Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 369–372
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des groupes

Métriques positives sur les espaces homogènes réductifs

Nicolas Prudhon [1]

UFR de mathématiques et informatique, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France

Reçu le 17 décembre 2006 ; accepté après révision le 13 juillet 2007

Disponible sur Internet le 11 septembre 2007

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Étant donnés un groupe de Lie semi-simple réel G et un sous-groupe réductif L de G stable par l'involution de Cartan, nous définissons une famille de métriques riemanniennes sur G/L, indexées par les points de G/K, où K est un sous-groupe compact maximal de G. Nous utilisons ces métriques pour généraliser un lemme de Rawnsley, Schmid et Wolf de la théorie des représentations associées aux variétés de drapeaux. Nous montrons alors que la représentation de G par translation à gauche sur l'espace des formes de carré intégrable sur G/L, n'est pas uniformément bornée. ***Pour citer cet article : N. Prudhon, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

Positive metrics on reductive spaces. Let G be a real semi-simple Lie group and L be a reductive subgroup of G stable by the Cartan involution. We define a family of positive metrics on G/L parametrized by the points of G/K, where K is a maximal compact subgroup of G. We then use these metrics to generalize a lemma of Rawnsley, Schmid and Wolf from representation theory. We then show that the representation of G by left translation on the space of L^2-forms on G/L is not uniformly bounded. ***To cite this article: N. Prudhon, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

La réalisation géométrique des modules de Zuckermann sur la cohomologie de Dolbeault de variétés de drapeaux (au sens de Wolf [6]) a été effectuée par H.W. Wong [7]. La construction d'une structure unitaire dans ces espaces de cohomologie conduit à considérer simultanément deux métriques sur ces variétés de drapeaux [5,1] : une première métrique, positive, non équivariante par rapport à l'action du groupe de Lie semi-simple G, et dont la définition dépend du choix d'une involution de Cartan ; et une seconde, équivariante mais seulement non-dégénérée, qui est définie intrinsèquement. Nous nous intéressons ici à la métrique positive. Nous donnons une nouvelle définition plus géométrique de cette métrique, ce qui permet d'une part de comprendre comment celle-ci dépend du choix d'une involution de Cartan, et d'autre part de montrer en toute généralité que l'action du groupe sur les formes différentielles de carré intégrable définit une représentation continue du groupe G. Le cadre naturel de cette étude, plus général que celui des variétés de drapeaux, est celui des espaces homogènes réductifs G/L, où L est stable par l'involution de

Adresse e-mail : prudhon@math.u-strasbg.fr.
[1] L'auteur était à post-doctorant à Neuchâtel, support FNRS Suisse No 20-101469, lorsqu'il a commencé à rédiger cet article.

1631-073X/$ – see front matter © 2007 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.
doi:10.1016/j.crma.2007.07.012

Cartan. La forme de Killing est alors non-dégénérée sur l'algèbre de Lie de L. De tels espaces homogènes apparaissent également en théorie des représentations [3]. L'utilisation de propriétés uniquement métriques suggère par ailleurs que la transitivité de l'action n'est pas nécessaire.

Fixons maintenant quelques notations. Soient $G^{\mathbb{C}}$ un groupe de Lie semi-simple complexe, G une forme réelle de $G^{\mathbb{C}}$. Notons $\mathfrak{g}_0$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{g}$ celle du groupe complexifiée $G^{\mathbb{C}}$. Nous adoptons la même convention pour les autres groupes et algèbres de Lie. Soit τ la conjugaison de $\mathfrak{g}$ associée à $\mathfrak{g}_0$. Soient K un sous-groupe compact maximal de G, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{s}_0$ la décomposition de Cartan correspondante, et θ l'involution de Cartan. L'extension de θ à $\mathfrak{g}$ est encore notée θ. Alors, par définition de θ, les involutions θ et τ commutent. La forme de Killing B est non-dégénérée sur $\mathfrak{g}$. Si E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, nous notons $E^{\perp}$ l'orthogonal de E pour la forme hermitiennne $(x, y) = B(x, \tau(y))$.

