Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 119–122

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des groupes/Équations aux dérivées partielles

Estimées du noyau de la chaleur pour les formes différentielles sur les espaces symétriques et L^2-cohomologie des espaces localement symétriques

Noël Lohoué [a], Salah Mehdi [b]

[a] CNRS et département de mathématiques, université Paris 11 – Orsay, 91405 Orsay cedex, France
[b] Institut de mathématiques de Jussieu et Modal'X, université Paris 10 – Nanterre, 75251 Paris cedex 05, France

Reçu le 15 décembre 2006 ; accepté après révision le 14 juin 2007

Disponible sur Internet le 13 juillet 2007

Présenté par Michel Duflo

Résumé

Nous estimons le noyau de la chaleur et la résolvante du laplacien pour les formes différentielles sur les espaces symétriques riemanniens. Nous en déduisons des résultats sur la L^2-cohomologie des espaces localement symétriques. ***Pour citer cet article : N. Lohoué, S. Mehdi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

Estimates for the heat kernel on differential forms on symmetric spaces and L^2-cohomology of locally symmetric spaces. We estimate the heat kernel and the resolvant of the Laplacian for differential forms on Riemannian symmetric spaces. We deduce some results on the L^2-cohomology of locally symmetric spaces. ***To cite this article: N. Lohoué, S. Mehdi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

1. Notation

Soient G un groupe de Lie semisimple réel connexe non compact de centre fini d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, K un sous-groupe compact maximal de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ et

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$$

la décomposition de Cartan associée. Pour chaque classe de conjugaison de sous-algèbres de Cartan dans $\mathfrak{g}$, nous fixons un représentant $\mathfrak{h}_i$ et nous posons $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{s}$. Soient Δ_i^+ un système de racines positives de $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ relatives à $\mathfrak{h}_i^{\mathbf{C}}$, Σ_i^+ un système de racines restreintes positives compatible avec Δ_i^+ et ρ_i (resp. $\rho_{\mathfrak{a}_i}$) la demi-somme des racines (resp. racines restreintes) positives, où $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ (resp. $\mathfrak{h}_i^{\mathbf{C}}$) désigne la complexification de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}_i$). Soient

$$P_i = M_i A_i N_i$$

Adresses e-mail : noel.lohoue@math.u-psud.fr (N. Lohoué), mehdi@math.jussieu.fr (S. Mehdi).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.06.016

la décomposition de Langlands du sous-groupe parabolique cuspidal de G associé à $\mathfrak{h}_i$, δ_i une représentation dans la série discrète $(\widehat{M}_i)_d$ de M_i, α_i une forme linéaire sur $\mathfrak{a}_i$ et $(\pi_{\delta_i,\alpha_i}, \mathcal{H}_{\delta_i,\alpha_i})$ la représentation de G dans la série principale associée à P_i. Dans le cas où $\mathfrak{a}_i$ est de dimension maximale, nous noterons respectivement $\mathfrak{a}$, Σ^+ et $P = MAN$ au lieu de $\mathfrak{a}_i$, Σ_i^+ et $P_i = M_iA_iN_i$. Si $\mathfrak{a}^+$ est la chambre de Weyl positive définie par Σ^+, nous avons les décompositions de Cartan $G = K\exp(\overline{\mathfrak{a}^+})K$ et d'Iwasawa $G = K\exp(\mathfrak{a})N$ de G. Notons respectivement $\exp(a^+(g))$ et $\exp(a(g))$ la $\exp(\overline{\mathfrak{a}^+})$-composante et la $\exp(\mathfrak{a})$-composante d'un élément g de G dans ces décompositions. La forme de Killing de $\mathfrak{g}$ induit une norme $\|\ \|$ sur $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^\star$, nous désignerons par le même symbole la norme définie sur G par : $\|g\| = \|a^+(g)\|$.

