



Partial Differential Equations/Mathematical Physics

Long-time asymptotics for the focusing NLS equation
with time-periodic boundary conditionAnne Boutet de Monvel^a, Alexander Its^b, Vladimir Kotlyarov^c^a Institut de mathématiques de Jussieu, case 7012, Université Paris 7, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France^b Indiana University – Purdue University, Indianapolis, IN 46202-3216, USA^c Institute for Low Temperature Physics, 47 Lenin Avenue, 61103 Kharkiv, Ukraine

Received 14 June 2007; accepted after revision 4 October 2007

Presented by Paul Malliavin

Abstract

We consider the focusing nonlinear Schrödinger equation on the quarter plane. Initial data vanish at infinity while boundary data are time-periodic ($ae^{2i\omega t}$). The goal of this Note is to study the asymptotic behavior of the solution of this initial-boundary-value problem. The main tool is the asymptotic analysis of an associated matrix Riemann–Hilbert problem. We show that the solution of the IBV problem has different asymptotic behaviors in different regions. In the region $x > 4bt$ ($b = \sqrt{(a^2 - \omega)/2} > 0$) the solution has the form of a Zakharov–Manakov vanishing asymptotics. In the region $4bt - \frac{1}{2a}N \log t < x < 4bt$, where N is an integer, the solution behaves as a finite train of asymptotic solitons. In the region $4(b - a\sqrt{2})t < x < 4bt$ the solution is a modulated elliptic wave. Finally, in the sector $0 < x < 4(b - a\sqrt{2})t$ the solution is a plane wave. **To cite this article: A. Boutet de Monvel et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).**

© 2007 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Résumé

Comportement asymptotique pour t grand de la solution de l'équation NLS focalisante avec condition au bord périodique. Nous considérons l'équation de Schrödinger non linéaire focalisante sur le premier quadrant ($x > 0, t > 0$), avec donnée initiale décroissante à l'infini et donnée au bord t -périodique, de la forme $ae^{2i\omega t}$. Notre objectif est d'étudier le comportement asymptotique de la solution de ce problème aux limites. Notre méthode consiste à faire l'analyse asymptotique d'un problème de Riemann–Hilbert matriciel associé. Nous montrons que la solution du problème aux limites a des comportements asymptotiques différents suivant la région dans laquelle (x, t) tend vers l'infini. Dans le secteur $x > 4bt$, pour $b = \sqrt{(a^2 - \omega)/2} > 0$, le comportement asymptotique est décrit par des formules du type de Zakharov–Manakov. Dans la région $4bt - \frac{1}{2a}N \log t < x < 4bt$, où N est un entier, la solution se comporte comme un train fini de solitons asymptotiques. Dans le secteur $4(b - a\sqrt{2})t < x < 4bt$ la solution est comme une onde elliptique modulée. Enfin, dans le secteur $0 < x < 4(b - a\sqrt{2})t$ la solution se comporte comme une onde plane. **Pour citer cet article : A. Boutet de Monvel et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).**

© 2007 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

Nous considérons l'équation de Schrödinger non linéaire focalisante sur le premier quadrant ($x > 0, t > 0$), avec donnée initiale décroissante à l'infini et donnée au bord t -périodique, de la forme $ae^{2i\omega t}$. Nous nous proposons d'étudier le comportement asymptotique de la solution de ce problème aux limites. Notre méthode consiste à faire l'analyse asymptotique d'un problème de Riemann–Hilbert matriciel associé.

Pour construire le problème de Riemann–Hilbert associé au problème aux limites (2)–(5) considéré, on introduit des fonctions spectrales dont la définition utilise la donnée initiale et les données de Dirichlet et de Neumann au bord. Comme ces données sont redondantes, nous devons faire une hypothèse sur l'application de Dirichlet à Neumann. Pour $\omega < -3a^2$ nous postulons que cette application est de la forme (6). Cette hypothèse est validée par les formules asymptotiques que nous finissons par obtenir. Soient $a(k), b(k)$ et $A(k), B(k)$ les fonctions spectrales construites à partir des données initiale $q(x, 0)$ et au bord $q(0, t)$ et $q_x(0, t)$. Le problème de Riemann–Hilbert que nous construisons est comme suit [2] :

