Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 21–24
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse harmonique/Analyse mathématique

Entiers aléatoires, ensembles de Sidon, densité dans le groupe de Bohr et ensembles d'analyticité

Jean-Pierre Kahane [a], Yitzhak Katznelson [b]

[a] *Département de mathématiques, université Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France*
[b] *Department of Mathematics, Stanford University, Stanford, California 94305, États-Unis*

Reçu le 22 mai 2007 ; accepté le 29 mai 2007

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

On sélectionne des entiers n au hasard indépendamment les uns des autres, avec la probabilité ϖ_n, et on étudie les propriétés de la suite Λ obtenue en distinguant deux cas : si $\limsup_{n\to\infty} n\varpi_n < \infty$, Λ est p.s. un ensemble de Sidon non-dense dans le groupe de Bohr ; si $\lim_{n\to\infty} n\varpi_n = \infty$, Λ est p.s. dense dans le groupe de Bohr et n'est pas un ensemble de Sidon, et, de plus, c'est un ensemble d'analyticité. ***Pour citer cet article : J.-P. Kahane, Y. Katznelson, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

Random sequences of integers, Sidon sets, density in the Bohr group, and sets of analyticity. We study properties of a sequence Λ obtained by a random selection of integers n, where $n \in \Lambda$ with probability ϖ_n, independently of the other choices. We distinguish two cases: if $\limsup_{n\to\infty} n\varpi_n < \infty$, Λ is a.s. a Sidon set, non-dense in the Bohr group; if $\lim_{n\to\infty} n\varpi_n = \infty$, then Λ is a.s. a set of analyticity and is dense in the Bohr group. ***To cite this article: J.-P. Kahane, Y. Katznelson, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abridged English version

The work described in this Note deals with harmonic-analytic properties of random sequences of positive integers: that of being a Sidon set, a set of analyticity, dense, or non-dense in the Bohr group $\mathbb{B}$, (the Bohr compactification of the integers, the dual group of $\mathbb{T}_d$, the circle endowed with the discrete topology).

A sequence $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ is a Sidon set if $c_0(\Lambda) = A(\Lambda)$, that is: every sequence $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ which tends to 0 as $|\lambda| \to \infty$ is the restriction to Λ of $\hat{f}$ for some $f \in L^1(\mathbb{T})$. Λ is a set of analyticity if only analytic functions operate in $A(\Lambda)$, that is, every function F defined on $\mathbb{R}$ such that $F \circ \varphi \in A(\Lambda)$ for every real-valued $\varphi \in A(\Lambda)$ is analytic in some neighborhood of 0.

Adresses e-mail : jean-pierre.kahane@math.u-psud.fr (J.-P. Kahane), katznel@math.stanford.edu (Y. Katznelson).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.06.001

Random sequences provide classes of sequences for which there is a *statistical* answer to some long standing open problems:

a) The ***dichotomy*** problem: is every sequence $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ is either a Sidon set or a set of analyticity?

b) Can a Sidon set be dense in $\mathbb{B}$?

The class of random sequences studied in this work is different from those appearing in earlier work, [1–3]. We consider sets obtained from a sequence $\mathbf{w} = \{w_n\}$, $0 \leqslant w_n < 1$ by introducing independent Poisson variables ξ_n with parameters w_n, or Bernoulli zero-one variables β_n with probability $\mathbf{P}(\beta_n = 1) = \varpi_n = (1 - \mathrm{e}^{-w_n})$ and set $\Lambda = \Lambda_{\mathbf{w}}(\omega) = \{n\colon \beta_n = 1\}$ (or $\Lambda = \{n\colon \xi_n \geqslant 1\}$). Notice that the sequences defined by $\{\xi_n\}$ are the same and have the same statistics as those given by β_n, but the Poisson variables give different weights to some of the selected points, which simplifies some computations.

For 'reasonably regular' sequences of parameters we obtain a statistical dichotomy:

Theorem 1. *If* $nw_n = \mathrm{O}(1)$ *then* Λ *is a.s. a Sidon set and is non-dense in* $\mathbb{B}$.

Theorem 2. *If* $\lim_{n\to\infty} nw_n = \infty$ *then* Λ *is a.s. a set of analyticity dense in* $\mathbb{B}$.

Observe that 'reasonable regularity' is needed. The condition $\lim_{n\to\infty} nw_n = \infty$ in Theorem 2 cannot be replaced by $\limsup_{n\to\infty} nw_n = \infty$: if $w_n = 1/2$ for $n \in \{3^k\}_{k=1}^{\infty}$ and $w_n = 1/n$ for all other n, the sequence Λ obtained is a union of two Sidon sets, and hence Sidon.

