Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 5–10
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres

Dégénérescence des classes d'Eisenstein des familles modulaires de Hilbert–Blumenthal ☆

David Blottière

Institut für Mathematik, Universität Paderborn, Warburger Str. 100, 33098 Paderborn, Allemagne

Reçu le 12 février 2007 ; accepté le 3 avril 2007

Disponible sur Internet le 15 juin 2007

Présenté par Gérard Laumon

Résumé

On démontre, en s'appuyant sur le résultat principal d'une Note précédente l'auteur, que les classes d'Eisenstein (définies dans la Partie 4) des familles de Hilbert–Blumenthal dégénèrent, en la pointe ∞ de la compactification de Baily–Borel de la base, en une valeur spéciale de fonction L du corps de nombres totalement réel sous-jacent. On en déduit une preuve alternative du théorème du Klingen-Siegel et un résultat de non annulation pour certaines de ces classes. ***Pour citer cet article : D. Blottière, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***
© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Degeneration of Eisenstein classes of Hilbert–Blumenthal modular families. We prove, using the main result of a previous Note by the author, that the Eisenstein classes (defined there in Section 4) of Hilbert–Blumenthal families degenerate, at the ∞ cusp of the Baily–Borel compactification of the base, to a special value of an L-function of the underlying totally real number field. As a corollary we get both an alternative proof of the Klingen–Siegel theorem and a non-vanishing result for some of these classes. ***To cite this article: D. Blottière, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***
© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

In this Note, we consider Eisenstein classes of a Hilbert–Blumenthal Abelian scheme $p : A \to S$ (see Section 2 for the precise definition of the geometric setting). Let K be the underlying totally real number field and $d := [K : \mathbb{Q}]$.

These classes are elements of $\mathrm{Ext}^{2d-1}_{MHM(S)}(\mathbb{Q}(0), (\mathrm{Sym}^l(R^1 p_*\mathbb{Q})^\vee)(d))$, for some integer l, where $MHM(S)$ is the category of algebraic mixed Hodge modules over S (cf. [9]). Applying the natural forgetful functor, we get classes in $H^{2d-1}_{\mathrm{Betti}}(S(\mathbb{C}), \overline{(\mathrm{Sym}^l(R^1 p_*\mathbb{Q})^\vee)(d)})$, where $\overline{(\mathrm{Sym}^l(R^1 p_*\mathbb{Q})^\vee)(d)}$ is the underlying local system to the $\mathbb{Q}$-variation of pure Hodge structures $(\mathrm{Sym}^l(R^1 p_*\mathbb{Q})^\vee)(d)$. Using the theorem [2, Thm 3.2] we are able to compute these topological classes, at least for $l > 2d$ (see Proposition 3.1).

☆ Résumé d'un texte qui sera conservé cinq ans dans les Archives de l'Académie et dont une copie peut être obtenue sur demande.
Adresse e-mail : blottier@math.uni-paderborn.de.

1631-073X/$ – see front matter © 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2007.04.003

Let $j : S \hookrightarrow S^*$ be the immersion of S in its Baily–Borel compactification. The variety S^* is obtained by adding to S a finite number of points which are called cusps. We consider one of them, the ∞ cusp, and denote by $i : \{\infty\} \hookrightarrow S^*$ the natural closed immersion. Using the theorem of Burgos–Wildeshaus [3, Thm 2.9], we compute the target of the residu morphism (see Section 4 for the definition)

$$\mathrm{Res}^l_\infty : \mathrm{Ext}^{2d-1}_{MHM(S)}\big(\mathbb{Q}(0), \big(\mathrm{Sym}^l\big(R^1 p_* \mathbb{Q}\big)^\vee\big)(d)\big) \to \mathrm{Hom}_{SHM}\big(\mathbb{Q}(0), H^{2g-1}(i_\infty)^* j_*\big(\mathrm{Sym}^l \mathcal{H}\big)(g)\big),$$

where SHM is the category of $\mathbb{Q}$-mixed Hodge structures. This target is canonically isomorphic to $\mathbb{Q}$ if g divides l and is 0 otherwise. Then we compute the images of Eisenstein classes under Res^l_∞, using the explicit description of underlying topological classes obtained via the main result of [2], to get an expression in which appears a special value of an L-function of K. From this result we deduce a special case of the Klingen–Siegel theorem and a non-vanishing result for some Eisenstein classes (see Theorem 4.1).