$$M_-(x, t; k) = M_+(x, t; k)J(x, t; k), \quad k \in \Sigma, \quad (1)$$

où le contour orienté $\Sigma = R \cup \gamma \cup \bar{\gamma} \cup \Gamma \cup \bar{\Gamma}$ est indiqué sur la Fig. 1 et où la matrice de saut $J(x, t; k)$ est donnée par les formules (7), dans lesquelles $c(k) = -\bar{B}(\bar{k})/(a(k)A(\bar{k}) + b(k)B(\bar{k}))$ pour $k \in D_2$, et $f(k) = c_-(k) - c_+(k)$ pour $k \in \gamma$ sont des fonctions spectrales auxiliaires. Nous renvoyons à [2] pour les détails.

Dans la suite nous supposons $a(k) \neq 0$ pour $\text{Im } k \geq 0$ et $a(k)A(\bar{k}) + b(k)B(\bar{k}) \neq 0$ pour $k \in D_2$. Nous imposons en outre la contrainte (8) et les propriétés #1 et #2 sur les fonctions spectrales.

Le problème de Riemann–Hilbert considéré a une solution unique $M(x, t; k)$ et la fonction

$$q(x, t) = 2i \lim_{k \rightarrow \infty} (kM(x, t; k))_{12}$$

qu'on en déduit résout (Théorème 2.1) le problème aux limites (2)–(5) de l'équation NLS focalisante. Cette représentation de $q(x, t)$ en fonction de $M(x, t; k)$ nous permet d'établir que la solution du problème aux limites a des comportements asymptotiques différents dans diverses régions du quadrant $x > 0, t > 0$. Pour mener à bien cette analyse on utilise la méthode du col non linéaire introduite par Deift et Zhou [4] pour traiter les problèmes de Riemann–Hilbert oscillants. Un ingrédient essentiel de cette méthode est l'utilisation d'une g -fonction. Nous montrons qu'on peut la choisir d'une forme très effective. Dans la région « ondes planes » la g -fonction (10) est explicite et très simple. Pour la région « elliptique » la g -fonction (11) est la somme de deux intégrales abéliennes. Dans ce cas tous les paramètres sont définis par le point critique réel μ de la g -fonction. Ce point μ dépend de $\xi = x/4t$ et la fonction $\mu(\xi)$ vérifie une équation fonctionnelle (12) en fonctions elliptiques. Précisons que la g -fonction choisie n'est pas la même que dans [3].

Les résultats principaux sont rassemblés dans les Théorèmes 3.1 à 3.3, région par région. On suppose $\omega < -3a^2$ et on note $b = \sqrt{(a^2 - \omega)/2} > 0$ et $\xi = x/4t$. Dans le secteur $\xi > b$ la solution $q(x, t)$ est quasi-linéaire dispersive : elle s'exprime par des formules de type Zakharov–Manakov (Théorème 3.1). Dans le secteur $b - a\sqrt{2} < \xi < b$ la solution est une onde elliptique modulée qui s'exprime en termes de fonctions thêtas (Théorème 3.2). Enfin, dans le secteur $0 < \xi < 4(b - a\sqrt{2})t$, la g -fonction a une forme différente (10), et la solution se comporte comme une onde plane (Théorème 3.3). Par ailleurs, dans les régions du type $b - \frac{N \log t}{8a} < \xi < b$, où N est un entier, le comportement asymptotique de la solution a été établi dans [1] : c'est un train d'un nombre fini de solitons asymptotiques (Théorème 3.4).

1. Introduction

We consider the focusing nonlinear Schrödinger equation on the quarter plane. Initial data vanish at infinity while boundary data are time-periodic ($ae^{2i\omega t}$). The goal of this Note is to describe the asymptotic behavior of the solution of the initial-boundary-value problem:

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2q = 0, \quad \text{with } x, t \in R_+, \quad (2)$$

$$q(x, 0) = q_0(x), \quad (3)$$

$$q(0, t) = g_0(t) = ae^{i\alpha}e^{2i\omega t}, \quad (4)$$

$$q_0(0) = g_0(0) = ae^{i\alpha}, \tag{5}$$

where $q_0(x)$ vanishes rapidly for $x \rightarrow \infty$, $a > 0$, α and ω are real numbers. We assume $\omega < -3a^2$, i.e. $b^2 > 2a^2$ where $b = \sqrt{(a^2 - \omega)/2} > 0$.

