

Available online at www.sciencedirect.com



C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 633-636

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Approximations filaires pour les équations de Poisson et de Maxwell harmoniques

François Rogier, Jean-François Roussel, Dominique Volpert

ONERA-CERT, 2, avenue Édouard-Belin, BP 4025, 31055 Toulouse cedex 4, France Reçu le 21 juin 2005 ; accepté après révision le 12 octobre 2006 Disponible sur Internet le 7 novembre 2006 Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

On s'intéresse à l'approximation de l'équation de Poisson et des équations de Maxwell en régime harmonique autour d' un cylindre de rayon très petit. Si on souhaite résoudre numériquement l'équation par une méthode d'éléments finis on doit mailler le domaine extérieur au cylindre avec une finesse qui doit être de l'ordre du rayon du fil. Or, cette contrainte est trop forte dans un grand nombre d'applications (calcul d'environnement plasma de satellite, calculs d'antennes en électromagnétisme). Une étude mathématique de la convergence de la suite des solutions de l'équation de Poisson vers un problème limite est proposée lorsque le rayon ϵ du cylindre tend vers 0 qui permet d'obtenir une vitesse de convergence en $1/\ln(\epsilon)$. On propose une méthode dite approximation filaire permettant de tenir compte du fil sans avoir à discrétiser localement au voisinage du fil et convergente en au moins $\sqrt{\epsilon}$. Cette méthode est justifiée dans le cas de l'équation de Poisson et est étendue formellement au cas d'un fil à section quelconque puis aux équations de Maxwell en régime harmonique. *Pour citer cet article : F. Rogier et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Wire approximation for Poisson and time-harmonic Maxwell equations. We are interested in the approximation of the Poisson and time harmonic Maxwell equations around a circular cylinder with a small radius. Numerical approximation requires a typical meshsize comparable to the radius of the cylinder, thus increasing the computational cost. In many applications (spacecraft charging computation, wire antennas modelling) the mesh size becomes too large to perform realistic computations. A mathematical study proves the convergence of the sequence u_{ϵ} of Poisson equation solutions when the radius ϵ goes to 0 toward a limit problem with a convergence rate of $1/\ln(\epsilon)$. A wire approximation is proposed exhibiting a rate of convergence larger that $\sqrt{\epsilon}$ without constraint of mesh refinement related to the radius size. This method is extended to the case of arbitrary wire cross section and also to the time harmonic Maxwell equations. *To cite this article: F. Rogier et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).* © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Adresses e-mail: Francois.Rogier@onera.fr (F. Rogier), Jean-Francois.Roussel@onera.fr (J.-F. Roussel), Dominique.Volpert@onera.fr (D. Volpert).

1. Position du problème

Soit ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de fontière $\partial \omega$ régulière de classe C^1 tel que $D(0, 1) \subset \omega$ où D(0, 1) est le disque de centre 0 et de rayon 1. On note par x les éléments de ω et $r \theta$ leurs coordonnées polaires. Soient Ω_0 l'ouvert de \mathbb{R}^3 construit par translation le long de l'axe Oz:

 $\Omega_0 = \{ (x, z), \ x \in \omega, z \in]0, 1[\}$

et $D(0, \alpha)$ le disque fermé de rayon α dans ω . On considère la suite d'ouverts paramétrés par α , $0 < \alpha \leq 1$:

$$\Omega_{\alpha} = \left\{ (x, z), \ x \in \omega \setminus D(0, \alpha), z \in]0, 1[\right\}$$

et on pose

$$\Gamma_{\alpha} = \left\{ x \in \omega \setminus D(0,\alpha), z = 0, z = 1 \right\} \cup \partial \omega \times [0,1], \qquad \gamma_{\alpha} = \left\{ r = \alpha, \theta \in [0,2\pi[] \times [0,1], \\ D_{\alpha} = D(0,\alpha) \times]0,1[, \qquad D_{\alpha,\beta} = D(0,\beta) \setminus D(0,\alpha) \times]0,1[, \qquad \alpha < \beta.$$