1. Notations et convention

Pour X un schéma de type fini, séparé sur $\mathbb{C}$, on note $MHM(X)$ la catégorie des $\mathbb{Q}$-modules de Hodge mixtes algébriques sur X (cf. [9]) et $D^b_c(X)$ la sous catégorie pleine de la catégorie dérivée bornée des faisceaux de $\mathbb{Q}$-vectoriels sur $X(\mathbb{C})$, équipé de la topologie transcendante, dont les objets sont les complexes à cohomologie algébriquement constructible. Par construction de $MHM(X)$, on dispose d'un foncteur $\mathrm{For} = \mathit{real} \circ \mathit{rat} : D^b MHM(X) \to D^b_c(X)$, où *rat* est le foncteur défini par Saito et *real* est le foncteur de Beilinson.

On suppose désormais que X est lisse. On dispose alors d'un foncteur exact et pleinement fidèle de la catégorie des $\mathbb{Q}$-variations de structures de Hodge admissibles au sens de [4], notée $VSHM(X)$, vers $MHM(X)$ au moyen duquel on identifie $VSHM(X)$ à une sous catégorie pleine de $MHM(X)$.

Pour $\mathbb{V} \in Ob(VSHM(X))$, on note $\overline{\mathbb{V}}$ le système local sous-jacent et $\mathrm{For}(V)$ coïncide avec $\overline{\mathbb{V}}$ à un décalage près. Dans cette Note, *on ne tient pas compte de ce décalage*, i.e. on considère que $\mathrm{For}(V)$ est égal à $\overline{\mathbb{V}}$.

Soient K un corps de nombres totalement réel, $g := [K : \mathbb{Q}]$, $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K, $\mathcal{D}_K$ la différente de K, Tr_K la trace de K, N_K la norme de K et d_K le discriminant de K. On fixe une énumération des $\mathbb{Q}$-plongements de K $(\sigma_k)_{1 \leqslant k \leqslant g}$ et pour $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, on note $\iota_\mathbb{K}$ l'isomorphisme

$$K \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^g, \quad a \otimes x \mapsto \big(\sigma_k(a)\, x\big)_{1 \leqslant k \leqslant g}.$$

On note $\mathbb{A}_f$ les adèles finies de $\mathbb{Q}$ et pour tout idéal fractionnaire $\mathfrak{a} \subseteq K$, on pose $\hat{\mathfrak{a}} := \prod_{v \text{ finie}} \mathfrak{a}_v$, où $\mathfrak{a}_v$ désigne l'adhérence de $\mathfrak{a}$ dans K_v.

2. Données géométriques

On définit un schéma abélien à l'aide du formalisme de Pink (cf. [8]). Soit G le $\mathbb{Q}$-schéma en groupes réductif G, sous schéma fermé de $\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_{2,K}$ défini par le diagramme cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_{2,K} \arrow[d, "\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}(\det)"] \\ \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \arrow[r, hook, "\mathrm{can}"'] & \mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{m,K} \end{tikzcd} .$$

On identifie $\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_{2,K}(\mathbb{R})$ à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^g$ au moyen de $\iota_\mathbb{R}$ et on fait de $\mathfrak{X} := (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^g$ un $G(\mathbb{R})$-espace homogène en faisant agir le groupe $G(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^g$ à gauche sur $\mathfrak{X}$ via les homographies. On considère alors le triplet $(G, \mathfrak{X}, h)$, donnée de Shimura pure (cf. [8, Def 2.1]), où $h : \mathfrak{X} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}, G_\mathbb{C})$ est le morphisme défini par

$$\tau \mapsto \left[(z_1, z_2) \mapsto \frac{\mathrm{i}}{2\,\mathrm{Im}(\tau_k)} \begin{pmatrix} \overline{\tau}_k z_1 - \tau_k z_2 & -|\tau_k|^2 (z_1 - z_2) \\ z_1 - z_2 & -\tau_k z_1 + \overline{\tau}_k z_2 \end{pmatrix}_{1 \leqslant k \leqslant g} \in G(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{GL}_{2,K}(\mathbb{C}) \underset{\iota_\mathbb{C}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})^g \right].$$

