eux.

Les démonstrations reposent sur un théorème de C. Miller [5]. Soit f une application définissable dans \mathcal{S} avec $f(x, t) \sim_{t \rightarrow \infty} k(x) * t^{r(x)}$. On a :

Théorème 1.3. (*Voir Miller, [5].*) *L'exposant $r(x)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*

Nous utilisons une autre forme de ce résultat. Pour F définissable dans \mathcal{S} et $x \in F^{-1}(0)$, on appelle *ordre* de F en x un nombre r_x tel que $\sup_{|y-x|=t} |F(y)| \sim_{t \rightarrow 0} k_x * t^{r_x}$, avec $k_x \neq 0$. Il vient alors :

Corollaire 1.4. *L'ordre d'une application définissable dans \mathcal{S} ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*

2. Un lemme de régularisation

Soit $X = \{x; F(x) = 0, G(x) > 0\}$ un semi- \mathcal{F} . On dit que X est *régulier en x* s'il coïncide au voisinage de x avec les zéros d'une submersion. Si certaines coordonnées de F forment une telle submersion, X est régulier *dans sa présentation en x* . Un ensemble est *régulier* s'il l'est en chacun de ses points.

Lemme 2.1. *Tout semi- \mathcal{F} X admet une partition finie en semi- \mathcal{F} réguliers dans leur présentation.*

On suppose que $X = \{x \in \mathbb{R}^k; F(x) = 0, G(x) > 0\}$ est inclus dans un semi- \mathcal{F} $E = \{x \in \mathbb{R}^k, H(x) = 0, K(x) > 0\}$ régulier dans cette présentation, quitte à prendre $E = \mathbb{R}^k$. On montre alors la propriété 2.2. Le Lemme 2.1 s'en déduit en appliquant récursivement la propriété 2.2 aux couples (X_i, E_i) , la dimension des espaces ambiants E_i décroissant à chaque étape.

Proposition 2.2. *Soit (X, E) un couple de semi- \mathcal{F} , $X \subset E$, E régulier dans sa présentation. Alors il existe une partition en semi- \mathcal{F} : $X = Y \cup X_1 \cup \dots \cup X_i$, et des semi- \mathcal{F} réguliers dans leur présentation E_1, \dots, E_i , tels que Y soit régulier dans sa présentation, et que pour $l \leq i$, $X_l \subset E_l$ et $\dim E_l < \dim E$.*

Preuve de la proposition 2.2. On pose $\dim E = n$. Après d'éventuelles restrictions et quitte changer de coordonnées, on peut supposer qu'en chaque point de E , H est une submersion et vérifie les hypothèses du théorème des fonctions implicites. On note $x = (x', x'')$, pour x dans $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{n+(k-n)}$. Au voisinage de $x \in E$, E est donc le graphe d'une application Φ_x , définie sur un voisinage \mathcal{V}_x de x' dans \mathbb{R}^n .

Pour $x \in E$, on note $F'_x : y' \in \mathcal{V}_x \mapsto F(y', \Phi_x(y'))$. Les Φ_x n'appartiennent a priori pas à \mathcal{F} , mais leurs dérivées partielles s'expriment en fonction de celles de H en x . En particulier, les dérivées partielles de F'_x en x' appartiennent à \mathcal{F} . Par exemple, $DF'_x(x') = [\frac{\partial F}{\partial x'}(x)] - [\frac{\partial F}{\partial x''}(x)] * [\frac{\partial H}{\partial x''}(x)]^{-1} * [\frac{\partial H}{\partial x'}(x)]$.

Les points $x \in X$ au voisinage desquels X et E coïncident sont ceux où $F|_E$ est d'ordre infini. D'après (1.4), l'ordre de F ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Il existe donc un entier N tel que l'ordre de F en x soit infini dès qu'il est supérieur à N .

On pose $Y = \{x \in \mathbb{R}^k; F(x) = 0, H(x) = 0, G(x) > 0, \forall \alpha, |\alpha| < N \Rightarrow \partial_\alpha F'_x(x') = 0\}$.

Ce semi- \mathcal{F} est formé des points où X et E coïncident ; il est régulier dans cette présentation.