On s'intéresse à la suite $(u_{\epsilon})_{\epsilon>0}$ des solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_{\epsilon} = f & \text{dans } \Omega_{\epsilon}, \\ u_{\epsilon} = h & \text{sur } \gamma_{\epsilon}, \\ u_{\epsilon} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\epsilon} \end{cases}$$
(1)

où la fonction h est supposée ne dépendre que de z. On note u la solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \operatorname{dans} \Omega_0, \\ u = 0 & \operatorname{sur} \partial \Omega_0. \end{cases}$$
(2)

On a alors le résultat suivant :

Théorème 1.1. Soit $f \in L^2(\Omega_0)$ et $h \in H_0^1(]0, 1[)$, la suite u_{ϵ} converge vers u sur tout compact de Ω_0 et on a l'estimation :

$$\|u_{\epsilon} - u\|_{1,\Omega_{\epsilon}} \leq C \left(\|f\|_{0,\Omega_{0}} + \|h\|_{1,[0,1[}) / \sqrt{-\ln(\epsilon)}. \right)$$
(3)

Ce théorème montre que la suite u_{ϵ} tend en un certain sens vers la solution d'un problème limite dans lequel le fil a disparu. Un résultat similaire a été obtenu par Sanchez-Palencia [1] mais sans estimation d'erreur. Un calcul analytique autour d'un cylindre co-axial montre que l'estimation d'erreur obtenue est optimale. Le théorème ci-dessus précise l'ordre de convergence avec lequel u_{ϵ} tend vers u : il est inversement proportionnel à la racine de l'inverse du logarithme du rayon du fil. C'est une convergence très lente : u est donc une mauvaise approximation de u_{ϵ} . Or, lorsque l'on souhaite approcher numériquement u_{ϵ} , on est conduit à utiliser des élements de maillage près du fil d'une taille égale au rayon du fil, ce qui rend le calcul extrêmement coûteux. On propose ici une méthode d'approximation (dite approximation filaire) de u_{ϵ} qui permet de remplacer la présence du fil par une condition aux limites écrite à la frontière d'un domaine petit mais suffisamment grand pour contenir le fil.

2. Approximation filaire

Considérons un réel positif *a* tel que $\epsilon < a < 1$ relativement petit mais suffisament grand par rapport à ϵ . Désignons par $K_{\epsilon,a}$ l'opérateur de Dirichlet–Neumann qui à $(u_{\epsilon|\gamma_a})$ associe $\frac{\partial u_{\epsilon}}{\partial r}|\gamma_a$ par le biais de la résolution de l'équation (1) dans le domaine $D_{a,\epsilon}$. On effectue un changement d'échelle dans le domaine $D_{a,\epsilon}$ en posant x = x/a, puis on construit formellement un développement asymptotique par rapport *a* et ϵ/a de $K_{\epsilon,a}$, ce qui permet de poser la :

Définition 2.1. On appelle approximation filaire de l'opérateur de Dirichlet–Neumann l'opérateur $K_{\epsilon,a}^0$ définit par :

$$K^{0}_{\epsilon,a}(g) = \frac{g - h(z)}{a \ln(\epsilon/a)}$$

Le problème approché s'écrit alors :

$$\begin{cases} -\Delta u_{a,\epsilon} = f & \text{dans } \Omega_a, \\ \frac{\partial u_{a,\epsilon}}{\partial r} = K^0_{\epsilon,a}(u_{a,\epsilon}) & \text{sur } \gamma_a, \\ u_{a,\epsilon} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\epsilon}. \end{cases}$$
(4)