Soit L un sous-groupe réductif de G, tel que $\theta(\mathfrak{l}) = \mathfrak{l}$. Lorsque L est l'nsemble des points fixes d'une involution, ou encore lorsque G/L est une variété de drapeaux pour G, cette hypothèse n'est pas restrictive. L'involution θ est alors une involution de Cartan de $\mathfrak{l}_0$, et $L \cap K$ est un sous-groupe compact maximal de L. La restriction de la forme de Killing B à $\mathfrak{l}$ est alors non-dégénérée. En particulier, la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{l}^{\perp}$ est stable par l'action adjointe de $\mathfrak{l}$. Soit $Y = G/L$. L'espace tangent $(T_{eL}Y)_{\mathbb{C}}$ s'identifie avec $\mathfrak{l}^{\perp}$ de façon L-équivariante. La métrique hermitienne sur $(TY)_{\mathbb{C}}$ est alors définie dans la littérature [5,1] de la façon suivante. On commence par définir cette métrique en l'origine en posant pour tous $\xi, \eta \in \mathfrak{l}^{\perp}$,

$$(\xi, \eta)_{\mathrm{pos}} = -B\big(\xi, \theta\tau(\eta)\big). \tag{1}$$

Comme cette forme hermitienne n'est pas L-invariante (lorsque L n'est pas compact), il n'est pas possible de définir une forme hermitienne sur les autres espaces tangents par translation. On procède alors comme suit. D'après un lemme de Mostow [4], l'application

$$K \times \mathfrak{l}^{\perp} \cap \mathfrak{s}_0 \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{s}_0 \ni (k, X, Y) \mapsto k \exp(X) \exp(Y) \in G$$

est un difféomorphisme. Tout $g \in G$ s'écrit donc de manière unique sous la forme

$$g = k(g) \exp\big(X(g)\big) \exp\big(Y(g)\big).$$

Si $\xi_y \in (T_yY)_{\mathbb{C}}$ un vecteur tangent au point $y = gL \in Y$, alors il existe un unique vecteur $\xi \in (T_{eL}Y)_{\mathbb{C}}$ tangent à l'origine, vérifiant $\xi_y = k(g)\exp(X(g)) \cdot \xi$. En outre, si $l \in L$ et $g \in G$, alors

$$k(gl) \exp\big(X(gl)\big) = k(g) \exp\big(X(g)\big) l' \quad \text{avec } l' \in L \cap K. \tag{2}$$

La forme hermitienne est alors définie alors sans ambiguité, pour ξ_y, η_y tangents en $y \in Y$, en posant

$$(\xi_y, \eta_y)_{y,\mathrm{pos}} = (\xi, \eta)_{\mathrm{pos}}.$$

Dans cette Note, nous donnons une interprétation géométrique de la métrique $\|\cdot\|_{\mathrm{pos}}$. Nous utilisons cette interprétation pour montrer le lemme suivant :

Lemme 1. *Il existe une fonction C continue sur G, telle que si $g \in G$, et $\xi_y \in (T_yY)_{\mathbb{C}}$ est un vecteur tangent en $y \in Y$, alors*

$$\|g \cdot \xi_y\|_{gy,\mathrm{pos}} \leqslant C(g) \|\xi_y\|_{y,\mathrm{pos}}.$$

De plus, une telle fonction C n'est pas bornée sur G. En outre, il existe une fonction longueur ℓ sur G telle que la fonction C définie par $C(g) = \mathrm{e}^{\ell(g)}$ convienne.

Ce lemme améliore dans deux directions un résultat de Rawnsley, Schmid et Wolf [5, lemme 7.3]. Tout d'abord nous supprimons l'hypothèse que $\mathfrak{l}_0$ est l'ensemble des points fixes d'une involution. Ensuite, nous donnons une formule explicite pour la fonction C.

Rappelons que la variété $Y = G/L$ possède une mesure G-invariante car le sous-groupe L est réductif.