La restriction à K de l'action adjointe Ad de G se prolonge en une représentation σ_ℓ de K dans le produit extérieur $\Lambda^\ell\mathfrak{s}^{\mathbf{C}}$, $0 \leqslant \ell \leqslant \dim(\mathfrak{s})$:

$$\sigma_\ell = \Lambda^\ell \mathrm{Ad}.$$

Le produit tensoriel $L^2(G) \otimes \Lambda^\ell\mathfrak{s}^{\mathbf{C}}$ est alors muni de l'action $L \otimes 1$ de G et de l'action $R \otimes \sigma_\ell$ de K, où L (resp. R) désigne la translation à gauche (resp. droite) sur G. Nous obtenons ainsi une représentation de G dans le sous-espace $(L^2 \otimes \Lambda^\ell\mathfrak{s}^{\mathbf{C}})^K$ des vecteurs K-invariants, i.e l'espace des ℓ-formes différentielles de carré intégrable sur l'espace symétrique (riemannien) G/K. La formule de Plancherel pour les ℓ-formes sur G/K prend alors la forme suivante (voir le paragraphe 5 de [6]) :

$$\big(L^2 \otimes \Lambda^\ell\mathfrak{s}^{\mathbf{C}}\big)^K \simeq \sum_i \sum_{\delta_i \in \widehat{M}_i(\sigma_\ell)} \int_{\mathfrak{a}^\star_{i,0}}^{\widehat{\oplus}} \mathcal{H}_{\delta_i,\sqrt{-1}\,\nu_i} \widehat{\otimes} \big(\mathcal{H}^\star_{\delta_i,\sqrt{-1}\nu_i} \otimes \Lambda^\ell\mathfrak{s}^{\mathbf{C}}\big)^K \mathbf{c}_{\delta_i}(\sqrt{-1}\,\nu_i)\,\mathrm{d}\nu_i$$

où

$$\widehat{M}_i(\sigma_\ell) = \big\{\delta \in (\widehat{M}_i)_d \mid \mathrm{Hom}_{M_i\cap K}(\sigma_\ell, \delta) \neq \{0\}\big\}$$

et $\mathbf{c}_{\delta_i}$ est la densité de Plancherel. Si $Q_\ell = \int_K R(k) \otimes \sigma_\ell(k)\,\mathrm{d}k$ désigne la projection de $L^2(G) \otimes \Lambda^\ell\mathfrak{s}^{\mathbf{C}}$ sur $(L^2(G) \otimes \Lambda^\ell\mathfrak{s}^{\mathbf{C}})^K$, alors le laplacien Δ_ℓ agissant sur les ℓ-formes différentielles de carré intégrable sur G/K est défini par :

$$\Delta_\ell \circ Q_\ell = -Q_\ell \circ (\Omega_G \otimes \mathrm{Id}_{\wedge^\ell\mathfrak{s}^{\mathbf{C}}}),$$

où Ω_G est l'opérateur de Casimir de G. D'après la formule de Kuga (voir p. 49 de [3]), nous savons que :

$$\pi_{\delta_i,\alpha_i}(\Delta_\ell) = -\pi_{\delta_i,\alpha_i}(\Omega_G)$$

indépendamment du degré ℓ. D'autre part, l'opérateur de Casimir de G agit comme un opérateur scalaire sur (les vecteurs lisses de) $\mathcal{H}_{\delta_i,\alpha_i}$:

$$\pi_{\delta_i,\alpha_i}(\Omega_G) = \big(\big\|\mathrm{char}(\delta_i)\big\|^2 + \|\alpha_i\|^2 - \|\rho_i\|^2\big)\,\mathrm{Id}$$

où $\mathrm{char}(\delta_i)$ désigne le caractère infinitésimale de δ_i. Nous posons alors :

$$\lambda_\ell(G/K) = \inf\big\{\|\rho_i\|^2 - \big\|\mathrm{char}(\delta_i)\big\|^2 \mid \delta_i \in \widehat{M}_i(\sigma_\ell)\big\}.$$

Nous calculerons explicitement $\lambda_\ell(G/K)$ pour les groupes complexes ainsi que pour des groupes hermitiens de rang réel égal à 2.