Puisque $\epsilon < a$, cette condition aux limites (de Robin) garantit l'existence et l'unicité de la solution. On prolonge $u_{a,\epsilon}$ dans $\in D_{a,\epsilon}$ par :

$$u_{a,\epsilon}(r,\theta,z) = u_{a,\epsilon}(a,\theta,z)\alpha(r) + h(z)(1-\alpha(r)), \quad \alpha(r) = \frac{\ln(r/\epsilon)}{\ln(a/\epsilon)}.$$
(5)

La résolution numérique du problème (4) n'est plus contrainte par le rayon du fil, puisque le fil est pris en compte via la condition aux limites sur γ_a . Le théorème suivant fournit une estimation a priori de la vitesse de convergence par rapport à *a* de la solution de (4) vers la solution de (1).

Théorème 2.2. Supposents $f \in L^{\infty}(\Omega_0)$ et $h \in H_0^1(]0, 1[)$, il existe une constante C > 0 telle que :

$$\|u_{a,\epsilon} - u_{\epsilon}\|_{1,\Omega_{\epsilon}} \leq C \ a \sqrt{-\ln\left(\frac{\epsilon}{a}\right)} \left(\|f\|_{\infty,\Omega_{0}} + \|h\|_{1,]0,1[}\right).$$

La démonstration de ce théorème repose sur l'idée que, localement au voisinage du fil, les variations de u_{ϵ} les plus importantes sont dans le plan perpendiculaire au fil. Ainsi u_{ϵ} se comporte comme la solution d'une équation de Laplace entre deux conducteurs cylindriques infinis et dont la capacité par unité de longueur est égale à $1/\ln(a/\epsilon)$ (à un coefficient numérique près). Ceci permet de construire une approximation du premier ordre de l'opérateur de Dirichlet–Neumann.

Si l'on choisit comme paramètre *a* une puissance de ϵ (par exemple $a \approx \sqrt{\epsilon}$), on obtient une approximation de u_{ϵ} bien meilleure à celle qui consisterait à négliger la présence du fil. Une bonne valeur de *a* est la taille typique de la cellule du maillage qui serait utilisée dans la résolution sans tenir compte de la présence du fil. L'ensemble de ces résultats se généralisent à une dimension quelconque, à des fils présentant une courbure ainsi qu'à d'autres équations équations elliptiques sans difficulté majeure. Le problème de Neumann ne présente pas le même intérêt que celui de Dirichlet; en effet on montre aisément que, dans ce cas, l'erreur donnée par le Théorème 2.2 est en O(ϵ).

3. Cas d'un fil à section quelconque

Supposons maintenant que la section transverse du fil ne soit plus circulaire mais circonscrite par une courbe fermée $L_{\epsilon} = \epsilon L$. Le théorème suivant montre que l'on peut étendre formellement la notion d'approximation filaire en introduisant un rayon « équivalent » :

Théorème 3.1. Supposents que la solution u_{ϵ} de (1) est suffisamment régulière, on a l'estimation

$$K_{\epsilon,a}(u_{\epsilon|\gamma_a}) = \frac{u_{\epsilon|\gamma_a} - h(z)}{a \ln(C_L \epsilon)} + O\left(\frac{a}{-\ln(C_L \epsilon/a)}\right) + O\left(\frac{\epsilon/a}{-\ln(C_L \epsilon/a)}\right)$$
(6)

où C_L est un réel > 0 déterminé comme l'unique solution du système intégral :

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L} \phi(s') \ln |s-s'| \, \mathrm{d}\gamma(s') = \frac{\ln(C_L)}{2\pi}, & \forall s \in L, \\ \int\limits_{L} \phi(s') \, \mathrm{d}\gamma(s') = 1, \\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L} \phi(s') \ln |s'| \, \mathrm{d}\gamma(s') = \frac{\ln(C_L)}{2\pi}. \end{cases}$$

Ce résultat permet de prendre en compte des sections de fils quelconques en introduisant un rayon équivalent ϵC_L dans l'Éq. (4). Le calcul de C_L nécessite la résolution d'une équation intégrale sur la frontère L.

