Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 373–376

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique

Sur une mesure rendant orthogonaux les polynômes secondaires

Roland Groux

Lycée Polyvalent Rouvière, quartier Sainte Musse, 83070 Toulon, France

Reçu le 5 juin 2007 ; accepté après révision le 12 septembre 2007

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Le thème de la Note est la définition, à partir d'une densité de probabilité ρ continue sur un intervalle, d'une mesure annexe μ assurant l'orthogonalité des polynômes secondaires associés à une suite classique de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire induit par ρ. La construction s'effectue à l'aide d'un couplage sur les transformées de Stieltjes des mesures et l'explicitation de μ grâce aux formules d'inversion de Stieltjes–Perron. A travers cette étude apparaissent également d'intéressantes relations isométriques mettant en jeu l'opérateur T_ρ créant les polynômes secondaires. ***Pour citer cet article : R. Groux, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

About a measure making secondary polynomials orthogonal. This Note presents a method for defining, from a probability density function ρ on an interval, a new measure turning the secondary polynomials associated with the orthogonal polynomials for ρ into an orthogonal system. The construction uses the associated Stieltjes transformations of the two measures and we can express the solution thanks to the inverse formula of Stieltjes–Perron. Through this study, we see interesting isometric relations using the operator T_ρ creating the secondary polynomials. ***To cite this article: R. Groux, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Dans toute la suite on considère une densité de probabilité $x \mapsto \rho(x)$ continue sur [0, 1], et on note $\mathrm{L}^2([0,1],\rho)$ l'espace de Hilbert associé, muni du produit scalaire $\langle f/g\rangle_\rho = \int_0^1 f(t)g(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t$. On désigne par $n \mapsto P_n$ une suite de polynômes orthogonaux pour ce produit, et on définit ensuite les polynômes dits secondaires associés aux P_n, par : $Q_n(X) = \int_0^1 \frac{P_n(t)-P_n(X)}{t-X}\rho(t)\,\mathrm{d}t$ [2, Chapitre 2]. La transformée de Stieltjes de la mesure ρ est définie sur le plan complexe privé de l'intervalle réel [0,1] par la formule : $z \mapsto S_\rho(z) = \int_0^1 \frac{\rho(t)\,\mathrm{d}t}{z-t}$. Il est bien connu, et c'est là une des applications des polynômes secondaires, que la suite de fractions rationnelles $n \mapsto Q_n(z)/P_n(z)$ donne des approximants de Padé au voisinage de $+\infty$ de la transformée de Stieltjes de ρ.

Plus précisément on a la relation, au voisinage de l'infini : $S_\rho(z) - Q_n(z)/P_n(z) = \mathrm{O}(1/z^{2n})$ [1, Chapitre 5]. Pour finir, le moment d'ordre n de ρ est défini et noté $c_n = \int_0^1 t^n\rho(t)\,\mathrm{d}t$.

Adresse e-mail : roland.groux@wanadoo.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.09.005

Théorème 1. *Soit μ une mesure positive sur* $[0,1]$ *dont la transformée de Steltjes est reliée à celle de ρ par l'égalité $S_\mu(z) = z - c_1 - 1/S_\rho(z)$. Les polynômes secondaires Q_n relatifs à ρ forment alors une famille orthogonale pour le produit scalaire induit par μ.*

Démonstration. Notons $n \mapsto A_n$ la suite des polynômes orthogonaux pour μ (à un coefficient de normalisation près bien sûr) et par $n \mapsto B_n$ celle des polynômes secondaires déduits des A_n. D'après la théorie classique rappelé ci dessus : $S_\mu(z) - B_n(z)/A_n(z) =_\infty \mathrm{O}(1/z^{2n})$.

Vu le couplage entre les transformées de Stieltjes :

$$\frac{(z-c_1)A_n(z) - B_n(z)}{A_n(z)} - \frac{1}{S_\rho(z)} =_\infty \mathrm{O}\left(\frac{1}{z^{2n}}\right).$$

Ou encore, en posant $C_n(z) = (z-c_1)A_n(z) - B_n(z)$: $1/S_\rho(z) - C_n(z)/A_n(z) =_\infty \mathrm{O}(1/z^{2n})$.

