Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 525–530
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Probabilités

Lois conjointes du processus et de son maximum, des premier instant et position d'atteinte d'une demi-droite pour le pseudo-processus régi par l'équation $\frac{\partial}{\partial t} = \pm\frac{\partial^N}{\partial x^N}$

Aimé Lachal

Institut national des sciences appliquées de Lyon, 20, avenue A. Einstein, 69621 Villeurbanne cedex, France

Reçu le 20 avril 2006 ; accepté après révision le 26 septembre 2006

Présenté par Marc Yor

Résumé

Dans cette Note, on présente des formules explicites pour les distributions conjointes du pseudo-processus régi par l'équation $\frac{\partial}{\partial t} = \pm\frac{\partial^N}{\partial x^N}$ couplé avec son maximum, et du premier instant de dépassement d'un seuil fixé par ce pseudo-processus couplé avec sa position relative à cet instant. ***Pour citer cet article : A. Lachal, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Abstract

Joint law of the process and its maximum, first hitting time and place of a half-line for the pseudo-process driven by the equation $\frac{\partial}{\partial t} = \pm\frac{\partial^N}{\partial x^N}$. In this Note, we obtain explicit formulas for the joint distribution of the pseudo-process driven by the equation $\frac{\partial}{\partial t} = \pm\frac{\partial^N}{\partial x^N}$ coupled together with its maximum, as well as that of the first time when this pseudo-process overshoots a fixed level coupled together with the corresponding overshooting place. ***To cite this article: A. Lachal, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Abridged English version

This Note deals with the pseudo-process $X = (X(t))_{t \geqslant 0}$ driven by the heat-type equation of even order $N \geqslant 4$: $\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa_N \frac{\partial^N u}{\partial x^N}$, $\kappa_N = (-1)^{N/2+1}$. This pseudo-process is governed by a Markovian kernel defining a signed measure (which is **not** a probability measure) with infinite total variation. This feature entails some substantial difficulties namely in defining X properly over the whole half-time interval $[0, +\infty)$, as well as in studying the convergence of certain series and integrals. Nevertheless, we shall use the classical language of probability: process, expectation, law, probability density function (pdf), distribution function (df), …

Adresse e-mail : aime.lachal@insa-lyon.fr (A. Lachal).

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2006.09.027

Consider now the related up-to-date maximum as well as the first hitting time of the line $(a, +\infty)$:

$$M(t) = \max_{0\leqslant s\leqslant t} X(s), \qquad \tau_a = \inf\{t \geqslant 0\colon\ X(t) > a\}.$$

The aim of this Note is to derive explicitly the joint pdf's of the couples $(X(t), M(t))$ and $(\tau_a, X(\tau_a))$.

For this, we begin to sample X over the dyadic times. This yields, for each $n \in \mathbb{N}$, the step-process $X_n = (X_n(t))_{t\geqslant 0}$ defined by $X_n(t) = X(k/2^n)$ for $k/2^n \leqslant t < (k+1)/2^n$, $k \in \mathbb{N}$. Put then

$$M_n(t) = \max_{0\leqslant s\leqslant t} X_n(s), \qquad \tau_{a,n} = \inf\{t \geqslant 0\colon\ X_n(t) > a\}.$$