4. Extension au cas des équations de Maxwell harmoniques

Des approximations filaires existent déjà pour les équations de Maxwell [2], elles nécessitent la résolution d'une équation d'ordre 2 sur le courant total sur le fil et l'introduction d'une inductance linéique à l'aide d'une régularisation, mais aucune justification mathématique de ces modèles n'a été proposée. Etant donné l'importance des antennes filaires en électromagnétisme, l'approximation filaire a été étendue aux équations de Maxwell harmoniques. On note **E** le champ éléctrique harmonique réduits, c'est à dire le champ physique multiplié par $\sqrt{\varepsilon_0}$. λ est la longueur d'onde et $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde. On suppose de plus que **h** est un champ électrique incident qui s'annule sur la frontière Γ_{ϵ} et $h_z = \mathbf{h}.\hat{\mathbf{z}}$, r = 0. **E** est solution du systèmes des équations de Maxwell harmoniques :

 $\begin{cases} \operatorname{rot rot} \mathbf{E} - k^2 \, \mathbf{E} = 0 & \operatorname{dans} \, \Omega_{\epsilon}, \\ \mathbf{E} \wedge n = \mathbf{h} & \operatorname{sur} \, \gamma_{\epsilon}, \\ \mathbf{E} \wedge n = 0 & \operatorname{sur} \, \Gamma_{\epsilon}. \end{cases}$

En suivant la même démarche que dans l'équation de Poisson, on peut construire l'approximation filaire :

Définition 4.1. On appelle approximation filaire conservative de l'opérateur de Dirichlet–Neumann $\mathbf{K}_{\epsilon,a}$ pour les équations de Maxwell harmonique, l'opérateur :

$$\begin{split} K^{0}_{\epsilon,a}(\mathbf{E}_{a,\epsilon}) &= -\phi'(a)(h_{z})\hat{\mathbf{z}} - \xi'(a)(\mathbf{E}_{a,\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{z}})\hat{\mathbf{z}} + \frac{\xi'(a)}{k^{2}}\frac{\partial^{2}(h_{z})}{\partial z^{2}}\hat{\mathbf{z}} - \frac{\phi'(a)}{k^{2}}\frac{\partial^{2}(\mathbf{E}_{a,\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{z}})}{\partial z^{2}}\hat{\mathbf{z}},\\ \phi(r) &= \left(Y_{0}(ka) J_{0}(kr) - J_{0}(ka)Y_{0}(kr)\right) / \left(J_{0}(k\epsilon)Y_{0}(ka) - J_{0}(ka)Y_{0}(k\epsilon)\right),\\ \xi(r) &= \left(-Y_{0}(k\epsilon) J_{0}(kr) + J_{0}(k\epsilon)Y_{0}(kr)\right) / \left(J_{0}(k\epsilon)Y_{0}(ka) - J_{0}(ka)Y_{0}(k\epsilon)\right), \end{split}$$

 J_0 , Y_0 étant les fonctions de Bessel de première et de seconde espèce.

Un terme de dérivée seconde apparaît dans le second membre : il permet de satisfaire exactement la nullité de la divergence dans le domaine $D_{a,\epsilon}$. On vérifie que $\xi'(a)$ est positif pour $\frac{\epsilon}{a}$ suffisamment petit. Ainsi la contribution du terme de bord joue le rôle d'une impédance résistive.

Remerciements

Ce travail a été partiellement soutenu par l'ESTEC Contrat No. 16806/02/NL/JA.

Références

- [1] Hung Pham Huy, E. Sanchez-Palencia, Phénomènes de transmission à travers des couches minces de conductivité 2 levée, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974) 284–309.
- [2] H. Holland, L. Simpson, Finite-difference analysis of EMP coupling to thin struts and wires, IEEE Trans. Antennas and Propagations EMC-23 (2) (May 1981) 88–97.