Le groupe G agit sur $V := \mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_{a,K} \oplus \mathbb{G}_{a,K})$ par restriction de l'action $\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}}(\mathrm{Std})$ de $\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_{2,L}$ sur V. On vérifie que le type de $\mathrm{Lie}(V)$, en tant que représentation de G, est $\{(-1, 0), (0, -1)\}$. Ainsi l'extension unipotente de $(G, \mathfrak{X}, h)$ par V, notée $(V \rtimes G, \mathfrak{X}', h')$, est bien définie (cf. [8, p. 36–37]).

On fixe un entier $N \geqslant 3$ et on définit H_N, sous groupe compact ouvert net de $G(\mathbb{A}_f)$, par

$$H_N := \left\{ M \in \prod_{v \text{ finie}} G(\mathcal{O}_{K,v}) \colon\ M \equiv I_2 \bmod N\widehat{\mathcal{O}_K} \right\}$$

et H'_N, sous groupe compact ouvert net de $V \rtimes G(\mathbb{A}_f)$, par $H'_N := (\widehat{\mathcal{D}_K^{-1}} \oplus \widehat{\mathcal{O}_K}) \rtimes H_N$.

Ces données définissent deux variétés algébriques complexes lisses $M^{H_N}(G, \mathfrak{X})$ et $M^{H'_N}(V \rtimes G, \mathfrak{X}')$ et l'on dispose d'un morphisme canonique $\pi : M^{H'_N}(V \rtimes G, \mathfrak{X}') \to M^{H_N}(G, \mathfrak{X})$ qui est le morphisme structural d'un schéma abélien (cf. [8, 3.22, Prop 9.24]).

Soient $\mathfrak{H}$ le demi-plan de Poincaré supérieur et $\Lambda_N := \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)\colon\ M = I_2 \bmod N\mathcal{O}_K\}$. L'action de $G(\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{X}$ induit une action propre et discontinue du groupe Λ_N sur $\mathfrak{H}^g$. La variété analytique complexe $\Lambda_N \backslash \mathfrak{H}^g$ est la variété analytique complexe associée à une variété algébrique complexe lisse canonique notée S. De plus, l'inclusion canonique $\mathfrak{H}^g \hookrightarrow \mathfrak{X}$ induit par passage au quotient une immersion ouverte $\Lambda_N \backslash \mathfrak{H}^g \hookrightarrow M^{H_N}(G, \mathfrak{X})^{an}$ qui est le morphisme analytique associé à une unique immersion ouverte algébrique $S \hookrightarrow M^{H_N}(G, \mathfrak{X})$. Soit $\pi_{|S} : A \to S$ la restriction de π au dessus de S.

Le morphisme $(\pi_{|S})^{an} : A^{an} \to S^{an}$ est le morphisme $p : \Lambda'_N \backslash (\mathbb{C}^g \times \mathfrak{H}^g) \to \Lambda_N \backslash \mathfrak{H}^g$ induit par la projection canonique $\mathbb{C}^g \times \mathfrak{H}^g \to \mathfrak{H}^g$, où $\Lambda'_N := (\mathcal{D}_K^{-1} \oplus \mathcal{O}_K) \rtimes \Lambda_N$ agit sur $\mathbb{C}^g \times \mathfrak{H}^g$ par l'action qui à

$$\left(\left((a,b), \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right), (z,\tau) \right) \in \Lambda'_N \times \left(\mathbb{C}^g \times \mathfrak{H}^g \right)$$

fait correspondre :

$$\left(\frac{z_k}{\sigma_k(\gamma)\tau_k + \sigma_k(\delta)} + \sigma_k(a) - \sigma_k(b) \left(\frac{\sigma_k(\alpha)\tau_k + \sigma_k(\beta)}{\sigma_k(\gamma)\tau_k + \sigma_k(\delta)} \right), \frac{\sigma_k(\alpha)\tau_k + \sigma_k(\beta)}{\sigma_k(\gamma)\tau_k + \sigma_k(\delta)} \right)_{1 \leqslant k \leqslant g} \in (\mathbb{C} \times \mathfrak{H})^g.$$