- In order to get the law of $(X(t), M(t))$, we invoke the famous Spitzer identity and then express the 3-arguments (λ, μ, ν) Laplace–Fourier transform of $(X_n(t), M_n(t))$ by means of the 'decoupled' quantity X_n; the result is given by (2), Section 2. As mentioned above, the series arising in (2) properly converges under the restriction that the argument λ must *a priori* satisfy $\Re(\lambda) > c2^n$ for a certain positive constant c. This substantial constraint prevents us from taking the limit as $n \to \infty$ in (2). Actually, using clever results on Dirichlet series, it may be seen that this condition can be relaxed, we can choose $c = 0$ and then take the limit as $n \to \infty$. In this way, the (λ, μ, ν) Laplace–Fourier transform of $(X(t), M(t))$ emerges; it is explicitly given by (3). Next, successive inversions with respect to ν, μ and λ together with numerous computations provide an explicit representation for the pdf and the df of $(X(t), M(t))$ and this is the first of both main results which is displayed in Theorem 1, Section 3.
- In order to get the law of $(\tau_a, X(\tau_a))$, we again use the step-process X_n. We obtain the relationship (4) between the law of $(X_n(t), M_n(t))$ and that of $(\tau_{n,a}, X_n(\tau_{n,a}))$. As in the first part, putting aside some difficulties of convergence, we can take the limit as $n \to \infty$ in (4) for deriving the similar relationship (5) between the law of $(X(t), M(t))$ and that of $(\tau_a, X(\tau_a))$. The (λ, μ) Laplace–Fourier transform of $(\tau_a, X(\tau_a))$ emerges; see (6), Section 4. We then deduce an explicit representation for the pdf of $(\tau_a, X(\tau_a))$ and this is the second main result which is displayed in Theorem 2, Section 5. We get in particular the pdf of the first hitting place $X(\tau_a)$. A noteworthy fact is that it involves Schwartz distributions, more specifically the derivatives of the Dirac distribution δ_a. Referring to electrical dipoles, this suggests, as in [6,7], to call δ_a a 'monopole', δ'_a a 'dipole' and more generally $\delta_a^{(q)}$ a 'multipole'.
- Finally, in Section 6, we retrieve some results of Beghin, Orsingher, Ragozina [2] and Nishioka [6,7] corresponding to the case $N = 4$.

1. Introduction

Considérons l'équation de type « chaleur » d'ordre pair $N \geqslant 4$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa_N \frac{\partial^N u}{\partial x^N} \quad \text{avec } \kappa_N = (-1)^{N/2+1}.$$

Introduisons le noyau correspondant $p(t; x)$ caractérisé par sa transformée de Fourier $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ux} p(t; x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-tu^N}$. Ce noyau, de signe variable et d'intégrale totale 1, permet de définir un pseudo-processus Markovien $X = (X(t))_{t\geqslant 0}$ gouverné par une mesure signée de variation totale infinie (qui n'est **pas** une probabilité) selon les règles habituelles : on pose $\mathbb{P}_x\{X(t) \in \mathrm{d}y\} = p(t; x - y)\,\mathrm{d}y$ et pour tout $n \geqslant 1$ et tous $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $x_0 = x$,

$$\mathbb{P}_x\{X(t_1) \in \mathrm{d}x_1, \ldots, X(t_n) \in \mathrm{d}x_n\} = \prod_{i=1}^{n} p(t_i - t_{i-1}; x_{i-1} - x_i)\,\mathrm{d}x_i.$$

Bien que n'ayant pas affaire à une probabilité, on adoptera le langage usuel des probabilités : processus, espérance, loi, densité, fonction de répartition, ... Introduisons à présent le maximum du processus $M(t) = \max_{0\leqslant s\leqslant t} X(s)$ ainsi que le premier instant de dépassement du niveau a (ou encore d'atteinte de la demi-droite $]a, +\infty[$) : $\tau_a = \inf\{t \geqslant 0\colon\ X(t) > a\}$.

L'objectif de cette Note est de calculer explicitement les lois conjointes des couples $(X(t), M(t))$ et $(\tau_a, X(\tau_a))$. Pour cela, on commence par discrétiser le processus X sur les temps dyadiques $k/2^n$, $k, n \in \mathbb{N}$ et l'on utilise alors l'identité de Spitzer classique qui peut s'adapter à la situation présente. Cela conduit à une représentation explicite de la loi conjointe du couple $(X(t), M(t))$ (Théorème 1). Ensuite, le même procédé de discrétisation permet de relier la loi conjointe du couple $(\tau_a, X(\tau_a))$ à celle du couple $(X(t), M(t))$ pour finalement en obtenir la loi (Théorème 2). Les résultats présentés dans cette Note font l'objet d'un manuscript [4] contenant des définitions précises relatives au processus X tenant compte du fait qu'il ne vit pas dans un espace probabilisé ainsi que les preuves détaillées. Ce même manuscript fait suite à un travail antérieur [3] traitant du temps séjourné par X sur une demi-droite en relation avec la fonctionnelle « découplée » $M(t)$. Le lecteur y trouvera également plusieurs références sur le sujet.