On ordonne \mathbb{N}^n par la norme, puis l'ordre lexicographique. Pour chaque $\alpha \neq 0$ de \mathbb{N}^n , on choisit β_α tel que $|\alpha - \beta_\alpha| = 1$. Si $X_\alpha = \{x \in X; \forall \beta < \alpha, \partial_\beta F'_x(x') = 0, \partial_\alpha F'_x(x') \neq 0\}$ et $E_\alpha = \{x \in E; \partial_{\beta_\alpha} F'_x(x') = 0, \partial_\alpha F'_x(x') \neq 0\}$, la partition cherchée est $X = Y \cup \bigcup_{|\alpha| < N} X_\alpha$, avec $X_\alpha \subset E_\alpha$ et $\dim E_\alpha < n$. \square

3. Un lemme de section

Il s'agit de donner une section de la projection d'un semi- \mathcal{F} (comparer avec [4, lemme 2]).

Lemme 3.1. *Soit $\pi(X) = Y \subset \mathbb{R}^n$ la projection d'un semi- \mathcal{F} X de \mathbb{R}^{n+m} . Il existe alors un semi- \mathcal{F} $X' \subset \mathbb{R}^{n+m}$ tel que $Y = \pi(X')$, avec $\dim X' = \dim Y$.*

Preuve. On suppose X de dimension k , régulier dans sa présentation (cf. Lemme 2.1) : $X = \{x; F(x) = 0, G(x) > 0\}$, avec F de rang $n + m - k$ en tout point de X . Quitte à étudier à part le semi- \mathcal{F} formé de ses points critiques, on suppose que $\pi|_X$ est régulière. On note $x = (y, z)$ les coordonnées de \mathbb{R}^{n+m} . Si $k > d$, il faut faire baisser la dimension de X . Si g_* est le produit des coordonnées de G , on pose $z_0 = g_*(x) * (|x|^2 + 1)^{-N}$, N vérifiant : $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g_*(x) * (|x|^2 + 1)^{-N} = 0$. Restreinte à chaque fibre $X_y = \{x \in X; \pi(x) = y\}$, z_0 admet des points critiques. Ceux-ci forment l'ensemble

$$X^0 = \left\{ x = (y, z) \in X; \text{rang } \frac{\partial(F, z_0)}{\partial z} < m + d - k \right\}. \tag{1}$$

Cet ensemble est semi- \mathcal{F} . Pour $y \in Y$, X_y^0 est non vide et compact : z_0 est critique, donc constant sur chaque composante de X_y^0 , qui est donc une union de composantes de certains niveaux non nuls de $z_0|_{X_y}$.

Récursivement, nous définissons de même pour $i = 1, \dots, m$: $X^i = \{x = (y, z) \in X^{i-1}; \text{ la fonction coordonnée } z_i|_{X_y^{i-1}} \text{ est critique en } z\}$. Comme pour X^0 et par récurrence, X^i est semi- \mathcal{F} : il se définit en fonction de X^{i-1} comme dans (1). Sa fibre X_y^i est non vide et compacte pour y dans Y . De plus X_y^m est de dimension au plus 0, car les coordonnées z_i sont toutes constantes sur chacune de ses composantes. Ainsi, X^m est de dimension au plus d , et $\pi(X^m) = Y$. \square

4. Un lemme de frontière

Lemme 4.1. *Si X est semi- \mathcal{F} , sa frontière ∂X est semi- \mathcal{F} .*

Soit $X = \{x; F(x) = 0, G(x) > 0\}$ un semi- \mathcal{F} . On pose $g_{\min}(x) = \min g_i(x)$, et $Z = \{z; F(z) = 0, g_{\min}(z) = 0\}$. Soit $X_x(l, m) = \{y; |F_m(y)| < |x - y|^m, G_l(y) > |y - x|^l\}$, où F_m et G_l désignent les développements de Taylor de F et G en x aux ordres m et l . Nous allons montrer la proposition :

Proposition 4.2. *Il existe deux entiers λ et μ , tels que pour x dans Z , $x \in \partial X \Leftrightarrow x \in \overline{X_x(\lambda, \mu)}$.*

Cette proposition implique le Lemme 4.1 : à x fixé, $X_x(\lambda, \mu)$ est semi-algébrique, et le théorème de Tarski–Seidenberg donne une expression explicite pour son adhérence : la condition $x \in \overline{X_x(\lambda, \mu)}$ est semi-algébrique en les dérivées partielles de F et G en x . Ainsi, $\{x; x \in \overline{X_x(\lambda, \mu)}\}$ est semi- \mathcal{F} .