Le système local $(R^1 p_* \mathbb{Z})^\vee$ sur $\Lambda_N \backslash \mathfrak{H}^g$, vu comme représentation de Λ_N, coïncide avec la représentation standard de Λ_N sur $\Gamma := \mathcal{D}_K^{-1} \oplus \mathcal{O}_K$ et le morphisme $\Gamma \wedge \Gamma \to 2\pi \mathrm{i}\mathbb{Z}$, $\quad (c,d) \wedge (c',d') \mapsto 2\pi \mathrm{i}\, \mathrm{Tr}_K(cd' - c'd)$ qui est Λ_N-équivariant définit une polarisation principale du schéma abélien $\pi_{|S} : A \to S$ que l'on note ω.

Enfin, on fixe $a \in N^{-1}\mathcal{D}_K^{-1}$, $b \in N^{-1}\mathcal{O}_K$ et on note $x_{a,b} : S \to A$ le point de N-torsion de $\pi_{|S} : A \to S$ dont le morphisme analytique associé est $\Lambda_N \backslash \mathfrak{H}^g \to \Lambda'_N \backslash (\mathbb{C}^g \times \mathfrak{H}^g)$, $[\tau] \mapsto [((a_k + b_k \tau_k)_{1 \leqslant k \leqslant g}, \tau)]$.

3. Explicitation de classes d'Eisenstein au niveau topologique

On fixe $l > 2g$ et on considère la classe d'Eisenstein

$$\mathcal{E}is^l_{x_{a,b}} \in \mathrm{Ext}^{2g-1}_{MHM(S)}\big(\mathbb{Q}(0), \big(\mathrm{Sym}^l \mathcal{H}\big)(g)\big)$$

(cf. [2, Partie 4]), où $\mathcal{H}$ est la variation de $\mathbb{Q}$-structures de Hodge pures $(R^1(\pi_{|S})_* \mathbb{Q})^\vee$ dont le sytème local sous-jacent $\overline{\mathcal{H}}$, vu comme représentation de Λ_N, coïncide avec la représentation standard de Λ_N sur $\Gamma_{\mathbb{Q}}$. Le foncteur For induit le morphisme suivant, noté abusivement également For

$$\mathrm{For} : \mathrm{Ext}^{2g-1}_{MHM(S)}\big(\mathbb{Q}(0), \big(\mathrm{Sym}^l \mathcal{H}\big)(g)\big) \to H^{2d-1}_{\mathrm{Betti}}\big(\Lambda_N \backslash \mathfrak{H}^g, \overline{\big(\mathrm{Sym}^l \mathcal{H}\big)(d)}\big) \subseteq H^{2d-1}_{\mathrm{Betti}}\big(\Lambda_N \backslash \mathfrak{H}^g, \big(\overline{\big(\mathrm{Sym}^l \mathcal{H}\big)(d)}\big)_{\mathbb{C}}\big).$$

On applique le corollaire [2, Cor 3.2] pour déterminer $\mathrm{For}(\mathcal{E}is^l_{x_{a,b}})$ (cf. [1, 9.5] pour le détail du calcul).

Proposition 3.1. *La* $(2d-1)$*-forme différentielle sur* $\mathfrak{H}^g$ *à valeurs dans* $\mathrm{Sym}^l \Gamma_{\mathbb{C}}$

$$(2\pi \mathrm{i})^g (2g + l - 1)!(2g + l) \sum_{(c,d) \in \Gamma \backslash \{0\}} \sum_{k=1}^{g} \frac{\exp(2\pi \mathrm{i}\, \mathrm{Tr}_K(ac - bd))}{\rho(c,d,\tau)^{2g+l}} f_k(c,d,\tau) \nu_k \otimes h(c,d,\tau)^l,$$

où pour tout $(c,d) \in \Gamma$, $\tau \in \mathfrak{H}^g$, $k \in \{1, \ldots, g\}$, *on note* $t_k := (\tau_k - \overline{\tau_k})^{-1}$ *et*

$$\rho(c,d,\tau) := -2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{g} t_j\left|\sigma_j(c)+\sigma_j(d)\tau_j\right|^2,$$