The main tool is the asymptotic analysis of an associated matrix Riemann–Hilbert problem. We show that the solution of the IBV problem has different asymptotic behaviors in different regions defined in terms of $\xi = \frac{x}{4t}$. In a first region $\xi > b$ the solution has a Zakharov–Manakov vanishing asymptotics. In a second region $b - a\sqrt{2} < \xi < b$ the solution behaves as a modulated elliptic wave. In a third region $0 < \xi < b - a\sqrt{2}$ the solution behaves as a plane wave. Moreover, in regions of the type $b - \frac{N \log t}{8a} < \xi < b$, where N is an integer, the solution behaves as a train of asymptotic solitons.

2. The basic Riemann–Hilbert problem

To formulate the Riemann–Hilbert problem, related to the IBV problem, we need to introduce spectral functions using the initial function and Dirichlet and Neumann boundary data. Thus we have to make an assumption on the Dirichlet to Neumann map. For $\omega < -3a^2$, i.e. $b^2 > 2a^2$, we assume that the mentioned map takes the form:

$$q_x(0, t) = 2ibq(0, t) + v_1(t), \quad b \in R_+, \tag{6}$$

where $v_1(t)$ vanishes for $t \rightarrow \infty$. A justification of the assumption will follow due to the asymptotic formulas below, see Remark 1. Let $a(k)$, $b(k)$ and $A(k)$, $B(k)$ be spectral functions defined in the usual way (see [2]) by initial function $q(x, 0)$ and boundary data $q(0, t)$, $q_x(0, t)$, respectively. Also, let Σ be the spectrum of the t -operator of the Lax pair, i.e. $\Sigma = \{k \mid \text{Im}[(k - b)\sqrt{(k + b)^2 + a^2}] = 0\}$. As it is shown in [2], the contour Σ can be split into five smooth components, $\Sigma = R \cup \gamma \cup \bar{\gamma} \cup \Gamma \cup \bar{\Gamma}$ which are depicted in Fig. 1.

We note that the end point E is related to the parameters a and b of the boundary data via the relation

$$E = -b + ia.$$

Let us now orient the contour Σ as it is indicated in Fig. 1 and define the jump matrix $J(x, t; k)$ as follows:

$$J(x, t; k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{\varrho}(k)e^{-2i(kx+2k^2t)} \\ -\varrho(k)e^{2i(kx+2k^2t)} & 1 + |\varrho(k)|^2 \end{pmatrix}, & k \in R, \quad \varrho = \begin{cases} \varrho(k), & k < \kappa_+, \\ r(k), & k > \kappa_+, \end{cases} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c(k)e^{2i(kx+2k^2t)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Gamma, \quad \begin{pmatrix} f(k)e^{2i(kx+2k^2t)} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \gamma, \\ \begin{pmatrix} 1 & \bar{c}(\bar{k})e^{-2i(kx+2k^2t)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \bar{\Gamma}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -\bar{f}(\bar{k})e^{-2i(kx+2k^2t)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \bar{\gamma}, \end{cases} \tag{7}$$

where $\rho(k)$, $r(k)$, $c(k)$, $f(k)$ are auxiliary spectral functions (see [2] for details):

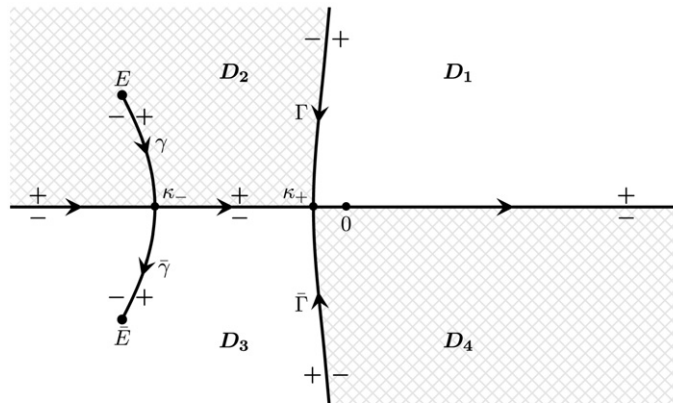


Fig. 1. The oriented contour Σ .

