Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 699–703

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Probabilités/Statistique

# Une loi limite pour les marches aléatoires avec des applications physiques

Raoul Charreton

*104, quai Louis-Blériot, 75016 Paris, France*

Reçu le 16 mai 2007 ; accepté le 28 octobre 2007

Disponible sur Internet le 26 novembre 2007

Présenté par Paul Deheuvels

**Résumé**

Nous considérons une marche aléatoire standard sur $\mathbb{Z}$, partant de l'origine. Nous construisons une loi de probabilité sur $\mathbb{Z}$ en évaluant, pour chaque $N \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{Z}$, le carré du nombre de trajectoires possibles se terminant au niveau $k$ en $N$ transitions ou moins. Nous normalisons ensuite ce nombre carré par sa somme, relativement à $k$, pour obtenir une loi de probabilité, dépendant de $N$. Notre résultat principal montre que cette loi de probabilité est asymptotiquement normale lorsque $N \to \infty$. Cette construction est inspirée par le modèle de base associé à l'interprétation de la mécanique quantique. ***Pour citer cet article : R. Charreton, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***


**Abstract**

**A limit law for random walks with physical applications.** We consider a standard random walk on $\mathbb{Z}$, starting from the origin. We build a law of probability on $\mathbb{Z}$, based upon the evaluation, for each $N \geqslant 0$ and $k \in \mathbb{Z}$, of the squared number of possible trajectories, reaching level $k$ after $N$ or less transitions. We normalize this squared number by its sum, with respect to $k$, to obtain a probability law, depending upon $N$. Our main result establishes that this probability law converges to a normal distribution as $N \to \infty$. Our construction is inspired and motivated by the basic model used for the interpretation of quantum mechanics. ***To cite this article: R. Charreton, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***
© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abridged English version

### *Notation and definitions*

We consider a *standard* random walk (refer to Ch. 1–3 in Feller [2], and Ch. 1 of Révész [4]). On a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ we define i.i.d. random variables $X = X_1, X_2, \ldots$ with symmetrical Bernoulli law, fulfilling $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$. The corresponding random walk $\mathcal{S}$ is given by $S_0 = 0$ and $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ for $n \geqslant 1$. For each $N \in \mathbb{N}$, let $\Sigma_N = \{S_n\colon 0 \leqslant n \leqslant N\}$ denote the trajectory of $\mathcal{S}$ in the time-interval $[0, N]$. $\Sigma_N$ takes its

*Adresse e-mail :* raoul.charreton@mines-paris.org.

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2007.10.046

values in a probability space $\{\Omega_N, \mathcal{A}_N, \mathbb{P}_N\}$, with $\Omega_N$ collecting all possible trajectories of $\mathcal{S}$ in $[0, N]$, $\mathcal{A}_N = \mathcal{P}(\Omega_N)$ being composed of all subsets of $\Omega_N$, and $\omega \in \Omega_N$ having probability $\mathbb{P}_N(\omega) = 2^{-N}$.

*Trajectories reaching level k before time N*

For each $N \in \mathbb{N}$ and $k \in \mathbb{Z}$, let $\nu(N,k)$ be the number of trajectories of $\mathcal{S}$, such that $S_j = k$ for some $0 \leqslant j \leqslant N$. The value of $\nu(N,k)$ is given explicitly in (2)–(5). We distinguish, in (6): Case $P$, where $N - |k|$ is even; and: Case $I$, where $N - |k|$ is odd. In (8), for each $N \in \mathbb{N}$, we define $\tau_P(N)$ (resp. $\tau_I(N)$), as the sum of the $\nu(N,k)^2$, w.r. to $k \in \mathbb{Z}$, and with $N - |k|$ even (resp. $N - |k|$ odd). In (10)–(12), we define, for each $N \in \mathbb{N}$, two probability distributions, by setting, for each $k \in \mathbb{Z}$, $p_P^*(N,k) = \nu(N,k)^2/\tau_P(N)$ when $N - |k|$ is even, and $p_I^*(N,k) = \nu(N,k)^2/\tau_P(N)$, when $N - |k|$ is odd. It is convenient to denote by $Z_{N,P}$ (resp. by $Z_{N,I}$) a random variable with probability law $p_P^*(N,\cdot)$ (resp. $p_P^*(N,\cdot)$). These two laws are combined in (14)–(15), by setting, for each $k \in \mathbb{Z}$, $p(N,k) = \nu(N,k)^2/\tau(N)$, with $\tau(N) = \tau_P(N) + \tau_I(N)$. Likewise, we denote by $Z_N$ a random variable with probability law $p(N,\cdot)$.