$$f_k(c,d,\tau) := t_k^2\left(\sigma_k(c)+\sigma_k(d)\overline{\tau_k}\right)^2\prod_{j\neq k} t_j^3\left|\sigma_j(c)+\sigma_j(d)\tau_j\right|^2,$$

$$\nu_k := \mathrm{d}\tau_1\wedge\mathrm{d}\overline{\tau_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\tau_k\wedge\widehat{\mathrm{d}\overline{\tau_k}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\tau_g\wedge\mathrm{d}\overline{\tau_g}\in\Omega^{2g-1}\left(\mathfrak{H}^g,\mathbb{C}\right),$$

$$h(c,d,\tau) := \left(-\left(t_k\overline{\tau_k}\left(\sigma_k(c)+\sigma_k(d)\tau_k\right)\right)_{1\leqslant k\leqslant g},\left(t_k\left(\sigma_k(c)+\sigma_k(d)\tau_k\right)_{1\leqslant k\leqslant g}\right)\right)\in\mathbb{C}^g\oplus\mathbb{C}^g\underset{(\iota_{\mathbb{C}},\iota_{\mathbb{C}})}{\overset{\sim}{\leftarrow}}\Gamma_{\mathbb{C}},$$

induit une classe de cohomologie dans $H^{2d-1}_{\mathrm{Betti}}(\Lambda_N\backslash\mathfrak{H}^g,\overline{((\mathrm{Sym}^l\mathcal{H})(d))_{\mathbb{C}}})$ *qui coïncide avec* $\mathrm{For}(\mathcal{E}is^l_{x_{a,b}})$.

4. Dégénérescence des classes d'Eisenstein

La compactification de Baily–Borel de S, notée S^*, s'obtient en ajoutant un nombre fini de points, appelés pointes. L'une d'elle est remarquable : la pointe ∞. On note $j: S\hookrightarrow S^*$ l'immersion ouverte de S dans S^* et $i_\infty:\{\infty\}\hookrightarrow S^*$ l'immersion fermée de la pointe ∞ dans S^*. On définit le morphisme Res^l_∞ par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^{2g-1}_{MHM(S)}(\mathbb{Q}(0),(\mathrm{Sym}^l\mathcal{H})(g)) \arrow[r, equal] \arrow[ddd, "\mathrm{Res}^l_\infty"'] & \mathrm{Hom}_{D^bMHM(S)}(\mathbb{Q}(0),(\mathrm{Sym}^l\mathcal{H})(g)[2g-1]) \arrow[d, equal, "\text{(adjonction)}"] \\
& \mathrm{Hom}_{D^bMHM(S^*)}(\mathbb{Q}(0),j_*(\mathrm{Sym}^l\mathcal{H})(g)[2g-1]) \arrow[d, "1\to(i_\infty)_*(i_\infty)^*"] \\
& \mathrm{Hom}_{D^bMHM(S^*)}(\mathbb{Q}(0),(i_\infty)_*(i_\infty)^*j_*(\mathrm{Sym}^l\mathcal{H})(g)[2g-1]) \arrow[d, equal, "\text{(adjonction)}"] \\
\mathrm{Hom}_{SHM}(\mathbb{Q}(0),H^{2g-1}(i_\infty)^*j_*(\mathrm{Sym}^l\mathcal{H})(g)) & \mathrm{Hom}_{D^bSHM}(\mathbb{Q}(0),(i_\infty)^*j_*(\mathrm{Sym}^l\mathcal{H})(g)[2g-1]) \arrow[l, "H^0"]
\end{tikzcd}.$$

On identifie le but de Res^l_∞ à l'aide du théorème de Burgos–Wildeshaus [3, Thm 2.9].

Si g divise l, la $\mathbb{Q}$-structure de Hodge $H^{2g-1}(i_\infty)^*j_*(\mathrm{Sym}^l\mathcal{H})(g)$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Q}(0)$ et

$$\mathrm{Res}^l_\infty\left(\mathcal{E}is^l_{x_{a,b}}\right)\in\mathrm{Hom}_{SHM}\left(\mathbb{Q}(0),\mathbb{Q}(0)\right)=\mathbb{Q}.$$

Dans le cas contraire, $H^{2g-1}(i_\infty)^*j_*(\mathrm{Sym}^l\mathcal{H})(g)=0$ et donc $\mathrm{Res}^l_\infty(\mathcal{E}is^l_{x_{a,b}})=0$.