Or au voisinage de l'infini : $S_\rho(z)$ équivaut à c_0/z et $A_n(z)/C_n(z)$ à un terme du type K/z. On en déduit alors facilement $S_\rho(z) - A_n(z)/C_n(z) =_\infty \mathrm{O}(1/z^{2n+2})$. Ceci nous montre que la fraction $A_n(z)/C_n(z)$ est un approximant de Padé de $S_\rho(z)$. A un coefficient de normalisation prés, le numérateur $A_n(z)$ se confond donc avec le polynôme secondaire $Q_{n+1}(z)$. μ rend donc bien orthogonale cette suite. □

Remarque. On montre sans peine que le théorème s'étend au cas d'un intervalle quelconque, même non borné, sous réserve que ρ et μ admettent bien des moments de tout ordre.

1. Explicitation de la mesure solution μ

Si la densité ρ est continue, on peut la reconstituer à partir de sa transformée de Stieltjes à l'intérieur de son support grâce à la formule d'inversion de Stieltjes–Perron [1, Chapitre 5], soit :

$$\rho(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{S_\rho(x - \mathrm{i}\varepsilon) - S_\rho(x + \mathrm{i}\varepsilon)}{2\mathrm{i}\pi}.$$

Or on sait que

$$\begin{cases} S_\mu(x - \mathrm{i}\varepsilon) = x - \mathrm{i}\varepsilon - c_1 - \dfrac{1}{S_\rho(x - \mathrm{i}\varepsilon)}, \\ S_\mu(x + \mathrm{i}\varepsilon) = x + \mathrm{i}\varepsilon - c_1 - \dfrac{1}{S_\rho(x + \mathrm{i}\varepsilon)}. \end{cases}$$

On en déduit :

$$S_\mu(x - \mathrm{i}\varepsilon) - S_\mu(x + \mathrm{i}\varepsilon) = -2\mathrm{i}\varepsilon + \frac{S_\rho(x - \mathrm{i}\varepsilon) - S_\rho(x + \mathrm{i}\varepsilon)}{S_\rho(x - \mathrm{i}\varepsilon) S_\rho(x + \mathrm{i}\varepsilon)}.$$

D'où en passant à la limite, et vu la formule de Stieltjes–Perron appliquée à ρ : $\forall x \in [0,1]$: $\mu(x) = \rho(x)/\pi^+(x)$ en posant $\pi^+(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} S_\rho(x - \mathrm{i}\varepsilon) S_\rho(x + \mathrm{i}\varepsilon)$. Or

$$S_\rho(x - \mathrm{i}\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\rho(t)\,\mathrm{d}t}{x - \mathrm{i}\varepsilon - t} = \int_0^1 \frac{(x-t)\rho(t)\,\mathrm{d}t}{(x-t)^2 + \varepsilon^2} + \mathrm{i}\varepsilon \int_0^1 \frac{\rho(t)\,\mathrm{d}t}{(x-t)^2 + \varepsilon^2}.$$

Si nous posons, sous *réserve d'existence* :

$$\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2 \int_0^1 \frac{(x-t)\rho(t)\,\mathrm{d}t}{(x-t)^2 + \varepsilon^2},$$

on obtient alors une expression simple de la mesure μ, soit :

$$\mu(x) = \frac{\rho(x)}{\varphi^2(x)/4 + \pi^2 \rho^2(x)}.$$

Ici aussi cette formule est encore valable dans le cas d'un intervalle quelconque. On peut vérifier en fait directement par un calcul d'intégrale avec une méthode de résidus que la fonction μ définie ci-dessus a bien une transformée de Stieltjes donnée par $S_\mu(z) = z - c_1 - 1/S_\rho(z)$.

