Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 1–4
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres

Mesures de transcendance pour les points algébriques de fonctions modulaires de Siegel

Eric Villani

Institut de mathématiques de Jussieu, case 247, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 7 mars 2006 ; accepté le 8 novembre 2006

Disponible sur Internet le 11 décembre 2006

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

On donne une version effective d'un résultat de Cohen, Shiga et Wolfart, généralisant aux espaces de Siegel de degré quelconque le théorème classique de Schneider sur l'invariant modulaire $j(\tau)$. Étant donné un point τ de l'espace de Siegel paramétrant une variété abélienne principalement polarisée $\mathcal{A}$ définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on obtient une minoration de la distance de τ aux points algébriques β de l'espace de Siegel, en fonction des données géométriques du problème. Pour cela, on établit une mesure d'indépendance linéaire simultanée pour les périodes d'intégrales abéliennes en utilisant la méthode de Baker. ***Pour citer cet article : E. Villani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

Transcendence measures for algebraic points of Siegel modular functions. We give an effective version of a result of Cohen, Shiga and Wolfart, which is a generalisation to the case of Siegel spaces of arbitrary degree, of the classical theorem of Schneider on the modular invariant $j(\tau)$. Given a point τ of the Siegel space parameterizing a principally polarised Abelian variety $\mathcal{A}$ defined over $\overline{\mathbb{Q}}$, we obtain a lower bound for the distance between τ and algebraic points β of the Siegel space, in terms of the geometrical data of the problem. To achieve this, we establish a simultaneous measure of linear independence for periods of Abelian integrals, using Baker's method. ***To cite this article: E. Villani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

1. Présentation du problème

Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout entier $g > 0$, on note $\mathfrak{H}_g$ le demi-espace de Siegel de dimension g : c'est l'ensemble des matrices $g \times g$ à coefficients complexes, de partie imaginaire symétrique définie positive. Si $\tau \in \mathfrak{H}_g$, on désigne par $\mathcal{A}_\tau = \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g)$ la variété abélienne principalement polarisée attachée au point τ ; lorsqu'elle est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on note $h_F(\mathcal{A}_\tau)$ sa hauteur de Faltings (voir [1]) et $K_{\mathcal{A}_\tau}$ le corps de définition de $\mathcal{A}_\tau$ et de ses points de 4-torsion. Pour tout élément $\beta = (\beta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant g}$ de $\mathfrak{H}_g(\overline{\mathbb{Q}})$, on note $h(\beta)$ la hauteur logarithmique absolue du point $(1 : \beta_{1,1} : \ldots : \beta_{1,g} : \ldots : \beta_{g,1} : \ldots : \beta_{g,g})$ de $\mathbb{P}_{g^2}$. Si $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant g}$ est une matrice à coefficients

Adresse e-mail : villani@math.jussieu.fr (E. Villani).

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2006.11.012

complexes, on pose $\|\!|M|\!\| = \sup_{1\leqslant i,j\leqslant g} |m_{i,j}|$. Pour tout nombre réel $x > 0$, on pose enfin $\log^+(x) = \max\{1, \log(x)\}$, où log est la fonction logarithme népérien.

Théorème 1.1. *Soit g un entier > 0. Il existe un nombre réel $C_1(g)$ vérifiant la propriété suivante. Soient*

- *τ un élément Siegel-réduit de $\mathfrak{H}_g$, tel que la variété abélienne $\mathcal{A}_\tau$ soit définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$;*
- *K un corps de nombres contenant $K_{\mathcal{A}_\tau}$, et D son degré sur $\mathbb{Q}$;*
- *$\beta = [\beta_{i,j}]$ un élément de $\mathfrak{H}_g$, à coefficients dans K ;*
- *$\log B$ (resp. $h^+(\mathcal{A}_\tau)$) un majorant $\geqslant 1$ de $h(\beta)$ (resp. de $h_F(\mathcal{A}_\tau)$).*

Alors, si $\mathcal{A}_\tau$ n'est pas de type CM, on a la minoration :

$$\|\!|\tau - \beta|\!\| \geqslant \exp\bigl(-C_1(g) \log B \bigl(Dh^+(\mathcal{A}_\tau)\bigr)^{6g^2}\bigr).$$

La constante $C_1(g)$ (de même que la constante $C_2(g)$ du résultat suivant) ne dépend que de g et est, en théorie tout au moins (voir [1]), effectivement calculable, mais nous ne l'avons pas calculée. À ceci près, ce théorème donne une version effective du résultat[1] de Cohen–Shiga–Wolfart [3,12] en vertu duquel une variété abélienne $\mathcal{A}_\tau$ définie sur un corps de nombres est de type CM si et seulement si les coefficients de τ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$. On rappelle qu'une variété abélienne $\mathcal{A}$ de dimension g est dite « de type CM » si $\operatorname{End}\mathcal{A} \otimes \mathbb{Q}$ admet un sous-corps de type CM de degré $2g$ sur $\mathbb{Q}$.