Pour tout $s\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s)>1$, on introduit la série convergente

$$L\left(\mathcal{D}_K^{-1},N,b,s\right):=\sum_{c\in(\mathcal{D}_K^{-1}\backslash\{0\})/\mathcal{O}^\times_{K,N}}\frac{\exp(2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Tr}_K(bc))}{\mathrm{N}_K(c)^s},$$

où $\mathcal{O}^\times_{L,N}$ est le sous-groupe des unités de $\mathcal{O}_L$ congrues à 1 modulo $N\mathcal{O}_L$.

Théorème 4.1.

(a) *Pour tout* $\lambda\in\mathbb{N}^{\geqslant 3}$, $a\in N^{-1}\mathcal{D}_K^{-1}$ *et* $b\in N^{-1}\mathcal{O}_K\setminus\{0\}$,

$$\mathrm{Res}^{\lambda g}_\infty\left(\mathcal{E}is^{\lambda g}_{x_{a,b}}\right)=\frac{(\lambda+2)((\lambda+1)!)^g g^2 N^g\sqrt{d_K}}{(2\pi\mathrm{i})^{(\lambda+2)g}}L\left(\mathcal{D}_K^{-1},N,b,\lambda+2\right).$$

(b) *Pour tout* $\lambda\in\mathbb{N}^{\geqslant 5}$ *et* $b\in N^{-1}\mathcal{O}_K\setminus\{0\}$,

$$(2\pi\mathrm{i})^{-\lambda g}\sqrt{d_K}\,L\left(\mathcal{D}_K^{-1},N,b,\lambda\right)\in\mathbb{Q}.$$

(c) *Si* $g\geqslant 2$, *pour tout* $\lambda\in\mathbb{N}^{\geqslant 4}$ *pair,* $a\in N^{-1}\mathcal{D}_K^{-1}$, *et* $b\in N^{-1}\mathcal{O}_K\setminus\{0\}$ *tel que les idéaux entiers* $Nb\mathcal{O}_K$ *et* $N\mathcal{O}_K$ *sont copremiers, on a*

$$\mathcal{E}is^{\lambda g}_{x_{a,b}}\neq 0.$$

Le résultat b), qui se déduit de a) et de $\mathrm{Res}_\infty^{\lambda g}(\mathcal{E}is_{x_{a,b}}^{\lambda g}) \in \mathbb{Q}$, est un cas particulier du théorème de Klingen–Siegel. Si notre preuve présente une certaine analogie avec la démonstration originale (cf. [6]), elle met toutefois en lumière un lien géométrique nouveau, via le polylogarithme, avec la famille modulaire de Hilbert–Blumenthal. D'autre part, Sczech (cf. [10]) et Nori (cf. [7]) ont tous deux redémontré le théorème de Klingen–Siegel en utilisant une classe de cohomologie rationnelle. Notre approche présente donc également une certaine analogie avec les leurs. Quant au résultat c), il résulte de a) et de l'analyse d'une équation fonctionnelle due à Siegel, liant $L(\mathcal{D}_K^{-1}, N, b, \cdot)$ à une fonction zêta partielle de K (voir [11, (10) p. 112]). Pour la démonstration de la partie a) de ce théorème, on renvoie le lecteur à [1, preuve du Thm 9.5.5 p. 131–134]. Avant de donner quelques éléments de celle-ci, on mentionne que Kings, dans la prépublication [5], a donné une autre preuve des résultats du Théorème 4.1, en s'appuyant également sur le lien géométrique avec la famille modulaire de Hilbert–Blumenthal.