Soit $\Delta = \Omega_G - 2\Omega_K$ le laplacien sur G, où Ω_K est l'opérateur de Casimir de K, et notons $P_t = e^{t\Delta}$ la solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur G. Il est bien connu (voir [2]) que :

$$(P_t f)(g_0) = \int_G p_t\big(g_0^{-1}g\big) f(g)\,\mathrm{d}g$$

pour tous $f \in L^2(G)$ et $g_0 \in G$, où $p_t \in L^2(G) \cap C^\infty(G)$ est le noyau de la chaleur sur G. De manière analogue, si $P_t^\ell = \mathrm{e}^{-t\Delta_\ell}$ est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur les ℓ-formes différentielles sur G/K, alors nous avons :

$$\big(P_t^\ell\phi\big)(g_0) = \int_G p_t^\ell\big(g_0^{-1}g\big)\big(\phi(g)\big)\,\mathrm{d}g$$

pour tous $\phi \in (L^2 \otimes \Lambda^\ell \mathfrak{s}^{\mathbf{C}})^K$ et $g_0 \in G$, où $p_t^\ell : G \overset{C^\infty}{\to} \mathrm{End}(\Lambda^\ell \mathfrak{s}^{\mathbf{C}})$ est le noyau de la chaleur sur les ℓ-formes. Le lien entre le noyau de la chaleur sur les fonctions sur G et le noyau de la chaleur sur les ℓ-formes sur G/K est facile à établir :

$$p_t^\ell(g) = \int_{K \times K} p_t\big(k^{-1} g k'\big)\sigma_\ell(k)\mathrm{e}^{2t\Omega_K}\sigma_\ell(k')^{-1}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}k'.$$

Une démonstration détaillée des résultats que nous annonçons sera fournie dans un article à venir. Nous remercions le rapporteur pour ses remarques et ses suggestions.

2. Estimées du noyau de la chaleur

Théorème 1. *Soient G un groupe de Lie réel connexe non compact de centre fini et K un sous-groupe compact maximal de G. Pour tout $\epsilon \in]0; 1[$, il existe deux nombres réels strictement positifs a_ϵ et A_ϵ tels que*

$$\big\| p_t^\ell(g) \big\| \leqslant a_\epsilon \mathrm{e}^{-t\lambda_\ell(G/K)} \Phi_0(g) \mathrm{e}^{-\frac{1-\epsilon}{(1+2\epsilon)^2}\frac{\|g\|^2}{4t}} t^{-\epsilon\frac{r+z}{2}}$$

pour tout $g \in G$ satisfaisant $\|g\| > A_\epsilon$ et tout réel $t > 1$, où $\Phi_0(g) = \int_K \mathrm{e}^{-\rho_{\mathfrak{a}_i}(a(g^{-1}k))}\,\mathrm{d}k$ est la fonction sphérique de Harish-Chandra, $r = \inf_i\{\dim(\mathfrak{a}_i) \neq 0\}$ et $z = \inf_i\{$ordre de zéro de $\mathbf{c}_{\delta_i}$ en $\nu_i = 0\}$.

La stratégie de la preuve repose éssentiellement sur les points suivants :

- utiliser l'expression de p_t^ℓ obtenue à partir de la formule de Plancherel pour les ℓ-formes (voir le paragraphe 8 de [6]),
- décomposer le produit scalaire $\langle p_t^\ell(g)\eta, \beta\rangle_{\Lambda^\ell \mathfrak{s}^C}$, pour tout g dans G, en deux termes $\varphi_{1,\epsilon}(g)$ et $\varphi_{2,\epsilon}(g)$ dont le support dépend de ϵ, en observant que l'on peut supposer g dans $\exp(\overline{\mathfrak{a}^+})$ et choisir η et β dans la même composante irréductible de σ_ℓ,
- utiliser le théorème de Paley–Wiener sur G (voir [5]) pour obtenir que $\varphi_{2,\epsilon}$ est une fonction C^∞ à support compact sur G dont le support ne contient pas g,
- estimer alors $\varphi_{1,\epsilon}$.