Preuve de la proposition 4.2. *Recherche de l’entier λ .* Soit $S_x(t) = \{y \in X; |x - y| = t\}$.

$$\text{Considérons } \Gamma = \left\{ (x, t, M); x \in \partial X, t \in \mathbb{R}_+, M = \max_{z \in S_x(t)} g_{\min}(z) \right\}.$$

D’après le théorème du choix définissable, il existe une application $M_x(t)$ définissable telle que $(x, t, M_x(t))$ appartienne à Γ , pour x dans ∂X et t assez petit, car $\Gamma_{(x,t)} \neq \emptyset$ si $x \in \partial X$ et t petit.

Pour x dans ∂X , $M_x(t)$ est non nul pour $t > 0$ mais tend vers 0 avec t . Il existe donc r_x et k_x deux réels non nuls tels que $M_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} k_x t^{r_x}$. D’après le Théorème 1.3, r_x ne prend qu’un nombre fini de valeurs lorsque x parcourt ∂X . On choisit λ un entier strictement supérieur à toutes les valeurs prises par r_x .

$$\text{Alors, pour } x \text{ appartenant à } Z \text{ et } \mu \text{ arbitraire, } x \in \partial X \Rightarrow x \in \overline{X_x(\lambda, \mu)}. \quad (2)$$

En effet, si $x \in \partial X$ et $\mu > 0$, on vérifie que le chemin $\gamma(t)_{t \in (0, \epsilon)}$ inclus dans X , issu de x et sur lequel g_{\min} atteint son maximum à distance t de x appartient à $X_x(\lambda, \mu)$, pour t positif et assez petit.

Recherche de l’entier μ . La construction de μ est similaire celle de λ : on choisit μ strictement supérieur à l’ordre en x de F restreinte à $\{y; G(y) > 0\}$, pour x dans $Z \setminus \partial X$. Le Théorème 1.3 permet cette construction.

$$\text{Alors, pour } x \text{ appartenant à } Z, x \notin \partial X \Rightarrow x \notin \overline{X_x(\lambda, \mu)}. \quad (3)$$

En effet, si $x \in Z \setminus \partial X$, et si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite dans $\overline{X_x(\lambda, \mu)}$ tendant vers x , on a $G_\lambda(x_i) > |x_i - x|^\lambda$, donc $G(x_i) > 0$ pour i assez grand. Par définition de μ , pour tout k , à partir d’un certain rang, $|F(x_i)| > k * |x_i - x|^\mu$, donc pour i assez grand $|F_\mu(x_i)| > |x_i - x|^\mu$, ce qui contredit l’appartenance de x_i à $X_x(\lambda, \mu)$.

D’après (2) et (3), nous avons trouvé λ et μ satisfaisant la Proposition 4.2 annoncée. \square

Références

- [1] M. Coste, An Introduction to o-Minimal Geometry, Istituti editoriali e poligrafici internazionali, 2000.
- [2] J. Denef, L. van den Dries, P-adic and real subanalytic sets, Ann. Math. 128 (1988) 79–138.
- [3] A. Gabrielov, Projections of semianalytic sets, Funct. Anal. Appl. 2 (1968) 282–291.
- [4] A. Gabrielov, Complements of subanalytic sets and existential formulas for analytic functions, Invent. Math. 125 (1996) 1–12.
- [5] C. Miller, Expansions of the real field with power functions, Ann. Pure Appl. Logic 68 (1) (1994) 79–94.
- [6] A. Rambaud, Thèse, Paris, 2005.
- [7] J.-P. Rolin, P. Speissegger, A.J. Wilkie, Quasianalytic Denjoy–Carleman classes and o-minimality, J. Amer. Math. Soc. 16 (4) (2003) 751–777 (electronic).
- [8] L. van den Dries, C. Miller, Geometric categories and o-minimal structures, Duke Math. J. 84 (1996) 497–540.
- [9] A. Wilkie, A theorem of the complement and some new o-minimal structures, Sel. Math. 5 (1999) 397–421.