La démonstration du Théorème 1.1 repose sur la méthode de Baker, appliquée à un hyperplan de l'algèbre de Lie de $(\mathcal{A}_\tau)^{g^2}$. Au prix d'un renforcement de l'hypothèse, on peut améliorer de façon notoire la dépendance en D et $h^+(\mathcal{A}_\tau)$ de la conclusion du Théorème 1.1, en réalisant des minorations simultanées, c'est-à-dire en appliquant la méthode de Baker à un sous-espace vectoriel de codimension quelconque. On obtient ainsi :

Théorème 1.2. *Soit g un entier > 0. Il existe un nombre réel $C_2(g)$ vérifiant la propriété suivante. Soient*

- *τ un élément Siegel-réduit de $\mathfrak{H}_g$, tel que la variété abélienne $\mathcal{A}_\tau$ soit définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$;*
- *K un corps de nombres contenant $K_{\mathcal{A}_\tau}$ et D son degré sur $\mathbb{Q}$;*
- *$\beta = [\beta_{i,j}]$ un élément de $\mathfrak{H}_g$, à coefficients dans K ;*
- *$\log B$ (resp. $h^+(\mathcal{A}_\tau)$) un majorant $\geqslant 1$ de de $h(\beta)$ (resp. de $h_F(\mathcal{A}_\tau)$).*

Alors, si $\operatorname{End}(\mathcal{A}_\tau) = \mathbb{Z}$, *alors on a la minoration* :

$$\|\!|\tau - \beta|\!\| \geqslant \exp\bigl(-C_2(g) \log B \bigl(Dh^+(\mathcal{A}_\tau)\bigr)^{5}\bigr).$$

Ces résultats découlent d'un énoncé plus général d'indépendance linéaire de périodes d'intégrales abéliennes qui fait l'objet du paragraphe 2.

2. Énoncé du résultat principal

Soit τ un élément de l'espace de Siegel paramétrant une variété abélienne principalement polarisée $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\tau$ sur $\mathbb{C}$. La relation $\mathcal{A}/\mathbb{C} = \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g \oplus \tau\mathbb{Z}^g)$ permet d'identifier l'espace tangent à l'origine $T_0\mathcal{A}$ à $\mathbb{C}^g$, et de définir un plongement Ψ de $\mathcal{A}$ dans un espace projectif $\mathbb{P}_\nu$ à partir de l'application

$$\widetilde{\Psi} : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}^{\nu+1};\, z \mapsto \bigl(\theta_{a,b}(\tau, 2z)\bigr)_{(a,b)\in(\mathbb{Z}^g/2\mathbb{Z}^g)^2}$$

où les $\theta_{a,b}$ sont les fonctions thêta à caractéristiques demi-entières classiques et $\nu = 2^{2g}$. On appellera « base de Siegel » la base canonique $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_g})$ de $\mathbb{C}^g$.

[1] Dans le cas particulier $g = 1$, il donne une version effective du théorème de Schneider ayant une meilleure dépendance en $\log B$ que le résultat de Faisant–Philibert [6].

La matrice jacobienne de $\widetilde{\Psi}$ en 0 est de rang g, on peut donc en extraire une matrice $g \times g$ inversible M, et on pose $\Omega_2 = \Omega_1^{-1}\tau$ où $\Omega_1 = \theta_{0,0}(\tau, 0)^{-1}M$. Les vecteurs colonnes de Ω_1^{-1} représentent alors une base $(\frac{\partial}{\partial \zeta_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \zeta_g})$ de $T_0\mathcal{A}$ qu'on appellera « base de Shimura » de l'espace tangent, où le réseau des périodes s'écrit $\Omega_1\mathbb{Z}^g \oplus \Omega_2\mathbb{Z}^g$ (cf. [13] th. 30.3). De plus, si $\mathcal{A}$ est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, la $K_{\mathcal{A}}$-algèbre engendrée par les fonctions $\frac{\theta_{a,b}}{\theta_{0,0}}$ est stable sous les dérivations de Shimura ([4] Prop. 4.11).