Corollaire 2. *Soit $\mathcal{H}$ l'espace des formes différentielles de carré intégrable (au sens de Hodge–Kodaira) pour la forme hermitienne positive sur Y. Alors l'action du groupe G sur $\mathcal{H}$ définit une représentation continue de G par des opérateurs bornés. En outre, cette représentation n'est pas uniformément bornée mais vérifie, pour toute forme différentielle $\omega \in \mathcal{H}$, l'inégalité $\|g \cdot \omega\|_{\mathrm{pos}} \leqslant \mathrm{e}^{\ell(g)} \|\omega\|_{\mathrm{pos}}$.*

Ce résultat est l'analogue de la proposition 5.3 dans [1], mais est plus précis et supprime l'hypothèse que L est l'ensemble des points fixes d'une involution. La démonstration est analogue, après substitution du Lemme 1 au lemme [5, lemme 7.3] de J. Rawnsley, W. Schmid et J. Wolf.

Pour donner une interprétation géométrique de la métrique positive, nous considérons la double fibration

$$G/L \xleftarrow{\pi_L} G/L \cap K \xrightarrow{\pi_K} G/K.$$

Le point de départ consiste à reformuler l'Éq. (2) de la manière suivante :

Proposition 3. *La formule $\sigma : gL \mapsto k(g)\exp(X(g))L \cap K$, définit bien une section de π_L.*

Pour poursuivre, il faut maintenant donner une interprétation géométrique de la section σ. De manière générale, une section de π_L est donnée par le choix d'un point base dans chaque fibre. Munissons la variété $X = G/K$ de la métrique fournie par la forme de Killing comme dans l'Éq. (1). Alors, pour tout $y \in Y$ fixé, la restriction de π_K à $E_y = \pi_L^{-1}\{y\}$ est un plongement sur un sous-espace totalement géodésique. Son image $\pi_K(E_y) \subset G/K$ est donc un sous-espace fermé (géodésiquement) convexe. Soit $x \in X$ un point base. Comme l'espace X est un espace $CAT(0)$, il existe un unique point $\sigma_x(y) \in E_y$ qui réalise la borne inférieure des distances $\mathrm{dist}_{G/K}(\pi_K(z), x)$ pour $z \in E_y$ [2].

Définition 4. L'application $y \mapsto \sigma_x(y)$ détermine une section σ_x de π_L.

Proposition 5. *Soit $x_0 = eK$. Alors les sections σ et σ_{x_0} de π_L sont égales.*

Démonstration. Soient $y \in Y$ et $g_0 \in G$ tel que $y = g_0L$. Il faut montrer que le point $x_1 = k(g_0)\exp(X(g_0))K \in \pi_K(E_y) = \{g_0\exp(Y)K,\ Y \in \mathfrak{l} \cap \mathfrak{s}_0\}$ réalise la distance de $\pi_K(E_y)$ à x_0. Pour cela, considérons la géodésique $\gamma : t \mapsto x_t = k(g_0)\exp(tX(g_0))K$, joignant x_0 à x_1. Il suffit de montrer que $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}|_{t=1}$ est orthogonal à $T_{x_1}\pi_K(E_y)$. Soit $g_1 = k(g_0)\exp(X(g_0))$. Alors, nous avons d'une part $g_1^{-1}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}|_{t=1} = X(g_0) \in \mathfrak{l}^{\perp} \cap \mathfrak{s}_0$; et d'autre part $g_1^{-1}T_{x_1}\pi_K(E_y) = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{s}_0$. Comme l'action de G sur X est isométrique, la conclusion en résulte. □

Remarque 1. Les sections σ_x, $x \in X$, vérifient

$$\sigma_{gx}(gy) = g\sigma_x(y) \tag{3}$$

par construction. Munissons la variété $G/L \cap K$ par la métrique $\|\ \|^{G/L\cap K}$, définie par la forme de Killing, comme dans l'Éq. (1). La famille de métriques $(\|\cdot\|^x)_{x\in X}$ sur G/L, définies par « pullback » de cette métrique via les sections σ_x, $\|\xi_y\|_y^x = \|d_y\sigma_x(\xi_y)\|_{\sigma(y)}^{G/L\cap K}$, est équivariante au sens où $\|g\cdot\xi_y\|_{gy}^{gx} = \|\xi_y\|_y^x$.