Posons $\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t;\xi)|\,\mathrm{d}\xi > 1$. Remarquons que dans le cas où N serait impair, on aurait $\rho = +\infty$. Notons θ_j, $0 \leqslant j \leqslant N-1$, les racines N-ièmes de κ_N puis $J = \{j \in \{0,\dots,N-1\}\colon \Re\theta_j > 0\}$ et $K = \{k \in \{0,\dots,N-1\}\colon \Re\theta_k < 0\}$. On définit les familles de nombres

$$A_j = \prod_{l\in J\setminus\{j\}} \frac{\theta_l}{\theta_l - \theta_j} \quad \text{pour } j \in J, \qquad B_k = \prod_{l\in K\setminus\{k\}} \frac{\theta_l}{\theta_l - \theta_k} \quad \text{pour } k \in K.$$

La discrétisation de X sur les temps dyadiques $k/2^n$, $k, n \in \mathbb{N}$, conduit à la définition du processus échelon $X_n = (X_n(t))_{t\geqslant 0}$ suivante : pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $X_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k/2^n)\mathbb{1}_{[k/2^n,(k+1)/2^n)}(t)$. On pose alors $M_n(t) = \max_{0\leqslant s\leqslant t} X_n(s)$ et $\tau_{a,n} = \inf\{t \geqslant 0\colon X_n(t) > a\}$.

2. Transformée de Laplace–Fourier du couple $(X(t), M(t))$

Posons $F(\lambda,\mu,\nu) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t + \mathrm{i}\mu X(t) - \nu M(t)}\,\mathrm{d}t$ et $F_n(\lambda,\mu,\nu) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t + \mathrm{i}\mu X_n(t) - \nu M_n(t)}\,\mathrm{d}t$. On a

$$F_n(\lambda,\mu,\nu) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda/2^n}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda k/2^n + \mathrm{i}\mu X(k/2^n) - \nu M_n(k/2^n)}.$$

Si $\Re(\lambda) > 2^n \ln\rho$, on peut voir que la série $(\sum \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\lambda k/2^n + \mathrm{i}\mu X(k/2^n) - \nu M_n(k/2^n)}])$ est absolument convergente et alors, en posant $z = \mathrm{e}^{-\lambda/2^n}$, l'espérance de $F_n(\lambda,\mu,\nu)$ prend la forme d'une fonction génératrice :

$$\mathbb{E}_x\big[F_n(\lambda,\mu,\nu)\big] = \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\mu-\nu)x} \frac{1-z}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_0\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu X(k/2^n) - \nu M_n(k/2^n)}\big] z^k. \tag{1}$$

Remarquant que $M_n(k/2^n) = \max(X(0), X(1/2^n), \dots, X(k/2^n))$, cette espérance peut se calculer en faisant appel à l'identité de Spitzer. Cela donne en notant $\xi^+ = \max(\xi, 0)$:

$$\mathbb{E}_x\big[F_n(\lambda,\mu,\nu)\big] = \frac{1}{\lambda} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\mu-\nu)x} \exp\Bigg[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \mathbb{E}_0\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu X_n(k/2^n) - \nu X_n(k/2^n)^+} - 1\big)\Bigg] \quad \text{pour } \Re(\lambda) > 2^n \ln\rho. \tag{2}$$

La contrainte $\Re(\lambda) > 2^n \ln\rho$ empêche de prendre *a priori* la limite de (2) lorsque n tend vers l'infini. Faisant appel à un résultat fin sur les séries de Dirichlet (lemme de Bohr), on peut voir que (2) est en fait valable pour $\Re(\lambda) > 0$. Cette observation essentielle est due au fait que l'identité de Spitzer transforme l'expression (1) dépendant d'une information avec mémoire (via $M_n(k/2^n)$) en l'expression (2) ne dépendant plus que d'une information instantanée (via $X_n(k/2^n)$). Maintenant, on peut calculer la limite de (2) lorsque $n \to +\infty$: pour $\Re(\lambda) > 0$,

$$\mathbb{E}_x\big[F(\lambda,\mu,\nu)\big] = \frac{1}{\lambda} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\mu-\nu)x} \exp\Bigg[\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathbb{E}_0\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu X(t) - \nu X(t)^+} - 1\big) \frac{\mathrm{d}t}{t}\Bigg].$$

L'évaluation de l'intégrale ci-dessus nécessite le résultat suivant : pour $\Re(\alpha) \leqslant 0$,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{\mathrm{d}t}{t} \int_0^{+\infty} \big(\mathrm{e}^{\alpha\xi} - 1\big)\mathbb{P}\{X(t) \in \mathrm{d}\xi\} = \log\Bigg(\prod_{j\in J} \frac{\sqrt[N]{\lambda}}{\sqrt[N]{\lambda} - \alpha\theta_j}\Bigg).$$