3. Estimées de la résolvante

Théorème 2. *Soient G un groupe de Lie réel connexe non compact de centre fini et K un sous-groupe compact maximal de G. A tout nombre complexe λ dans l'ensemble résolvant de Δ_ℓ, nous associons les nombres complexes τ_i définis par : $\tau_i^2 = \|\mathrm{char}(\delta_i)\|^2 - \|\rho_i\|^2 + \lambda$ où $\delta_i \in \widehat{M}_i(\sigma_\ell)$. Nous supposons que la partie imaginaire $\mathrm{Im}(\tau_i)$ de τ_i est strictement positive et nous posons $\tau = \inf_i\{\mathrm{Im}(\tau_i)\}$. Alors pour tout $\epsilon \in]0; 1[$, il existe deux nombres réels strictement positifs b_ϵ et B_ϵ tels que*

$$\big\|(\Delta_\ell - \lambda)^{-1}(g)\big\| \leqslant b_\epsilon \Phi_0(g)\mathrm{e}^{-(1-\epsilon)\tau\|g\|} \tag{3.1}$$

pour tout g satisfaisant $\|g\| > B_\epsilon$.

L'idée est d'estimer $(\Delta_\ell - \lambda)^{-1} \star P_{\epsilon_0}^\ell$ pour ϵ_0 suffisamment petit, puis de prendre la limite $\epsilon_0 \to 0$. Un point crucial est de démontrer que les constantes intervenant dans nos estimations ne dépendent pas de ϵ_0. Lorsque le paramètre λ est réel le théorème 2 peut se déduire du théorème 1. Pour des résultats dans le cas des fonctions, i.e. lorsque $\ell = 0$, le lecteur pourra consulter [1].

4. L^2-cohomologie des espaces localement symétriques

Soient Γ un sous-groupe discret sans torsion de G et $D(\ ,\ )$ la distance riemannienne sur G/K induite par la forme de Killing. Soient $C_0^\infty(\Gamma\backslash G/K, \Lambda^\ell \mathfrak{s}^{\mathbf{C}})$ l'espace des ℓ-formes différentielles à support compact sur l'espace localement symétrique $\Gamma\backslash G/K$ et $\tilde{\Delta}_\ell$ le laplacien agissant sur les ℓ-formes. Soient d_ℓ la différentielle extérieure et ∂_ℓ son adjoint de sorte que $\tilde{\Delta}_\ell = d_{\ell-1}\partial_\ell + \partial_{\ell+1}d_\ell$. Soit $W_{2,\ell}$ l'espace vectoriel défini par :

$$W_{2,\ell} = \left\{\ell\text{-forme } \omega \text{ sur } \Gamma\backslash G/K \mid \|\omega\|_{L^2} < +\infty \text{ et } \|d_\ell\omega\|_{L^2} < +\infty\right\}.$$

Notons $H^{(\ell)}(\Gamma\backslash G/K) = \mathrm{Ker}(d_\ell)/\mathrm{Im}(d_{\ell-1})$ le groupe de la L^2-cohomologie (non réduite) de degré ℓ associé au complexe :

$$W_{2,0} \xrightarrow{d_0} W_{2,1} \xrightarrow{d_1} W_{2,2} \xrightarrow{d_2} \cdots.$$

Par ailleurs, la série de Poincaré de Γ est définie, pour tous $x, x' \in G/K$ et $s \in \mathbf{R}$, par :

$$P_s(x,x') = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{e}^{-sD(x,\gamma x')}.$$