1. Introduction

Cette Note fait suite à des travaux anciens, [1–3], relatifs aux ensembles de Helson et de Sidon d'une part, aux ensembles d'analyticité et à la densité dans le groupe de Bohr d'autre part, qui ont introduit le procédé appelé aujourd'hui sélection aléatoire. Nous allons rappeler le sens de ces termes.

Nous partirons d'une suite positive $\mathbf{w} = \{w_n\}$ et nous lui associerons une suite aléatoire $\Lambda = \Lambda_{\mathbf{w}}(\omega)$ ($\omega \in \Omega$, espace de probabilité) de l'une des manières équivalentes que voici :

1) $\Lambda = \{n \in \mathbb{N}\colon \xi_n > 0\}$, où ξ_n sont des variables aléatoires (v.a.) indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètres w_n $(= \mathbf{E}(\xi_n))$.

2) $\Lambda = \{n \in \mathbb{N}\colon \beta_n > 0\}$, où β_n sont des variables de Bernoulli indépendantes, d'espérance $\varpi_n = 1 - \mathrm{e}^{-w_n} = \mathbf{P}(\beta_n = 1)$.

Dans les énoncés qui suivent, on peut écrire ϖ_n aussi bien que w_n. La définition 1 est utile dans certaines démonstrations.

Théorème 1. *Si* $w_n = \mathrm{O}(\frac{1}{n})$ $(n \to \infty)$, *il est presque sûr que* Λ *est un ensemble de Sidon, non-dense dans le groupe de Bohr* $\mathbb{B}$.

Théorème 2. *Si* $\lim_{n\to\infty} nw_n = \infty$, *il est presque sûr que* Λ *est un ensemble d'analyticité* (*donc n'est pas un ensemble de Sidon*), *dense dans* $\mathbb{B}$.

Ces résultats sont à comparer aux deux problèmes toujours ouverts :

1) (problème de « dichotomie ») une partie de $\mathbb{Z}$ est-elle nécessairement soit un ensemble de Sidon, soit un ensemble d'analyticité ?

2) (problème de l'adhérence dans $\mathbb{B}$ d'un ensemble de Sidon) un ensemble de Sidon dans $\mathbb{Z}$ est-il toujours non-dense dans $\mathbb{B}$? On sait, [4], que s'il existe un ensemble de Sidon dont l'adhérence dans $\mathbb{B}$ contient un ouvert non vide, alors il existe un ensemble de Sidon dense dans $\mathbb{B}$.

G étant un groupe abélien localement compact, on désigne par $A(G)$ l'algèbre des fonctions continues sur G qui sont transformées de Fourier de fonctions intégrables sur le groupe dual, Γ. Si E est un fermé dans G, $A(E)$ désigne l'algèbre des restrictions à E des $f \in A(G)$. Si E est un compact et que $A(E) = C(E)$, espace des fonctions continues sur E, on dit que E est un ensemble de Helson. Quand G est discret et que $A(E) = c_0(E)$, espace des fonctions définies sur E et tendant vers 0 à l'infini, on dit que E est un ensemble de Sidon. Dans la suite, on s'intéresse aux cas $G = \mathbb{T}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$, ou $\mathbb{B}$.

Les fonctions analytiques $F(z)$ opèrent dans $A(G)$, c'est-à-dire que $F \circ f \in A(G)$ lorsque $f \in A(G)$ et que f prend ses valeurs dans le domaine de F. Inversement, les seules fonctions définies sur un voisinage réel de 0 qui opèrent dans $A(G)$ sont les fonctions analytiques (nulles en 0 si G n'est pas compact). On dit que E est un ensemble d'analyticité si cela a lieu en remplaçant $A(G)$ par $A(E)$. Ni les ensembles de Helson ni les ensembles de Sidon ne sont ensembles d'analyticité.

$\mathbb{B}$, le compactifié de Bohr de $\mathbb{Z}$, est le groupe dual de $\mathbb{T}_d$ ($\mathbb{T}$ discret). Sa topologie est la moins fine qui rende continus les caractères $\beta \to \langle \beta, t\rangle$; une sous-base en est la famille des ensembles $U(\tau,\eta,\zeta) = \{\beta\colon |\langle\beta,\tau\rangle - \zeta| < \eta\}$, $\tau \in \mathbb{T}$, $\eta > 0$, et $|\zeta| = 1$.

Si $\mathbf{w} = \mathbf{w}' + \mathbf{w}''$ ($w_n = w_n' + w_n''$), la réunion de $\Lambda_{\mathbf{w}'}$ et $\Lambda_{\mathbf{w}''}$ indépendants a la même loi que $\Lambda_{\mathbf{w}}$. On renforce le Théorème 1 en augmentant les w_n, el le Théorème 2 en les diminuant.