Démonstration du Lemme 1. Commençons par montrer l'existence de la fonction C. Soit $g_0 \in G$ tel que $y = g_0L$. Posons $l = l(g, g_0) = \exp(Y(gg_0))\exp(-Y(g_0))$. Il vient,

$$\|g\cdot\xi_y\|_{gy,\mathrm{pos}}^2 = -B\big(\mathrm{Ad}(l)\xi, \mathrm{Ad}(l)\big(\theta\tau(\xi)\big)\big) \leqslant \big\|\mathrm{Ad}(l)\big\|_{\mathrm{op}}^2\|\xi\|_{\mathrm{pos}}^2. \tag{4}$$

Il suffit donc de montrer que $l = l(g, g_0) \in L$ appartient à une partie compacte de L qui ne dépend que de $g \in G$ mais pas de $y \in Y$. Soit $g_1 = k(g_0)\exp(X(g_0))$ de sorte que $eL \cap K = g_1^{-1}\sigma_{x_0}(y)$. Alors, d'après l'Éq. (3),

$$\begin{aligned}
\sigma_{g^{-1}x_0}(y) &= g^{-1}\sigma_{x_0}(gy) = g^{-1}k(gg_0)\exp\big(X(gg_0)\big)L \cap K\\
&= g^{-1}gg_0\exp\big(-Y(gg_0)\big)L \cap K = k(g_0)\exp\big(X(g_0)\big)l^{-1}L \cap K\\
&= g_1l^{-1}g_1^{-1}\sigma_{x_0}(y).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}_X(l^{-1}x_0, x_0) &= \mathrm{dist}_X\big(l^{-1}g_1^{-1}\pi_K\big(\sigma_{x_0}(y)\big), g_1^{-1}\pi_K\big(\sigma_{x_0}(y)\big)\big)\\
&= \mathrm{dist}_X\big(\pi_K\big(g_1l^{-1}g_1^{-1}\sigma_{x_0}(y)\big), \pi_K\big(\sigma_{x_0}(y)\big)\big)\\
&= \mathrm{dist}_X\big(\pi_K\big(\sigma_{g^{-1}x_0}(y)\big), \pi_K\big(\sigma_{x_0}(y)\big)\big).
\end{aligned}$$

En outre, cette dernière distance est majorée par la distance $\mathrm{dist}_X(g^{-1} \cdot x_0, x_0)$, par construction de σ et car la projection sur un convexe fermé non vide est contractante [2] dans l'espace $CAT(0)$ G/K. Cette dernière distance ne dépend pas de $y \in Y$. Ceci montre l'existence de la fonction C, et le fait qu'elle soit non bornée. Une expression explicite de la fonction C est donnée dans le lemme suivant :

Lemme 6. *Il existe une constante c_G telle la fonction longueur $\ell(g) = c_G \mathrm{dist}_X(gx_0, x_0)$ vérifie*

$$\|g\xi_y\|_{gy,\mathrm{pos}} \leqslant \mathrm{e}^{\ell(g)} \|\xi_y\|_{y,\mathrm{pos}}.$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan déployée de $\mathfrak{g}$, telle que $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{l}$ soit une sous-algèbre de Cartan déployée de $\mathfrak{l}$. Choisissons un système de racines positives Δ^+ pour le système de racines $\Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$. Nous pouvons alors choisir une décomposition KAK de G telle que pour tout $g \in G$, la décomposition $g = k_1 \mathrm{e}^{H(g)} k_2$ vérifie $\alpha(H(g)) \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in \Delta^+$. Avec les notations de la démonstration précédente, écrivons $l = l(g, g_0) = k_1 \mathrm{e}^H k_2$, avec $H = H(l) \in \mathfrak{h}' \cap \mathrm{Lie}(A)$. Remarquons que $[\mathfrak{h}', \mathfrak{l}^\perp] \subset \mathfrak{l}^\perp$ car $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{l}$. Comme la forme hermitienne sur $\mathfrak{l}^\perp$ est $L \cap K$-invariante, il vient, $\|g\xi_y\|_{y,\mathrm{pos}} = \|\exp(\mathrm{ad}(H))\xi\|_{\mathrm{pos}}$.