Pour tout élément $\vec{z}$ de $T_0\mathcal{A}$, on note $\|\vec{z}\|_R$ la norme de Riemann de $\vec{z}$ attachée à la polarisation de $\mathcal{A}$. Si on représente $\vec{z}$ par le vecteur colonne z de ses coordonnées dans la base de Siegel de $T_0\mathcal{A}$, on a : $\|\vec{z}\|_R = ({}^t\overline{(z)}(\Im m\tau)^{-1}z)^{1/2}$.

Théorème 2.1. *Soient $t, n, g_1, \ldots, g_n$ des entiers > 0. On suppose que $g = \sum_{i=1}^n g_i$ est $> t$. Il existe des nombres réels $C_3(g)$ et $C_4(g)$ vérifiant la propriété suivante. Soient* :

– *K un corps de nombres et D son degré sur $\mathbb{Q}$* ;
– *pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathcal{A}_i$ une variété abélienne principalement polarisée de dimension g_i, définie sur K* ; *$\vec{\omega}_i$ un élément du réseau des périodes de $\mathcal{A}_i/\mathbb{C}$, dont on note $(\omega_{i,k})_{1\leqslant k\leqslant g_i}$ les coordonnées dans une base de Shimura $\mathcal{B}_i$ de $T_0\mathcal{A}_i$* ;
– *$\beta_{k,j}$ $(k \in \{1, \ldots, t\},\ j \in \{1, \ldots, g\})$ des éléments de K, tels que la matrice $[\beta_{k,j}]$ soit de rang t* ;
– *B un nombre réel tel que $\log B$ soit un majorant $\geqslant 1$ de $\max_{1\leqslant k\leqslant t}\{h(\beta_{k,1}; \ldots; \beta_{k,g})\}$.*

Dans ces conditions, considérons la variété abélienne $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$, notons $\mathcal{W}$ le sous-espace vectoriel de $T_0\mathcal{A}$ défini dans la base $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n)$ par les équations $\sum_{j=1}^g \beta_{k,j}z_j = 0,\ k = 1, \ldots, t$ et posons $(\omega_j)_{1\leqslant j\leqslant g} = ((\omega_{i,k})_{1\leqslant k\leqslant g_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$. Alors,

(i) *ou bien les t nombres $\Lambda_k = \sum_{j=1}^g \beta_{k,j}\omega_j$ $(1 \leqslant k \leqslant t)$ ne sont pas tous nuls et vérifient la minoration*

$$\log \max_{1\leqslant k\leqslant t} |\Lambda_k| \geqslant -C_3(g)\Big(D\log B + D \max_{1\leqslant i\leqslant n}\big\{h^+(\mathcal{A}_i)\big\} + \log^+ \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \|\vec{\omega}_i\|_R\Big) \\ \times \prod_{i=1}^n \Big(\Big(D \max_{1\leqslant i\leqslant n}\big\{h^+(\mathcal{A}_i)\big\} + \log^+ \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \|\vec{\omega}_i\|_R\Big)\|\vec{\omega}_i\|_R^2\Big)^{g_i/t};$$

(ii) *ou bien il existe une sous-variété abélienne $\tilde{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$, admettant une polarisation de degré majoré par*

$$C_4(g)\deg_\Psi \mathcal{A} \max_{\substack{\sum_{i=1}^n d_i = \dim(\mathcal{W}\cap T_0\tilde{\mathcal{A}})\\ 0\leqslant d_i\leqslant g_i}} \prod_{i=1}^n \Big(\Big(D \max_{1\leqslant i\leqslant n}\big\{h^+(\mathcal{A}_i)\big\} + \log^+ \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \|\vec{\omega}_i\|_R\Big)\|\vec{\omega}_i\|_R^2\Big)^{d_i},$$

dont l'espace tangent à l'origine contient le point $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_n)$, et qui vérifie $T_0\tilde{\mathcal{A}} + \mathcal{W} \neq T_0\mathcal{A}$.

3. Principe de la démonstration

Le Théorème 2.1 s'obtient en utilisant la méthode de Baker, suivant le schéma développé, dans la série des versions effectives du théorème de Wüstholz [15], par Philippon et Waldschmidt [11], Hirata-Kohno et David [9,5], et Gaudron [7]. Ce dernier travail fournit une dépendance optimale en $\log B$, grâce à un changement de variable (passage au logarithme) introduit par Chudnovsky ([2], p. 359 (1.12)).