On reprend la construction du morpshime $\mathrm{Res}_\infty^{\lambda g}$, en se plaçant cette fois au niveau topologique, pour définir un morphisme

$$\overline{\mathrm{Res}_\infty^{\lambda g}} : H_{\mathrm{Betti}}^{2d-1}\big(\Lambda_N\backslash\mathfrak{H}^g, \overline{\big(\mathrm{Sym}^{\lambda g}\,\mathcal{H}\big)(d)}\big) \to \mathbb{Q}.$$

On en déduit un morphisme

$$\big(\overline{\mathrm{Res}_\infty^{\lambda g}}\big)_{\mathbb{C}} : H_{\mathrm{Betti}}^{2d-1}\big(\Lambda_N\backslash\mathfrak{H}^g, \big(\overline{\big(\mathrm{Sym}^{\lambda g}\,\mathcal{H}\big)(d)}\big)_{\mathbb{C}}\big) \to \mathbb{C}$$

par extension des scalaires de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{C}$ qui s'insère dans le diagramme commutatif, noté $\mathcal{D}$, suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}_{MHM(S)}^{2g-1}(\mathbb{Q}(0), (\mathrm{Sym}^{\lambda g}\,\mathcal{H})(g)) \arrow[r, "\mathrm{For}"] \arrow[d, "\mathrm{Res}_\infty^{\lambda g}"'] & H_{\mathrm{Betti}}^{2d-1}(\Lambda_N\backslash\mathfrak{H}^g, \overline{(\mathrm{Sym}^{\lambda g}\,\mathcal{H})(d)}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\overline{\mathrm{Res}_\infty^{\lambda g}}"] & H_{\mathrm{Betti}}^{2d-1}(\Lambda_N\backslash\mathfrak{H}^g, (\overline{(\mathrm{Sym}^{\lambda g}\,\mathcal{H})(d)})_{\mathbb{C}}) \arrow[d, "(\overline{\mathrm{Res}_\infty^{\lambda g}})_{\mathbb{C}}"] \\
\mathbb{Q} \arrow[r, equal] & \mathbb{Q} \arrow[r, hook] & \mathbb{C}
\end{tikzcd},$$

où la commutativité du carré de gauche résulte de la compatibilité des formalismes des 6-foncteurs sur $D^bMHM(\cdot)$ et sur $D_c^b(\cdot)$ via le foncteur For. On explicite à présent $(\overline{\mathrm{Res}_\infty^{\lambda g}})_{\mathbb{C}}$. Soit $\Lambda_{N,\infty}$ le stabilisateur de la pointe ∞ dans Λ_N. On vérifie que

$$\Lambda_{N,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} : \ \varepsilon \in \mathcal{O}_{L,N}^\times \text{ et } a \in N\mathcal{O}_L \right\}.$$

Pour tout $r \in \mathbb{R}^{>0}$, $\Lambda_{N,\infty}$ agit sur V_r et D_r définis par

$$V_r := \big\{\tau \in \mathfrak{H}^g\colon \ \mathrm{Im}(\tau_1)\,\mathrm{Im}(\tau_2)\cdots\mathrm{Im}(\tau_g) > r\big\} \quad \text{et} \quad D_r := \big\{\tau \in \mathfrak{H}^g\colon \ \mathrm{Im}(\tau_1)\,\mathrm{Im}(\tau_2)\cdots\mathrm{Im}(\tau_g) = r\big\}.$$

Le morphisme canonique $\Lambda_{N,\infty}\backslash V_r \to \Lambda_N\backslash\mathfrak{H}^g$ est une immersion ouverte et $\Lambda_{N,\infty}\backslash V_r \cup \{\infty\}$ est un voisinage de ∞ pour la topologie de Satake de $(S^*)^{an}$ dont $\Lambda_{N,\infty}\backslash D_r$ est le bord.

L'ensemble

$$\mathcal{B} := \big\{X_k = (e_k, 0)\colon \ 1 \leqslant k \leqslant g\big\} \cup \big\{Y_k = (0, e_k)\colon \ 1 \leqslant k \leqslant g\big\},$$

où $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant g}$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^g$, est une base de $\mathbb{C}^g \oplus \mathbb{C}^g$ qui induit une base $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Sym}^{\lambda g}(\mathbb{C}^g \oplus \mathbb{C}^g)$ dont $Y_1^\lambda Y_2^\lambda \cdots Y_g^\lambda$ est élément. On vérifie que la composition