- for $k \in R$: $\rho(k) = r(k) + c(k)$ with $r(k) = \bar{b}(k)/a(k)$,
- for $k \in D_2$: $c(k) = -\bar{B}(\bar{k})/(a(k)\bar{A}(\bar{k}) + b(k)\bar{B}(\bar{k}))a(k)$ and $f(k) = c_-(k) - c_+(k)$ for $k \in \gamma$.

We note that the spectral data satisfy the following general constraint, the dispersion relation

$$2 \operatorname{Re} \int_{\gamma} \log(f(k)\delta_0(k)) \frac{dk}{X_+(k)} = \frac{\pi^2}{2} - \pi\alpha, \tag{8}$$

where $X(k) = \sqrt{(k+b)^2 + a^2} = \sqrt{(k-E)(k-\bar{E})}$ is positive on the real line and

$$\delta_0(k) = \exp \left\{ \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{k_+} \frac{\log(1 + |\rho(s)|^2) ds}{s - k} \right\}.$$

See [5] where a similar relation is discussed in the case of the NLS equation on the whole line with nonvanishing boundary conditions.

Assumption 1. In what follows we assume that $a(k) \neq 0$ for $\operatorname{Im} k \geq 0$ and $a(k)\bar{A}(\bar{k}) + b(k)\bar{B}(\bar{k}) \neq 0$ in the domain D_2 .

The Riemann–Hilbert problem. Let us now consider the Riemann–Hilbert problem consisting in finding a 2×2 matrix-valued function $M(x, t; k)$ such that

- $M(x, t; k)$ is sectionally analytic in $k \in C \setminus \Sigma$.
- $M(x, t; k)$ satisfies the jump condition $M_-(x, t; k) = M_+(x, t; k)J(x, t; k)$, for $k \in \Sigma$ where the jump matrix $J(x, t; k)$ is defined in terms of the spectral functions by (7).
- $M(x, t; k)$ has unit determinant and possesses the asymptotics $M(x, t; k) = I + O(\frac{1}{k})$, for $k \rightarrow \infty$.

Theorem 2.1. (See [2].) Let $q_0(x), v_1(t) \in S(R_+)$, i.e. they are of the Schwartz rapidly decreasing type, and let Assumption 1 be satisfied. Suppose that the functions $g_0(t) = ae^{i\alpha}e^{2i\omega t}$ and $g_1(t) = 2iae^{i\alpha}be^{2i\omega t} + v_1(t)$ are such that the spectral functions $a(k), b(k), A(k), B(k)$ satisfy the global relation:

$$b(k)A(k) - a(k)B(k) = 0, \quad k \in D_1.$$

Then the above Riemann–Hilbert problem has a unique solution $M(x, t; k)$ and the function

$$q(x, t) = 2i \lim_{k \rightarrow \infty} (kM(x, t; k))_{12}$$

solves the IBV problem (2)–(5) for the focusing NLS equation.

3. Main results

In what follows, we assume that the Riemann–Hilbert data, i.e., the functions $\rho(k), r(k), c(k)$ and $f(k)$ satisfy the following additional properties.

- #1 The function $c(k)$ admits an analytic continuation through the cut γ on the second sheet of the Riemann surface of the function $X(k)$ so that in the setting of the above Riemann–Hilbert problem the choice of the contour $\gamma \cup \bar{\gamma}$ itself can be made flexible.
- #2 The function $f(k)$ admits a Taylor series expansion at $k = E = -b + ia$ of the form

$$f(k) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (k - E)^{(2j+1)/2}. \tag{9}$$

It is worth noticing that if we take the Riemann–Hilbert data $\rho(k), r(k), c(k)$ and $f(k)$ as the basic functional parameters of our IBV problem, then, of course, we won't have any problem with securing the validity of the assumptions

above. The interesting question is how big, if any, is the piece of the initial-boundary data which is cut off by the restrictions #1 and #2?