Definitions. Lorsqu'elle existe, la mesure de densité μ sera appelée la *mesure secondaire* associée à la densité ρ. La fonction φ introduite ci-dessus sera appelée *réductrice* de ρ.

Pour exemple, avec $\rho(x) = 1$ sur [0, 1] on obtient $\varphi(x) = 2\ln(\frac{x}{1-x})$.

Théorème 2. *Pour tout entier n supérieur ou égal à* 1, *la norme du polynôme P_n pour le produit scalaire défini par ρ coïncide exactement avec la norme de son polynôme secondaire associé Q_n pour le produit scalaire induit par la mesure* secondaire μ.

Démonstration. On sait que les polynômes orthogonaux sont générés par une relation du type :

$$\forall n \geqslant 1 \quad XP_n(X) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} P_{n+1}(X) + \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n} - \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right) P_n(X) + \frac{\alpha_{n-1}\|P_n\|^2}{\alpha_n\|P_{n-1}\|^2} P_{n-1}(X).$$

(lorsque l'on pose $P_n(X) = \alpha_n X^n + \beta_n X^{n-1} + \cdots$) [2, Chapitre 2].
Les polynômes secondaires Q_n satisfont aussi de manière évidente à cette relation. Or étant orthogonaux pour la mesure μ on peut aussi écrire :

$$XQ_n(X) = \frac{\alpha'_n}{\alpha'_{n+1}} Q_{n+1}(X) + \left(\frac{\beta'_n}{\alpha'_n} - \frac{\beta'_{n+1}}{\alpha'_{n+1}}\right) Q_n(X) + \frac{\alpha'_{n-1}(N(Q_n))^2}{\alpha'_n(N(Q_{n-1}))^2} Q_{n-1}(X).$$

Avec les notations : $Q_n(X) = \alpha'_n X^{n-1} + \beta'_{n-1} X^{n-2} + \cdots$, N désignant la norme pour le produit scalaire défini par μ, ceci à partir de $n = 2$, car le polynôme Q_0 est identiquement nul.

Le système (Q_{n-1}, Q_n, Q_{n+1}) étant libre, la comparaison des deux modes de génération donne immédiatement les égalités : pour $n \geqslant 2$

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \frac{\alpha'_n}{\alpha'_{n+1}} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_{n-1}\|P_n\|^2}{\alpha_n\|P_{n-1}\|^2} = \frac{\alpha'_{n-1}(N(Q_n))^2}{\alpha'_n(N(Q_{n-1}))^2}.$$

Par un calcul direct on montre $\alpha'_1/\alpha'_2 = \alpha_1/\alpha_2$. On en déduit $\forall n \geqslant 2$ $N(Q_n)/N(Q_{n-1}) = \|P_n\|/\|P_{n-1}\|$. La vérification de l'égalité entre $N(Q_1)$ et $\|P_1\|$ est également élémentaire et nous permet de conclure le résultat. □

2. Corollaires I

2.1. L'opérateur $f(x) \mapsto g(x) = \int_0^1 \frac{f(t)-f(x)}{t-x}\rho(t)\,\mathrm{d}t$ créant les polynômes secondaires se prolonge en une application linéaire continue T_ρ reliant l'espace $\mathrm{L}^2([0,1],\rho)$ à l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2([0,1],\mu)$, dont la restriction à l'Hyperplan H_ρ des éléments orthogonaux pour ρ à $P_0 = 1$ constitue une isométrie pour les deux normes respectives.

Démonstration. En utilisant la base Hilbertienne des polynômes orthogonaux, on définit naturellement : $f = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n P_n \mapsto T_\rho(f) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n Q_n$. On a vu que pour tout $n \geqslant 1$ $\|P_n\|_\rho = \|Q_n\|_\mu$.