Proposition 1. *La transformée de Laplace–Fourier du couple $(X(t), M(t))$ est donnée pour $\Re(\lambda) > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\nu > 0$, par*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathbb{E}_x\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu X(t) - \nu M(t)}\big]\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\mu-\nu)x}}{\prod_{j\in J}(\sqrt[N]{\lambda} - (\mathrm{i}\mu-\nu)\theta_j) \prod_{k\in K}(\sqrt[N]{\lambda} - \mathrm{i}\mu\theta_k)}. \tag{3}$$

3. Inversions successives, densité conjointe de $(X(t), M(t))$

Le but de cette partie est d'inverser la transformée de Laplace–Fourier (3) par rapport à λ, μ et ν.

– *Inversion relativement à ν.* À l'aide de la décomposition en éléments simples de la fraction rationelle apparaissant dans (3), on tire pour $z \geqslant x$, $\Re(\lambda) > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\,\mathbb{E}_x\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu X(t)}, M(t) \in \mathrm{d}z\big]/\mathrm{d}z = \frac{\lambda^{(1-\#J)/N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu x}}{\prod_{k\in K}(\sqrt[N]{\lambda} - \mathrm{i}\mu\theta_k)} \sum_{j\in J} \theta_j A_j\,\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\mu - \theta_j \sqrt[N]{\lambda})(z-x)}.$$

– *Inversion relativement à μ.* On obtient la t-transformée de Laplace de la densité puis, après intégration, celle de la fonction de répartition de $(X(t), M(t))$: pour $z \geqslant x \vee y$ et $\Re(\lambda) > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\,\mathbb{P}_x\big\{X(t) \in \mathrm{d}y, M(t) \in \mathrm{d}z\big\}/\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{\lambda^{1-2/N}} \sum_{j\in J} \theta_j A_j\,\mathrm{e}^{\theta_j \sqrt[N]{\lambda}(x-z)} \sum_{k\in K} \theta_k B_k\,\mathrm{e}^{\theta_k \sqrt[N]{\lambda}(z-y)},$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbb{P}_x\big\{X(t) \leqslant y \leqslant z \leqslant M(t)\big\}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} \sum_{j\in J,\,k\in K} \frac{\theta_j A_j B_k}{\theta_j - \theta_k}\,\mathrm{e}^{\theta_j \sqrt[N]{\lambda}(x-z)+\theta_k \sqrt[N]{\lambda}(z-y)}.$$

– *Inversion relativement à λ.* Le premier principal résultat de ce travail est le suivant :

Théorème 1. *On a pour $z \geqslant x \vee y$:*

$$\mathbb{P}_x\big\{X(t) \leqslant y \leqslant z \leqslant M(t)\big\} = \sum_{\substack{k\in K\\ 0\leqslant m\leqslant \#J-1}} a_{km} \int_0^t\!\!\int_0^s \frac{\partial^m p}{\partial x^m}(\sigma; x-z)\frac{I_{k0}(s-\sigma; z-y)}{(t-s)^{1-(m+1)/N}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\sigma$$

où les coefficients a_{km} peuvent s'exprimer au moyen des θ_l et les fonctions I_{k0} sont caractérisées par la relation $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} I_{k0}(t;\xi)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\theta_k \sqrt[N]{\lambda}\xi}$.

4. Transformée de Laplace–Fourier du couple $(\tau_a, X(\tau_a))$

L'instant $\tau_{a,n}$ associé à X_n est l'instant $k/2^n$ avec k tel que $X(0), X(1/2^n), \ldots, X((k-1)/2^n) \leqslant a$ et $X(k/2^n) > a$, soit encore : $M_n((k-1)/2^n) \leqslant a < M_n(k/2^n)$. On peut voir alors que pour $\Re(\lambda) > 2^n \ln\rho$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\big[\mathrm{e}^{-\lambda\tau_{a,n}+\mathrm{i}\mu X_n(\tau_{a,n})}\big] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_x\big[\big(\mathrm{e}^{-\lambda k/2^n+\mathrm{i}\mu X(k/2^n)} - \mathrm{e}^{-\lambda(k+1)/2^n+\mathrm{i}\mu X((k+1)/2^n)}\big)\mathbb{1}_{\{M_n(k/2^n)>a\}}\big]\\ &= \big(1 - \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu^N)/2^n}\big)\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda k/2^n}\mathbb{E}_x\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu X(k/2^n)}\mathbb{1}_{\{M_n(k/2^n)>a\}}\big].\end{aligned} \tag{4}$$