$$\mathrm{Sym}^{\lambda g}(\Gamma_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\mathrm{Sym}^{\lambda g}(\iota_{\mathbb{C}},\iota_{\mathbb{C}})} \mathrm{Sym}^{\lambda g}(\mathbb{C}^g \oplus \mathbb{C}^g) \xrightarrow[\text{rel. à } \mathcal{C}]{Y_1^\lambda Y_2^\lambda\cdots Y_g^\lambda-\text{coord.}} \mathbb{C}$$

est invariante sous l'action de $\Lambda_{N,\infty}$ et respecte les structures rationnelles. On en déduit un morphisme de systèmes locaux sur $\Lambda_{N,\infty}\backslash D_r$, $\mathrm{pr}_{\infty,r}^\lambda : (\mathrm{Sym}^{\lambda g}\,\mathcal{H}_{\mathbb{C}})_{|\Lambda_{N,\infty}\backslash D_r} \to \mathbb{C}$, pour $r \gg 0$.

L'application $(\overline{\mathrm{Res}_\infty^{\lambda g}})_{\mathbb{C}}$ est induite, pour $r \gg 0$, par

$$\Omega^{2g-1}\big(\Lambda_N\backslash\mathfrak{H}^g, \big(\overline{\big(\mathrm{Sym}^{\lambda g}\,\mathcal{H}\big)(d)}\big)_{\mathbb{C}}\big) \to \mathbb{C}, \qquad \eta \mapsto \int\limits_{\Lambda_{N,\infty}\backslash D_r} \big(\mathrm{pr}_{\infty,r}^\lambda\big)_*\big((2\pi\mathrm{i})^{-g}\eta_{|\Lambda_{N,\infty}\backslash D_r}\big).$$

On calcule alors $\mathrm{Res}_\infty^{\lambda g}(\mathcal{E}is_{x_{a,b}}^{\lambda g}) = (\overline{\mathrm{Res}_\infty^{\lambda g}})_{\mathbb{C}}(\mathrm{For}(\mathcal{E}is_{x_{a,b}}^{\lambda g}))$ (cf. commutativité de $\mathcal{D}$), en utilisant l'expression de $(\overline{\mathrm{Res}_\infty^{\lambda g}})_{\mathbb{C}}$ précédente et la Proposition 3.1, pour établir le résultat a).

Remerciements

La dégénérescence des classes d'Eisenstein des familles modulaires de Hilbert–Blumenthal en des valeurs spéciales de fonctions L du corps du nombres totalement réel sous-jacent avait été conjecturée par Jörg Wildeshaus. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour m'avoir fait part de cette intuition, ainsi que pour les entretiens qu'il a bien voulu m'accorder. Je suis également ravi de remercier Guido Kings pour les discussions que nous avons partagées, lors de mon séjour à Regensburg, sur les résultats de cette Note.

Références

[1] D. Blottière, Réalisation de Hodge du polylogarithme d'un schéma abélien et dégénérescence des classes d'Eisenstein des familles modulaires de Hilbert–Blumenthal, Thèse de doctorat, Université Paris 13, Villetaneuse, 2006.
[2] D. Blottière, Réalisation de Hodge du polylogarithme d'un schéma abélien, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (2007), doi:10.1016/j.crma.2007.04.007.
[3] J.I. Burgos, J. Wildeshaus, Hodge modules on Shimura varieties and their higher direct images in the Baily Borel compactification, Ann. Sci. École Norm. Sup. 37 (2004) 363–413.
[4] M. Kashiwara, A study of variation of mixed Hodge structure, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 22 (5) (1986) 991–1024.
[5] G. Kings, Degeneration of polylogarithms and special values of L-functions for totally real fields, arXiv math.NT/0510147, 32 p.
[6] H. Klingen, Über die Werte der Dedekindschen Zetafunktion, Math. Ann. 145 (1962) 265–272.
[7] M. Nori, Some Eisenstein classes for the integral unimodular group, Proc. of the IMC Zürich (1994) 690–696.
[8] R. Pink, Arithmetical compactification of mixed Shimura varieties, PhD Thesis, Bonn, 1989.
[9] M. Saito, Mixed Hodge modules, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 26 (2) (1990) 221–333.
[10] R. Sczech, Eisenstein group cocycles for GL_n and special values of L-functions, Invent. Math. 113 (1993) 581–616.
[11] C.L. Siegel, Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen, Nachr. Akad. Wiss. 3 (1970) 15–56.