On a donc bien $\|T_\rho(f)\|_\mu^2 \leqslant \|f\|_\rho^2$ et si f est élément de H_ρ : $\|T_\rho(f)\|_\mu^2 = \|f\|_\rho^2$. $\square$

2.2. Formule de covariance. Pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathrm{L}^2([0,1],\rho)$ on a l'égalité :

$$\langle f/g\rangle_\rho - \langle f/1\rangle_\rho \times \langle g/1\rangle_\rho = \big\langle T_\rho(f)/T_\rho(g)\big\rangle_\mu.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la conservation du produit scalaire pour les deux projetés orthogonaux sur l'hyperplan H_ρ, soit : $f_1 = f - \langle f/1\rangle 1$ et $g_1 = g - \langle g/1\rangle 1$. $\square$

Remarque. Le résultat se généralise à un intervalle non borné sous réserve que le système des polynômes orthogonaux est bien encore total dans $\mathrm{L}^2([0,1],\rho)$. Par contre, cette isométrie ne recouvre l'espace d'arrivée que si le système des polynômes Q_n ; $n \geqslant 1$ est aussi total dans $\mathrm{L}^2([0,1],\mu)$.

Nous poserons alors la *définition* suivante : La mesure ρ est dite *réductible* si et seulement si le quotient ρ/μ appartient à l'espace image de l'opérateur T_ρ défini dans le Corollaire 2.1.

L'intérêt de cette notion est précisé par les résultats suivants.

Théorème 3. *Si la mesure ρ est réductible, alors l'unique antécédent ψ du quotient ρ/μ pour l'opérateur T_ρ appartenant à l'hyperplan H_ρ n'est autre que la réductrice φ de la densité ρ.*

Démonstration. On vérifie que $\psi = \varphi$ en établissant la coïncidence des moments de tout ordre pour ρ, qui après calculs s'explicitent en : $\sigma_n = \int_0^1 \psi(t)t^n\rho(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(t)t^n\rho(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{k=n-1} c_k c_{n-1-k}$. $\square$

3. Corollaires II

3.1. Pour tout élément f de $\mathrm{L}^2([0,1],\rho)$: $\langle f/\varphi\rangle_\rho = \langle T_\rho(f)/1\rangle_\rho$. (D'après 2.2.)
3.2. $\int_0^1 \varphi^2(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4\pi^2}{3}\int_0^1 \rho^3(x)\,\mathrm{d}x$. (Toujours d'après 2.2 et $T_\rho(\varphi) = \frac{\rho}{\mu}$.)
3.3. Les coefficients de Fourier de la réductrice φ par rapport à un système orthonormé de polynômes P_n s'obtiennent en utilisant les polynômes secondaires associés Q_n par la formule :

$$C_n(\varphi) = \langle\varphi/P_n\rangle_\rho = \big\langle T_\rho(\varphi)/Q_n\big\rangle_\mu = \left\langle\frac{\rho}{\mu}/Q_n\right\rangle_\mu = \langle Q_n/1\rangle_\rho.$$

Comme exemple d'application, pour la mesure $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x}$ sur$[0,+\infty[$, la réductrice est définie par $\varphi(x) = 2[\ln(x) - \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln|x-t|\,\mathrm{d}t] = -2\mathrm{e}^{-x}[Ei(1,-x) + \mathrm{i}\pi]$ et les coefficients de Fourier par rapport au système des polynômes de Laguerre sont donnés par $C_n(\varphi) = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{C_{n-1}^k}$.

On reconnaît l'opposé de la somme des éléments de la ligne d'indice n dans la table des nombres triangulaires harmoniques de Leibniz. De 3.2 on déduit alors l'intéressante formule :

$$\int_0^{+\infty} 4\big[Ei(1,-x)+\mathrm{i}\pi\big]^2\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{4\pi^2}{9} = \sum_{n=1}^{n=+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{C_{n-1}^k}\right)^2 \quad (Ei \text{ exponentielle intégrale}).$$

Références

[1] H. Buchwalter, Théorie Spectrale, Cours de DEA université Claude Bernard Lyon, 1983.
[2] A. Nikiforov, V. Ouvarov, Elements de la théorie des fonctions spéciales, Editions de Moscou, 1983.