2. Preuve du Théorème 1

On prend $w_n = \frac{\alpha}{n}$. Si α est assez petit ($\alpha \log 3 < 1$ suffit), Λ est avec probabilité > 0 un ensemble quasi-indépendant, c'est-à-dire sans relation linéaire à coefficients $-1, 0, 1$ non tous nuls entre ses éléments. En général, Λ est p.s. une réunion finie d'ensembles quasi-indépendants, qu'on sait être un ensemble de Sidon.

La non-densité résulte de la proposition suivante : si α est assez petit ($\alpha < \alpha(\varepsilon)$), il existe p.s. un ensemble dense de t dans $\mathbb{T}$ tel que $[-\varepsilon,\varepsilon]$ contienne tous les points de Λt sauf un ensemble fini.

Pour démontrer la proposition, on part de la fonction triangle d'intégrale 1 et de support $[-\varepsilon,\varepsilon]$, soit f, et d'un intervalle $I \subset \mathbb{T}$, et on étudie la martingale positive

$$Y_N = \int_I \prod_{n=1}^{N} \bigl(f(nt)\bigr)^{\xi_n} \exp\left(-\frac{\alpha}{n}\bigl(f(nt)-1\bigr)\right) \mathrm{d}t.$$

Sous la condition $\alpha < \varepsilon^2$, elle converge dans $L^2(\Omega)$, et cela donne le résultat voulu. Voici les étapes de calcul : on pose $L_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos 2\pi nt}{n}$ et on vérifie que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\bigl(Y_N^2\bigr) &= \iint_{I\times I} \exp \sum_{jk\neq 0} \alpha \hat f_j \hat f_k L_N(js+kt)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \prod_{jk\neq 0}\left(\iint_{I\times I} \exp \alpha \hat f_j \hat f_k L_N(js+kt)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\right)^{1/p_{jk}}\end{aligned}$$

avec $p_{jk}^{-1} = \hat f_j \hat f_k \bigl(\sum_{jk\neq 0} \hat f_j \hat f_k\bigr)^{-1}$. En majorant $\iint_{I\times I}$ par $\iint_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}}$, et $L_N(t)$ par $\log\frac{1}{|\sin\pi t|} + C$ on obtient

$$\mathbf{E}\bigl(Y_N^2\bigr) \leqslant \int_{\mathbb{T}} \exp \alpha \sum_{jk\neq 0} \hat f_j \hat f_k \left(\log\frac{1}{|\sin \pi t|} + C\right) \mathrm{d}t, \tag{1}$$

et cette intégrale est bornée quand $\alpha \sum_{jk\neq 0} \hat f_j \hat f_k < 1$.

3. Preuve du Théorème 2

On suppose $\lim_{n\to\infty} n w_n = \infty$. Posons $\Lambda_N = \Lambda \cap [1,\dots,N]$. Si Λ était un ensemble de Sidon, on aurait $|\Lambda_N| = \mathrm{O}(\log N)$ ($N \to \infty$), ce qui, p.s., n'est pas le cas.

Preuve que Λ est un ensemble d'analyticité. Elle s'inspire de [1]. Quitte à diminuer les w_n, on suppose qu'à partir d'un certain rang ils sont constants sur chaque intervalle joignant deux multiples successifs d'une puissance de 2 donnée. On sait que, pour tout $0 < c < 1$ et tout $r > 0$ assez grand, il existe $\varphi \in A(\mathbb{T})$ réelle telle que $\|\varphi\|_{A(\mathbb{T})} < r$ et $\|\mu \mathrm{e}^{-i\varphi}\|_{PM(\mathbb{T})} < \mathrm{e}^{-cr}$, où μ est la mesure de Haar et $PM(\mathbb{T})$ l'espace des pseudomesures, dual de $A(\mathbb{T})$. Il s'agit, pour des r arbitrairement grands, de montrer qu'il existe, avec une probabilité arbitrairement voisine de 1, une partie finie Λ_r, une mesure τ_r portée par Λ_r et une fonction réelle $\psi_r \in A(\mathbb{R})$, telles que $\|\psi_r\|_{A(\mathbb{R})} < Cr$ et $\|\tau_r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi_r}\|_{PM(\mathbb{R})} < C\|\tau_r\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{R})}\mathrm{e}^{-cr}$, $C > 0$ et $c \in (0,1)$ étant des constantes absolues.