*Main results*

Our main results are stated in two theorems, with $N(0,1)$ denoting the standard Gaussian law. By '$\xrightarrow{d}$' is meant convergence in distribution:

**Theorem 1.** *For either $j = P$, or $j = I$, we have, as $N \to \infty$, $\frac{Z_{N,j}}{\sqrt{N/2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$.*

**Theorem 2.** *We have, as $N \to \infty$, $\frac{Z_N}{\sqrt{N/2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$.*

Theorems 1 and 2 have consequences in the field of the interpretation of quantum mechanics, which will be developed elsewhere.

## 1. Introduction

### *1.1. Notations et définitions*

Nous rappelons, tout d'abord, le contexte classique des *marches aléatoires*, qui constitue un préambule nécessaire à l'énoncé de nos résultats principaux, au §1.3. Nous renvoyons, par exemple, aux Ch. 1–3 de Feller [2], pour un exposé des bases classiques de cette théorie, ainsi qu'au Ch. 1 de Révész [4], pour un ensemble de références et de résultats sur le sujet. Soit, sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, une suite $X = X_1, X_2, \ldots$ de variables aléatoires [v.a.] indépendantes de même loi de Bernoulli symétrique, telle que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$. Nous considérons la marche aléatoire définie par $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geqslant 1$. Pour chaque entier $N \geqslant 0$, nous notons $\Sigma_N := \{S_n\colon 0 \leqslant n \leqslant N\}$, la trajectoire de cette marche aléatoire dans l'intervalle de temps $[0, N]$. La trajectoire $\Sigma_N$ prend ses valeurs dans l'espace de probabilités $\{\Omega_N, \mathcal{A}_N, \mathbb{P}_N\}$ constitué comme suit. L'espace $\Omega_N$ des événements élémentaires est fini, et composé de la collection des trajectoires possibles de la marche aléatoire dans l'intervalle de temps $[0, N]$. $\mathcal{A}_N = \mathcal{P}(\Omega_N)$ est l'ensemble des parties de $\Omega_N$. La probabilité de l'un quelconque, $\omega$, des éléments de $\Omega_N$, est $\mathbb{P}_N(\omega) = 2^{-N}$.

### *1.2. Premières énumérations du nombre de trajectoires*

Les divers calculs énumératifs associés aux trajectoires de marches aléatoires ont fait l'objet d'études approfondies dans la littérature scientifique. Nous nous référons, en particulier, aux Ch. 2, 3 et 6 de Feller [2], à ce sujet. Pour tout $N \geqslant 0$, la loi de probabilité de $\frac{1}{2}(S_N + N)$ est binomiale symétrique, ce qui est noté $\frac{1}{2}(S_N + N) \stackrel{d}{=} B(N, \frac{1}{2})$. Cette loi est explicitement définie par

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_N = 2m - N) = 2^{-N}\binom{N}{m} = 2^{-N}\left\{\frac{N!}{m!(N-m)!}\right\} \quad \text{pour } m = 0, \ldots, N, \\
&\mathbb{P}(S_N = 2m - N) = 0 \quad \text{pour } m \notin \{0, \ldots, N\}.
\end{aligned} \tag{1}$$