Nous choisissons maintenant une base de $\mathfrak{l}^\perp$. Comme les involutions θ et τ commutent, l'involution $\theta\tau$ $(= \tau\theta)$ laisse stable l'ensemble des poids de $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})|_{\mathfrak{l}^\perp}$. En effet, si E_α est un vecteur propre pour la forme α, $[H, \theta\tau E_\alpha] = (\theta\tau(\alpha))(H)\theta\tau E_\alpha$ et $\theta\tau E_\alpha$ est vecteur propre pour la forme $\theta\tau(\alpha)$ Or, si E_α et E_β sont des vecteurs correspondant à des poids α et β respectivement, alors $B(E_\alpha, E_\beta) = 0$ si $\alpha + \beta \neq 0$. Par conséquent, les vecteurs non-nuls $\theta\tau E_\alpha$ et $E_{-\alpha}$ sont colinéaires, car $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{pos}}$ est définie positive. Il existe donc une base orthonormée (pour la forme $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{pos}}$) de $\mathfrak{l}^\perp$ formée de vecteurs associés aux poids de $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})|_{\mathfrak{l}^\perp}$. Soit (E_α) une telle base et écrivons $\xi = \sum_\alpha x_\alpha E_\alpha$. Il vient,

$$\big\|\exp\big(\mathrm{ad}(H)\big)\xi\big\|_{\mathrm{pos}}^2 = \Big\|\sum_\alpha x_\alpha \mathrm{e}^{\alpha(H)} E_\alpha\Big\|_{\mathrm{pos}}^2 \leqslant \mathrm{e}^{4\rho(H(l))}\|\xi\|_{\mathrm{pos}}^2,$$

où ρ est la demi-somme des restrictions (non-nulles) à $\mathrm{Lie}(A \cap L)$ des poids positifs de $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})|_{\mathfrak{l}^\perp}$. Soit ρ_G la demi-somme des restrictions (non-nulles) à $\mathrm{Lie}(A)$ des éléments du système de racines positives Δ^+. Il existe alors une constante c_G telle que $2\rho(H(l)) \leqslant 2\rho_G(H(l)) \leqslant c_G \,\mathrm{Trace}(\mathrm{ad}H(l)^2)^{1/2} = c_G \,\mathrm{dist}_X(lx_0, x_0) \leqslant c_G \,\mathrm{dist}_X(gx_0, x_0)$. Ainsi, la fonction longueur $\ell(g) = c_G \,\mathrm{dist}_X(gx_0, x_0)$ convient. $\square$

Références

[1] L. Barchini, R. Zierau, Square integrable harmonic forms and representation theory, Duke Math. J. 92 (3) (1998) 645–664.

[2] M. Bridson, A. Heafliger, Metric Spaces of Non Positive Curvature, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 319, Springer, 1999.

[3] S. Mehdi, R. Zierau, Principal series representations and harmonic spinors, Adv. Math. 199 (2006) 1–28.

[4] G.D. Mostow, Some new decomposition theorems for semi-simple groups, Mem. Amer. Math. Soc. 1955 (14) (1955) 31–54.

[5] J. Rawnsley, W. Schmid, J.A. Wolf, Singular unitary representations and indefinite harmonic theory, J. Funct. Anal. 51 (1) (1983) 1–114.

[6] J.A. Wolf, The action of a real semisimple group on a complex flag manifold. I. Orbit structure and holomorphic arc components, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969) 1121–1237.

[7] H.W. Wong, Dolbeault cohomologies and Zuckerman modules associated with finite rank representations, J. Funct. Anal. 127 (1995) 428–454.