L'exposant critique de Γ est alors le nombre réel $\delta(\Gamma)$ tel que, pour tous $x, x' \in G$, $P_s(x,x')$ converge pour $s > \delta(\Gamma)$ et diverge pour $s < \delta(\Gamma)$. Notons

$$\rho_{\min} = \inf\left\{\rho_{\mathfrak{a}}(X) \mid X \in \overline{\mathfrak{a}^+}, \|X\| = 1\right\}$$

et $\mu_\ell(\Gamma\backslash G/K)$ le bas du spectre de $\tilde{\Delta}_\ell$:

$$\mu_\ell(\Gamma\backslash G/K) = \inf_{\substack{\|f\|_{L^2}=1\\ f\in C_0^\infty(\Gamma\backslash G/K,\Lambda^\ell\mathfrak{s}^{\mathbf{C}})}} \langle\tilde{\Delta}_\ell f, f\rangle.$$

Nous obtenons alors :

Théorème 3. *Soient G un groupe de Lie réel connexe non compact de centre fini, K un sous-groupe compact maximal de G et Γ un sous-groupe discret sans torsion de covolume infini de G. Nous supposons que $\lambda_\ell(G/K) \neq 0$.*

(i) *si $\delta(\Gamma) \leqslant \rho_{\min}$ alors $\mu_\ell(\Gamma\backslash G/K) \geqslant \lambda_\ell(G/K)$,*
(ii) *si $\rho_{\min} \leqslant \delta(\Gamma) \leqslant \|\rho_{\mathfrak{a}}\| + \sqrt{\lambda_\ell(G/K)}$ alors $\mu_\ell(\Gamma\backslash G/K) \geqslant \lambda_\ell(G/K) - (\delta(\Gamma) - \rho_{\min})^2$,*
(iii) *si $|\delta(\Gamma) - \rho_{\min}| \leqslant \|\rho_{\mathfrak{a}}\| < \delta(\Gamma)$ et $\lambda_\ell(G/K) \geqslant (\delta(\Gamma) - \rho_{\min})^2$ alors $\mu_\ell(\Gamma\backslash G/K) \geqslant \lambda_\ell(G/K) - (\delta(\Gamma) - \rho_{\min})^2$.*

Corollaire. *Soient G un groupe de Lie réel connexe non compact de centre fini, K un sous-groupe compact maximal de G et Γ un sous-groupe discret sans torsion de covolume infini de G. Nous supposons que $\lambda_\ell(G/K) \neq 0$. Alors le groupe $H^{(\ell)}(\Gamma\backslash G/K)$ est trivial dans les cas suivants* :

(i) $\delta(\Gamma) \leqslant \rho_{\min}$,
(ii) $\rho_{\min} \leqslant \delta(\Gamma) \leqslant \|\rho_{\mathfrak{a}}\| + \sqrt{\lambda_\ell(G/K)}$ *et* $\sqrt{\lambda_\ell(G/K)} > \delta(\Gamma) - \rho_{\min}$,
(iii) $|\delta(\Gamma) - \rho_{\min}| \leqslant \|\rho_{\mathfrak{a}}\| < \delta(\Gamma)$ *et* $\sqrt{\lambda_\ell(G/K)} > |\delta(\Gamma) - \rho_{\min}|$.

L'idée est d'utiliser la série de Poincaré de Γ pour déduire, du théorème 2, une estimation de la résolvante du laplacien $\tilde{\Delta}_\ell$ sur $\Gamma\backslash G/K$. Pour des résultat analogues en rang 1, le lecteur pourra consulter [4].

Références

[1] J.-P. Anker, L. Ji, Heat kernel and Green function estimates on noncompact symmetric spaces, Geom. Funct. Anal. 9 (1999) 1035–1091.
[2] D. Barbasch, H. Moscovici, L^2-index and the Selberg trace formula, J. Funct. Anal. 53 (1983) 151–201.
[3] A. Borel, N. Wallach, Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1980.
[4] G. Caron, E. Pedon, On the differential form spectrum of hyperbolic manifolds, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 3 (2004) 705–747.
[5] P. Delorme, Sur le théorème de Paley–Wiener d'Arthur, Ann. of Math. 162 (2005) 987–1029.
[6] N. Lohoué, S. Mehdi, The Novikov–Shubin invariants of locally symmetric spaces, J. Math. Pures Appl. 79 (2000) 111–140.