Comme dans la Section 2, la contrainte $\Re(\lambda) > 2^n \ln\rho$ peut être relaxée et (4) est encore valide pour $\Re(\lambda) > 0$, ce qui autorise le passage à la limite lorsque $n \to +\infty$. On tire alors la relation entre les lois des couples $(\tau_a, X(\tau_a))$ et $(X(t), M(t))$ suivante : pour $x \leqslant a$, $\Re(\lambda) > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}_x\big[\mathrm{e}^{-\lambda\tau_a+\mathrm{i}\mu X(\tau_a)}\big] = \big(\lambda + \mu^N\big)\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbb{E}_x\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu X(t)}\mathbb{1}_{\{M(t)>a\}}\big]\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Proposition 2. *On a pour $x \leqslant a$, $\Re(\lambda) > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$:*

$$\mathbb{E}_x\big[\mathrm{e}^{-\lambda\tau_a+\mathrm{i}\mu X(\tau_a)}\big] = \sum_{j\in J} A_j \prod_{l\in J\setminus\{j\}} \left(1 - \frac{\mathrm{i}\mu}{\sqrt[N]{\lambda}}\,\bar{\theta}_l\right)\mathrm{e}^{\theta_j \sqrt[N]{\lambda}(x-a)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu a}. \tag{6}$$

5. Inversions successives, densité conjointe de $(\tau_a, X(\tau_a))$

Le but de cette partie est d'inverser la transformée de Laplace–Fourier (6) par rapport à λ et μ.

– *Inversion relativement à μ.* En développant le produit apparaissant dans (6), puis en observant que $(-\mathrm{i}\mu)^q\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu a} = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu z}\delta_a^{(q)}(z)\,\mathrm{d}z$ on tire la relation suivante : pour $\Re(\lambda) > 0$ et $x \leqslant a \leqslant z$,

$$\mathbb{E}_x\big[\mathrm{e}^{-\lambda\tau_a}, X(\tau_a)\in\mathrm{d}z\big]/\mathrm{d}z = \sum_{q=0}^{\#J-1}\lambda^{-q/N}\Bigg[\sum_{j\in J}c_{jq}\,\mathrm{e}^{\theta_j\sqrt[N]{\lambda}(x-a)}\Bigg]\delta_a^{(q)}(z)$$

où les c_{jq} sont des constantes s'exprimant en fonction des θ_l.

– *Inversion relativement à λ.* On peut trouver des fonctions I_{lq} caractérisées par $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}I_{lq}(t;\xi)\,\mathrm{d}t = \lambda^{-q/N}\,\mathrm{e}^{\theta_l\sqrt[N]{\lambda}\,\xi}$. Posons ensuite $\mathcal{J}_q(t;\xi) = \sum_{j\in J}c_{jq}\,I_{jq}(t;\xi)$. Le deuxième principal résultat de ce travail s'énonce comme suit :

Théorème 2. *On a pour $x \leqslant a$:*

$$\mathbb{P}_x\big\{\tau_a\in\mathrm{d}t, X(\tau_a)\in\mathrm{d}z\big\}/\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z = \sum_{q=0}^{\#J-1}\mathcal{J}_q(t;x-a)\,\delta_a^{(q)}(z),$$

$$\mathbb{P}_x\big\{X(\tau_a)\in\mathrm{d}z\big\}/\mathrm{d}z = \sum_{q=0}^{\#J-1}(-1)^q\frac{(x-a)^q}{q!}\,\delta_a^{(q)}(z).$$

Il convient de remarquer que les densités ci-dessus s'expriment au moyen des dérivées successives de la mesure de Dirac δ_a, laquelle doit être considérée finalement comme une distribution de Schwartz. Ce phénomène conduit à baptiser, par référence aux dipôles électriques et comme cela a été fait par Nishioka [6,7] lorsque $N = 4$, δ_a monopôle, δ'_a dipôle et plus généralement $\delta_a^{(q)}$ multipôle.