La relation (1) s'exprime également en termes énumératifs. Nous noterons $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels, et $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \ldots\}$, l'ensemble des nombres entiers de signe quelconque. Notons $n(N,k)$ le *nombre de chemins de $\Omega_N$, passant de* $0$ *à $k$ en $N$ pas*. On pose $k = 2m - N$, ou, de manière équivalente, $m = \frac{1}{2}(k+N) \in \{0, \ldots, N\}$. On a alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$p(N,k) = \mathbb{P}(S_N = k) = \frac{n(N,k)}{2^N} = 2^{-N}\binom{N}{\frac{1}{2}(N+k)} = \frac{2^{-N} N!}{\{\frac{1}{2}(N+k)\}!\{\frac{1}{2}(N-k)\}!}, \quad \text{pour } k \in \{-N, -N+2, \ldots, N-2, N\} = \{N-2m\colon\ 0 \leqslant m \leqslant N\}, \tag{2}$$

$$p(N,k) = \frac{n(N,k)}{2^N} = 0 \quad \text{pour } k \notin \{-N, -N+2, \ldots, N-2, N\}. \tag{3}$$

De (2)–(3), on déduit que, pour $k \in \mathbb{Z}$ fixé, on a $n(N,k) \neq 0$ si et seulement si $N \in I_k$, où

$$I_k := \{N \geqslant 0\colon\ n(N,k) \neq 0\} = \{|k|, |k|+2, \ldots\} = |k| + 2\mathbb{N}. \tag{4}$$

### *1.3. Enumération des chemins aboutissant au niveau k*

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, désignons par $\nu(N,k)$ le *nombre de chemins, observés sur* $[0, j]$*, passant de* $0$ *à $k$ en $j$ pas, nombre cumulé lorsque $j$ varie de* $0$ *à $N$*. Ce nombre est obtenu par la formule, découlant de (2), (3) et (4),

$$\nu(N,k) = \sum_{j=0}^{N} n(j,k) = \sum_{j \in I_k \cap [0,N]} n(j,k) = \sum_{j \in I_k \cap [0,N]} 2^j \mathbb{P}(S_j = k). \tag{5}$$

Distinguons deux cas. Posons

$$\nu_P(N,k) = \begin{cases} \nu(N,k) & \text{lorsque } N - |k| \text{ est pair ;} \\ 0 & \text{lorsque } N - |k| \text{ est impair ;} \end{cases} \tag{6}$$

$$\nu_I(N,k) = \begin{cases} \nu(N,k) & \text{lorsque } N - |k| \text{ est impair ;} \\ 0 & \text{lorsque } N - |k| \text{ est pair.} \end{cases} \tag{7}$$

Posons maintenant, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\tau_P(N) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_P(N,k)^2 = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \{\nu(N, N-2r)\}^2 = \sum_{r=0}^{N} \{\nu(N, N-2r)\}^2, \tag{8}$$

$$\tau_I(N) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_I(N,k)^2 = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \{\nu(N, N-2r-1)\}^2 = \sum_{r=0}^{N-1} \{\nu(N, N-2r-1)\}^2 \tag{9}$$

et notons, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$p_P^*(N,k) = \frac{\{\nu_P(N,k)\}^2}{\tau_P(N)} = \begin{cases} \frac{\{\nu(N,k)\}^2}{\tau_P(N)} & \text{lorsque } N - |k| \text{ est pair ;} \\ 0 & \text{lorsque } N - |k| \text{ est impair ;} \end{cases} \tag{10}$$

$$p_I^*(N,k) = \frac{\{\nu_I(N,k)\}^2}{\tau_I(N)} = \begin{cases} \frac{\{\nu(N,k)\}^2}{\tau_I(N)} & \text{lorsque } N - |k| \text{ est impair ;} \\ 0 & \text{lorsque } N - |k| \text{ est pair.} \end{cases} \tag{11}$$

La définition même des coefficients $\{p_j^*(N,k)\colon\ k \in \mathbb{Z}\}$, pour $j = P$ ou $j = I$, montre qu'ils définissent, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, une loi de probabilité sur $\mathbb{Z}$. Afin d'étudier ses propriétés, définissons deux variables aléatoires $Z_{N,P}$ et $Z_{N,I}$ ayant les lois de probabilité, définies par

$$\mathbb{P}(Z_{N,P} = k) = p_P^*(N,k) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z_{N,I} = k) = p_I^*(N,k). \tag{12}$$

Notre premier résultat est le suivant. Notons $N(0,1)$ la loi normale centrée réduite.