We show that the solution of the IBV problem has different asymptotic behaviors in different regions of the (x, t) -quarter, using the nonlinear steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems introduced in [4]. An essential ingredient of this method is the phase g -function. We show that a very effective g -function can be chosen for each region:

- For the plane wave region $(0 < \xi < b - a\sqrt{2})$ we choose

$$g(k) = 2(k - b + 2\xi)X(k) = \Omega(k) + 4\xi X(k). \tag{10}$$

- For the elliptic region $(b - a\sqrt{2} < \xi < b)$ we choose a sum of two Abelian integrals

$$g(k) = 2\left(\int_E^k + \int_{\bar{E}}^k\right)(z - \mu(\xi))\sqrt{\frac{(z - d(\xi))(z - \bar{d}(\xi))}{(z - E)(z - \bar{E})}} dz, \tag{11}$$

where the unknown parameters are defined by

$$d(\xi) = d_1(\xi) + id_2(\xi) = -\mu - b - \xi + i\sqrt{2\mu^2 + 2(b + \xi)\mu + a^2 + 2b\xi},$$

the stationary point $\mu = \mu(\xi)$ of the g -function satisfying the functional equation:

$$\mu = H(\mu, \xi) := \frac{I_1(-\mu - b - \xi, \sqrt{2\mu^2 + 2(b + \xi)\mu + a^2 + 2b\xi})}{I_0(-\mu - b - \xi, \sqrt{2\mu^2 + 2(b + \xi)\mu + a^2 + 2b\xi})}, \tag{12}$$

where $I_j(d_1, d_2) = \int_{d_1 - id_2}^{d_1 + id_2} z^j \sqrt{\frac{(z - d_1)^2 + d_2^2}{(z + b)^2 + a^2}} dz$, $j = 0, 1$, are complete elliptic integrals. Note that the construction of the g -function is different from that in [3].

Theorem 3.1 (Zakharov–Manakov region). *In the region $\xi > b$, the solution $q(x, t)$ has a quasi-linear dispersive character. It is described by Zakharov–Manakov type formulae. For $t \rightarrow +\infty$ with $\xi > b > 0$:*

$$q(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \alpha(-\xi) \exp\{4i\xi^2 t + 2i\alpha^2(-\xi) \log t + i\phi(-\xi)\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

The amplitude α and the phase ϕ are given by

$$\alpha^2(k) = \frac{1}{4\pi} \log(1 + |\rho(k)|^2),$$

$$\phi(k) = 6\alpha^2(k) \log 2 + \frac{3\pi}{4} + \arg \rho(k) + \arg \Gamma(-2i\alpha^2(k)) + 4 \int_{-\infty}^k \log |\mu - k| d\alpha^2(\mu),$$

where $\Gamma(z)$ is the Euler’s gamma-function.

Theorem 3.2 (elliptic wave region). *In the region $b - a\sqrt{2} < \xi < b$, the solution $q(x, t)$ behaves as a modulated elliptic wave. For $t \rightarrow +\infty$ with $b - a\sqrt{2} < \xi < b$:*

$$q(x, t) = [a + \text{Im } d(\xi)] e^{i\alpha} \frac{\theta_3[B_g t/2\pi + B_\omega \Delta/2\pi + U_-] \theta_3[U_+]}{\theta_3[B_g t/2\pi + B_\omega \Delta/2\pi + U_+] \theta_3[U_-]} e^{2ig_\infty(\xi)t - 2i\phi(\xi)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$

where $B_g, B_\omega, \Delta, U_+$ and U_- are some functions of the slow variable ξ , and $\theta_3(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i \tau m^2 + 2\pi i m z}$ is a theta function with $\text{Im } \tau = \text{Im } \tau(\xi) > 0$. Furthermore,

$$g_\infty(\xi) = 2\left(\int_E^\infty + \int_{\bar{E}}^\infty\right) \left[(z - \mu(\xi)) \sqrt{\frac{(z - d(\xi))(z - \bar{d}(\xi))}{(z - E)(z - \bar{E})}} - (z + \xi) \right] dz + 2a^2 - 2b^2 + 4b\xi,$$

is the regularized meaning of the phase function $g(k)$ defined by (11), and the phase shift $\phi(\xi)$ is defined in terms of spectral functions, with $e_1 = e_1(\xi)$, $\omega_\infty = \omega_\infty(\xi)$:

$$\phi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_d \cup \bar{\gamma}_d} (s - e_1(\xi) - \omega_\infty(\xi)) \log \frac{h(s)}{\delta^2(s, \xi) w_+(s, \xi)} ds, \quad h(k) = \begin{cases} -ie^{i\alpha} f(k), & k \in \gamma_d, \\ -ie^{i\alpha} / \bar{f}(\bar{k}), & k \in \bar{\gamma}_d, \end{cases}$$

$$\delta(k, \xi) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\mu(\xi)} \frac{\log(1 + |\rho(s)|^2) ds}{s - k} \right\}, \quad k \in C \setminus (-\infty, \mu(\xi)],$$

where $w_+(k, \xi)$ is the positive branch of $\sqrt{(k - E)(k - \bar{E})(k - d(\xi))(k - \bar{d}(\xi))}$.

Theorem 3.3 (plane wave region). In the region $0 < \xi < b - a\sqrt{2}$, the phase g -function has the form (10), and the solution behaves as a plane wave. For $t \rightarrow +\infty$ with $0 < \xi < b - a\sqrt{2}$:

$$q(x, t) = ae^{i\alpha} e^{2i[bx + \omega t - \phi(\xi)]} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad (13)$$

$$\phi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\gamma} \log \frac{-ie^{i\alpha} f(s)}{\delta^2(s, \xi) X_+(s)} ds + \int_{\bar{\gamma}} \log \frac{-ie^{i\alpha}}{\bar{f}(\bar{s}) \delta^2(s, \xi) X_+(s)} ds \right].$$

Theorem 3.4 (asymptotic solitonic regions, [1]). In the region $b - \frac{N \log t}{8at} < \xi < b$ where $N \geq 1$ is an integer, and for $t \rightarrow +\infty$, the solution behaves as a finite train of asymptotic solitons:

$$|q(x, t)|^2 = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} \frac{4a^2}{\cosh^2[2a(x - 4bt - x_j) + \log t^{2j-1/2}]} + o(1),$$

where $x_j = x_j^{(0)} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-b} \frac{\log[1 + |\rho(s)|^2]}{(s+b)^2 + a^2} ds$, and the numbers $x_j^{(0)}$ depend on spectral functions. The first of them takes the form:

$$q_S(x, t) = \frac{2ae^{2ibx + 4i(a^2 - b^2)t + i\varphi_1}}{\cosh[2a(x - 4bt + \frac{1}{2a} \log t^{3/2} - x_1)]}, \quad \varphi_1 = \arg z_0 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\kappa_0} \frac{(s+b) \log[1 + |\rho(s)|^2]}{(s+b)^2 + a^2} ds.$$

Remark 1. The last formula (13) together with (8) justifies our assumption (6) on the structure of the Dirichlet to Neumann map. The structure of the Dirichlet to Neumann map depends essentially on the relation between the frequency ω and the amplitude a . Indeed, for $\omega > a^2/2$ ($\omega < -3a^2$ above) the Dirichlet to Neumann map takes the form: $q_x(0, t) = 2bq(0, t) + v_1(t)$, $b \in R_+$, where $v_1(t)$ vanishes for $t \rightarrow \infty$. A justification of this assumption will be done elsewhere.

Acknowledgements

The authors thank Dmitry Shepelsky for useful discussions.

References

- [1] A. Boutet de Monvel, V. Kotlyarov, Generation of asymptotic solitons of the Nonlinear Schrödinger equation by boundary data, J. Math. Phys. 44 (8) (2003) 3185–3215.
- [2] A. Boutet de Monvel, V. Kotlyarov, The focusing nonlinear Schrödinger equation on the quarter plane with time-periodic boundary condition: a Riemann–Hilbert approach, J. Inst. Math. Jussieu 6 (4) (2007) 579–611.
- [3] R. Buckingham, S. Venakides, Long-time asymptotics of the nonlinear Schrödinger equation shock problem, Comm. Pure Appl. Math. 60 (9) (2007) 1349–1414.
- [4] P. Deift, X. Zhou, A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 26 (1) (1992) 119–123.
- [5] L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan, Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1987.