Il reste à contrôler la dépendance en $h_F(\mathcal{A})$ lors de ce changement de variable. On fait pour cela appel à l'énoncé suivant (voir [14] Proposition 3.2.2) :

Proposition 3.1. *Soit g un entier $\geqslant 1$. Il existe un nombre réel $c(g)$ ne dépendant que de g et vérifiant la propriété suivante. Soit τ un élément de $\mathfrak{H}_g$ tel que la variété abélienne $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\tau$ soit définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Désignons par D le degré sur $\mathbb{Q}$ du corps $K = K_{\mathcal{A}_\tau}$, par $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers et soit $(\mathrm{d}\zeta_1, \ldots, \mathrm{d}\zeta_g)$ la base duale d'une base de Shimura de $T_0\mathcal{A}$.*

Il existe un entier $r \leqslant \mathrm{e}^{c(g)Dh_F(\mathcal{A})}$ non nul, et des fonctions K-rationnelles $X_1, \ldots, X_g$ sur $\mathcal{A}$ formant un système de paramètres pour $\mathcal{A}$ en 0, et telles que si on pose $\mathcal{T}_i = X_i \circ \exp_{\mathcal{A}}$,

– $r d\zeta_j \in \bigoplus_{k=1}^{g} \mathcal{O}_K[[\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_g]]\, \mathrm{d}\mathcal{T}_k$ *pour tout* $j = 1, \ldots, g$;
– $r\psi \circ [r] \in (\mathcal{O}_K[[\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_g]])^{\nu+1}$*, où* $[r]$ *désigne l'homothétie de rapport* r *sur* $T_0\mathcal{A}$*, et* $\psi = \frac{1}{\theta_{0,0}}\widetilde{\Psi} \circ \exp_{\mathcal{A}}$.

On démontre cette proposition en choisissant pour $\mathcal{T}_j$ les quotients par $\theta_{0,0}$ des fonctions thêta intervenues dans la définition de la base de Shimura. Dans ces conditions, le deuxième point découle d'une version multidimensionnelle du théorème d'Eisenstein inspirée de Grinspan ([8] Proposition 4.1), appliquée aux équations de définition de $\mathcal{A}$ ([10] Chapitre II, paragraphe 6). Les équations différentielles vérifiées par les fonctions thêta fournissent alors la conclusion du premier point.

Références

[1] J.B. Bost, Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz), Astérisque 237 (1996) 115–161.
[2] G. Chudnovsky, Contributions to the theory of transcendental numbers, Math. Surveys Monogr. 19 (1984).
[3] P.B. Cohen, Humbert surfaces and transcendence properties of automorphic functions, Rocky Mountain J. Math. 26 (1996) 987–1001.
[4] S. David, Fonctions thêta et points de torsions des variétés abéliennes, Compositio Math. 78 (1991) 121–160.
[5] S. David. N. Hirata-Kohno, Linear forms in elliptic logarithms, manuscript, 2002.
[6] A. Faisant, G. Philibert, Quelques résultats de transcendance liés à l'invariant modulaire j, J. Number Theory 25 (1987) 184–200.
[7] É. Gaudron, Mesures d'indépendance linéaires de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif, Invent. Math. 162 (2005) 137–188.
[8] P. Grinspan, Measures of simultaneous approximation for quasi-periods of Abelian varieties, J. Number Theory 94 (2002) 136–176.
[9] N. Hirata-Kohno, Approximations simultanées sur les groupes algébriques commutatifs, Compositio Math. 86 (1993) 9–96.
[10] D. Mumford, Tata Lectures on Theta. I, Progr. Math., vol. 28, Birkhäuser Boston, 1983.
[11] P. Philippon, M. Waldschmidt, Formes linéaires de logarithmes simultanées sur les groupes algébriques commutatifs, in : Séminaire de Théorie des Nombres Paris 1986–87, in : Progr. Math., vol. 75, 1988, pp. 313–347.
[12] H. Shiga, J. Wolfart, Complex multiplication and automorphic functions, J. Reine Angew. Math. 463 (1995) 1–25.
[13] G. Shimura, Abelian Varieties with Complex Multiplication and Modular Functions, Princeton Math. Ser., vol. 46, 1998.
[14] E. Villani, Mesures d'indépendance linéaire simultanées sur les périodes d'intégrales abéliennes, Thèse, Univ. Paris 6, Décembre 2005.
[15] G. Wüstholz, Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen, Ann. of Math.129 (1989) 501–517.