**Théorème 1.1.** *Pour $j = P$ ou $j = I$, lorsque $N \to \infty$, on a la convergence en loi*

$$\frac{Z_{N,j}}{\sqrt{N/2}} \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{13}$$

Pour énoncer notre deuxième résultat, nous adoptons les notations suivantes. Posons

$$\tau(N) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu(N,k)^2 = \tau_P(N) + \tau_I(N), \tag{14}$$

et

$$p^*(N,k) = \frac{\{\nu(N,k)\}^2}{\tau(N)} = \begin{cases} \frac{\{\nu_P(N,k)\}^2}{\tau_P(N)+\tau_I(N)} & \text{lorsque } N-|k| \text{ est pair ;} \\ \frac{\{\nu_I(N,k)\}^2}{\tau_P(N)+\tau_I(N)} & \text{lorsque } N-|k| \text{ est impair.} \end{cases} \tag{15}$$

La définition des coefficients $\{p^*(N,k)\colon\ k \in \mathbb{Z}\}$ montre qu'ils définissent, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, une loi de probabilité sur $\mathbb{Z}$. Définissons une variable aléatoire $Z_N$ ayant la loi de probabilité, définie par

$$\mathbb{P}(Z_N = k) = p^*(N,k) \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Notre résultat principal est alors le suivant :

**Théorème 1.2.** *Lorsque $N \to \infty$, on a la convergence en loi*

$$\frac{Z_N}{\sqrt{N/2}} \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{17}$$

Les étapes principales des démonstrations des Théorèmes 1.1 et 1.2 sont exposées dans le §2 ci-dessous.

Le Théorème 1.2 a des conséquences, dans le domaine de l'interprétation (voir, par exemple, Omnès [3]) de la mécanique quantique, qui seront développées dans d'autres publications.

## 2. Démonstrations

### *2.1. Préliminaires*

Notons, respectivement,

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt,$$

la densité, et la fonction de répartition de la loi normale standard centrée réduite, $N(0,1)$, d'espérance nulle et de variance 1. En s'appuyant sur un théorème de Petrov [5], on observe qu'il existe une constante $C_0 > 0$, telle que,

$$\left| n(j,k) - \frac{2^j}{\sqrt{j}} \varphi\left(\frac{k}{\sqrt{j}}\right) \right| \leqslant \frac{C_0 2^j}{j} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad j \in I_k \quad \text{avec } j \geqslant 1. \tag{18}$$

Nous démontrons d'abord les trois lemmes suivants utiles par la suite :

**Lemme 2.1.** *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ et $-\infty \leqslant c \leqslant d \leqslant \infty$, on a l'inégalité*

$$\left| \left\{ \frac{2}{\sqrt{b}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ c\leqslant m\leqslant d}} \varphi\left(\frac{2m-a}{\sqrt{b}}\right) \right\} - \left\{ \Phi\left(\frac{2d-a}{\sqrt{b}}\right) - \Phi\left(\frac{2c-a}{\sqrt{b}}\right) \right\} \right| \leqslant \frac{8}{\sqrt{2\pi b}}. \tag{19}$$

**Démonstration.** Nous utilisons l'encadrement classique de l'intégrale d'une fonction monotone par des sommes de Riemann. □

**Lemme 2.2.** *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ et $-\infty \leqslant c \leqslant d \leqslant \infty$, on a l'inégalité*

$$\left|\left\{\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ c\leqslant m\leqslant d}} \varphi^2\left(\frac{2m-a}{\sqrt{b}}\right)\right\} - \left\{\Phi\left(\frac{2d-a}{\sqrt{b/2}}\right) - \Phi\left(\frac{2c-a}{\sqrt{b/2}}\right)\right\}\right| \leqslant \frac{8}{\sqrt{\pi b}}. \tag{20}$$