L'idée est de choisir $\tau_r = \sum_F \xi_n \delta_n$, la somme étant prise sur un ensemble F de valeurs de n dépendant convenablement de r et comportant des plages de constance pour w_n. L'étude déterministe consiste à obtenir ces inégalités quand on remplace τ_r par $\sigma_r = \mathbf{E}(\tau_r) = \sum_F w_n \delta_n$, et l'étude probabiliste vise à montrer que $\|(\tau_r - \sigma_r)e^{i\psi_r}\|_{PM(\mathbb{R})}$ est négligeable au regard de $\|\tau_r\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{R})} e^{-cr}$.

Preuve de la densité dans $\mathbb{T}$. Elle est inspirée de [2,3]. Voici la proposition clé : si $w_n = \frac{\alpha}{n}$ et $\alpha|I| > 1$ (I un intervalle sur $\mathbb{T}$), il est presque sûr que, pour tout irrationnel $t \in \mathbb{T}$, $\Lambda t \cap I \neq \varnothing$. Cette proposition admet une version multidimensionelle, dans laquelle l'irrationnel $t \in \mathbb{T}$ est remplacé par un génerateur $\mathbf{t} \in \mathbb{T}^s$, et qui entraine la densité dans $\mathbb{B}$.

Pour établir $\Lambda t \cap I \neq \varnothing$ pour tout t, l'idée est de se ramener à un ensemble fini de valeurs de t, quitte à réduire I. Les étapes de la preuve sont les suivantes :

1) on approche I par un intervalle intérieur J, à distance d des extrémités de I ;

2) on approche $\mathbb{1}_J$ dans $L^1(\mathbb{T})$ par une fonction continue f, $0 \leqslant f \leqslant \mathbb{1}_J$;

3) on approche uniformément f par un polynome trigonométrique, de degré k ;

4) on approche $\mathbb{T}$ par un ouvert $G = \{t\colon \forall j \in \{1, 2, \ldots, k\} |\sin \pi j t| > \delta\}$ et on vérifie que pour un β arbitrairement proche de $\alpha|I|$ et pour un $C = C(\beta, \delta)$ fini on a

$$\int_G \mathbf{P}(\Lambda_N t \cap J = \varnothing)\,\mathrm{d}t < CN^{-\beta};$$

5) on choisit $M = \frac{N}{d}$ et on vérifie qu'il existe un $\vartheta \in \mathbb{T}$ tel que

$$\sum_{\vartheta + mM^{-1} \in G} \mathbf{P}\big(\Lambda_N\big(\vartheta + mM^{-1}\big) \cap J = \varnothing\big) < CMN^{-\beta} = \mathrm{o}(1)(N \to \infty);$$

6) on approche tout $t \in G$ donné par un $\vartheta + mM^{-1} \in G$ qui en est à distance $< d$, d'où $\mathbf{P}(\Lambda t \cap I = \varnothing) = 0$.

4. Remarques sur les suites d'entiers dans le groupe de Bohr $\mathbb{B}$

Différents critères de densité et des exemples sont donnés dans [3].

Les ensembles I_0 de Hartman et Ryll-Nardzewski forment une classe particulière d'ensembles de Sidon, et leur adhérence dans $\mathbb{B}$ est un ensemble de Helson. Il a été conjecturé que tout ensemble de Sidon soit une réunion finie d'ensembles I_0. Il s'ensuivrait que l'adhérence d'un ensemble de Sidon soit un ensemble de Helson dans $\mathbb{B}$, [5].

En complément du problème 2, on peut donc se demander si l'adhérence dans $\mathbb{B}$ d'un ensemble de Sidon est nécessairement un ensemble de Helson. Est-ce nécessairement un ensemble de mesure de Haar nulle ?

En ce qui concerne les entiers aléatoires, le théorème 1 répond à la question de non-densité, mais laisse ouverte la question de la mesure de Haar de l'adhérence de la suite Λ. (Note sur épreuves : la rèponse est positive.)

Références

[1] Y. Katznelson, P. Malliavin, Vérification statistique de la conjecture de la dichotomie sur une classe d'algèbres de restriction, C. R. Acad. Sci. Paris 262 (1966) 490–492.

[2] Y. Katznelson, Suites aléatoires d'entiers, in : L'analyse harmonique dans le domaine complexe, Montpellier, 1972, in : Lecture Notes in Math., vol. 336, Springer, 1973, pp. 148–152.

[3] Y. Katznelson, Sequences of integers dense in the Bohr group, Proc. Royal Inst. Tech. Stockholm (1973) 79–86.

[4] L. Thomas Ramsey, Bohr cluster points of Sidon sets, Colloq. Math. 68 (1995) 285–290.

[5] L. Thomas Ramsey, Comparisons of Sidon and I_0 sets, Colloq. Math. 70 (1996) 103–132.