6. Exemple : le cas « biharmonique » $N = 4$

On retrouve les résultats de Beghin, Orsingher et Ragozina [2] pour $(X(t), M(t))$: posons

$$p(t;\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t\lambda^4}\cos(\xi\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \qquad q_1(t;\xi) = \frac{\xi}{\pi\sqrt{2}\,\Gamma(1/4)\,t}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t\lambda^4}\cos(\xi\lambda)\,\mathrm{d}\lambda,$$

$$q_2(t;\xi) = \frac{\xi}{2\pi^2 t}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t\lambda^4}\big(\cos(\xi\lambda)+\sin(\xi\lambda)-\mathrm{e}^{-\xi\lambda}\big)\,\mathrm{d}\lambda.$$

La formule du Théorème 1 s'écrit dans ce cas

$$\mathbb{P}_x\big\{X(t)\leqslant y\leqslant z\leqslant M(t)\big\} = \int_0^t\!\!\int_0^s\Bigg[p(\sigma;x-z)\frac{q_1(s-\sigma;z-y)}{(t-s)^{3/4}} + \frac{\partial p}{\partial x}(\sigma;x-z)\frac{q_2(s-\sigma;z-y)}{\sqrt{t-s}}\Bigg]\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\sigma.$$

On retrouve également les résultats de Nishioka [6,7] pour $(\tau_a, X(\tau_a))$: posons

$$\mathcal{J}_0(t;\xi) = \frac{\xi}{2\pi t}\int_0^{+\infty}\big(\mathrm{e}^{\xi\lambda}-\cos(\xi\lambda)+\sin(\xi\lambda)\big)\,\mathrm{e}^{-t\lambda^4}\,\mathrm{d}\lambda,$$

$$\mathcal{J}_1(t;\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\big(\cos(\xi\lambda)+\sin(\xi\lambda)-\mathrm{e}^{\xi\lambda}\big)\lambda^2\,\mathrm{e}^{-t\lambda^4}\,\mathrm{d}\lambda.$$

La formule du Théorème 2 s'écrit dans ce cas, pour $x \leqslant a$,

$$\mathbb{P}_x\{\tau_a \in \mathrm{d}t,\, X(\tau_a) \in \mathrm{d}z\}/\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z = \mathcal{J}_0(t; x-a)\,\delta_a(z) + \mathcal{J}_1(t; x-a)\,\delta'_a(z).$$

On pourra consulter avec profit [1] et [2] pour des résultats relatifs au cas $N = 3$ qui ont été obtenus par une autre approche (reposant sur des équations différentielles). Bien que ce cas ne rentre pas dans le contexte présent puisque $\rho = +\infty$, il est à noter que nos résultats concordent exactement, formellement, avec ceux de [2] lorsque $N = 3$. Voir également [8] pour une étude détaillée relative aux monopôles et aux dipôles dans le cas $N = 4$, ainsi que [5] pour d'autres résultats complémentaires.

Remerciements

L'auteur remercie chaleureusement Enzo Orsingher pour de nombreuses discussions fructueuses lors d'un séjour à l'Université de Rome « La Sapienza » (Italie).

Références

[1] L. Beghin, K.J. Hochberg, E. Orsingher, Conditional maximal distributions of processes related to higher-order heat-type equations, Stochastic Process. Appl. 85 (2000) 209–223.
[2] L. Beghin, E. Orsingher, T. Ragozina, Joint distributions of the maximum and the process for higher-order diffusions, Stochastic Process. Appl. 94 (2001) 71–93.
[3] A. Lachal, Distributions of sojourn time, maximum and minimum for pseudo-processes governed by higher-order heat-type equations, Electronic J. Probab. 8 (2003) 1–53 (paper no. 20).
[4] A. Lachal, First hitting time and place, monopoles and multipoles for pseudo-processes driven by the equation $\frac{\partial}{\partial t} = \pm \frac{\partial^N}{\partial x^N}$, soumis, 2006.
[5] T. Nakajima, S. Sato, On the joint distribution of the first hitting time and the first hitting place to the space-time wedge domain of a biharmonic pseudo process, Tokyo J. Math. 22 (1999) 399–413.
[6] K. Nishioka, Monopole and dipole of a biharmonic pseudo process, Proc. Japan Acad. Ser. A 72 (1996) 47–50.
[7] K. Nishioka, The first hitting time and place of a half-line by a biharmonic pseudo process, Japan J. Math. 23 (1997) 235–280.
[8] K. Nishioka, Boundary conditions for one-dimensional biharmonic pseudo process, Electronic J. Probab. 6 (2001) 1–27 (paper no. 13).