**Démonstration.** Comme $\varphi^2(t) = (2\pi)^{-1/2}\varphi(t\sqrt{2})$, on déduit aisément (20) de (19), en remplaçant, dans cette dernière expression, $b$ par $b/2$. □

**Lemme 2.3.** *Il existe deux constantes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$, telle que les inégalités suivantes soient satisfaites, pour tout $N \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ et $k \in \mathbb{Z}$, tels que $N - |k| \geqslant 0$.*

(i) *Si $N - |k| \geqslant 0$ est pair,*

$$\left|\nu(N,k) - \frac{4}{3}\left\{\frac{2^N}{\sqrt{N}}\varphi\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right)\right\}\right| \leqslant \frac{\mathcal{C}_0 2^N}{N} + \frac{\mathcal{C}_1 2^{|k|}}{\sqrt{N}}. \tag{21}$$

(ii) *Si $N - |k| \geqslant 1$ est impair,*

$$\left|\nu(N,k) - \frac{4}{3}\left\{\frac{2^{N-1}}{\sqrt{N-1}}\varphi\left(\frac{k}{\sqrt{N-1}}\right)\right\}\right| \leqslant \frac{\mathcal{C}_0 2^N}{N} + \frac{\mathcal{C}_1 2^{|k|}}{\sqrt{N}}. \tag{22}$$

**Démonstration.** La démonstration de ce lemme est au coeur de notre résultat principal. Elle s'appuie à la fois sur le fait que les termes non nuls de $\nu(N,k)$, pour $N$ fixé, sont sensiblement en progression géomtrique de raison 4 et sur la borne définie par (18). □

*2.2. Preuve des Théorèmes 1.1 et 1.2*

Nous nous limitons à établir le Théorème 1.1 dans le cas $j = P$, le cas où $j = I$ s'obtenant pas des méthodes similaires, au prix de petites modifications. Compte tenu de (21), nous évaluons, dans une première étape, la somme

$$T_P(N) := \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left[\frac{4}{3}\left\{\frac{2^N}{\sqrt{N}}\varphi\left(\frac{2m-N}{\sqrt{N}}\right)\right\}\right]^2 = \frac{2^{2N+2}}{9\sqrt{\pi N}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{N}}\varphi^2\left(\frac{2m-N}{\sqrt{N}}\right)\right\}. \tag{23}$$

Par une application de (20), on montre ensuite que, si on avait l'égalité entre $\nu(N,k)$ et

$$\frac{4}{3}\left\{\frac{2^N}{\sqrt{N}}\varphi\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right)\right\},$$

le Théorème 1.1 (dans le cas $j = P$), serait établi. Ce n'est pas le cas, mais l'inégalité (21) montre que la différence entre ces deux termes est bornée supérieurement par

$$\frac{\mathcal{C}_0 2^N}{N} + \frac{\mathcal{C}_1 2^{|k|}}{\sqrt{N}}.$$

On termine la démonstration par un argument de troncature, en s'appuyant sur une inégalité due à del Barrio et al., [1].

**Preuve du Théorème 1.2.** Ce résultat s'obtient simplement à partir du Théorème 1.1 par un procédé de superposition. □

## Références

[1] E. del Barrio, P. Deheuvels, S. van de Geer, Lectures on Empirical Processes, European Mathematical Society, Zürich, 2007.
[2] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. 1, second ed., Wiley, New York, 1957.
[3] R. Omnès, Comprendre la Mécanique Quantique, EDP Sciences, Paris, 2000.
[4] P. Révész, Random Walks in Random and Non-Random Environments, World Scientific, Singapour, 1990.
[5] V.V. Petrov, Sums of Independent Random Variables, Springer, New York, 1975.