

Géométrie algébrique

Variétés de type Togliatti

Jean Vallès

Laboratoire de mathématiques appliquées de Pau et des Pays de l'Adour, avenue de l'université, 64000 Pau, France

Reçu le 27 juin 2006 ; accepté le 23 août 2006

Disponible sur Internet le 22 septembre 2006

Présenté par Laurent Lafforgue

Résumé

La surface de Del Pezzo $S_6 \subset \mathbb{P}^6$ de degré 6 obtenue par l'éclatement de trois points non alignés du plan projectif complexe \mathbb{P}^2 (par le système linéaire des cubiques) possède une propriété spectaculaire : ses hyperplans osculateurs ont un point commun dans l'espace ambiant. Pour cette raison la surface est appelée surface de Togliatti. Nous donnons deux explications de ce phénomène. Nous en déduisons alors deux familles différentes de variétés possédant une propriété analogue. *Pour citer cet article : J. Vallès, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

The Togliatti type of varieties. The Del Pezzo surface S_6 , obtained by blowing up the projective plane along three points (non aligned) has the following nice property: its osculating hyperplanes have a common point. For that reason, S_6 is also called the Togliatti surface. In this Note we give two explanations of this fact. From this we obtain two different families of varieties with an analogous property. *To cite this article: J. Vallès, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

La surface de Del Pezzo $S_6 \subset \mathbb{P}^6$ de degré 6 obtenue par l'éclatement de trois points non alignés du plan projectif complexe \mathbb{P}^2 (par le système linéaire des cubiques) possède une propriété spectaculaire : ses hyperplans osculateurs ont un point commun dans l'espace ambiant. Autrement dit la surface « osculatrice » dans l'espace dual $\mathbb{P}^{\vee 6}$ est dégénérée. On dit alors qu'elle vérifie une équation de Laplace. Comme cette propriété a été démontrée par Togliatti, la surface S_6 hérite du nom de surface de Togliatti (voir [1,4,3,5]).

La surface de Togliatti est une projection de la surface de Veronese $v_3(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)))$ mais elle peut aussi être définie comme section hyperplane générale de la variété de Segre $\text{Seg}(1, 3) \subset \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(1, 1, 1)))$.

Dans une première partie je reviens rapidement sur ces deux descriptions.

Dans les deuxième et troisième parties je montre que les espaces $2n$ -tangents (voir les notations ci-dessous) des projections bien choisies des Veronese $v_{2n+1}(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2n+1)))$ et des sections hyperplanes générales des

Adresse e-mail : jean.valles@univ-pau.fr (J. Vallès).

Segre $\text{Seg}(1, 2n + 1) \subset \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1}(1, \dots, 1)))$ ont un point commun (voir les Théorèmes 3.1 et 4.3). Le point clé est la polarité par rapport aux courbes rationnelles normales et par rapport aux produits de \mathbb{P}^1 .

Notations. On note $T_x X \subset \mathbb{P}^N$ l'espace tangent d'une variété projective intègre $X \subset \mathbb{P}^N$ au point x et plus généralement, $T_x^k X \subset \mathbb{P}^N$ son espace k -tangent au point x (étant donnée une représentation paramétrique locale au point x , c'est l'espace engendré par x et les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k); on dira plutôt tangent au lieu de 1-tangent et osculateur au lieu de 2-tangent. La variété duale $X^\vee \subset \mathbb{P}^{N^\vee}$ est définie comme la clôture de Zariski de l'ensemble $\{H \mid T_x X \subset H, X \text{ lisse en } x\}$. On définit de la même manière les variétés duales supérieures

$$X^{k\vee} = \overline{\{H \mid T_x^k X \subset H, X \text{ lisse en } x\}}.$$

2. Surface de Togliatti

Définition 2.1. La surface rationnelle, image du plan projectif par l'application décrite ci-dessous

$$\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^6, \quad (x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_0x_1x_2, x_0^2x_1, x_0^2x_2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_0x_1^2, x_0x_2^2)$$

est appelée Surface de Togliatti.

Les sept formes cubiques du vecteur image s'annulant simultanément aux points

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1),$$

cette surface est la surface de Del Pezzo, notée S_6 , obtenue en éclatant \mathbb{P}^2 le long de ces trois points par le système linéaire des cubiques. L'hyperplan osculateur en un point $P = (x_0, x_1, x_2)$ s'interprète alors comme une cubique passant par les points e_1, e_2, e_3 et triple au point P , plus précisément comme la réunion des trois droites joignant P aux trois points base; une équation étant

$$(x_2X_1 - x_1X_2)(x_2X_0 - x_0X_2)(x_1X_0 - x_0X_1) = 0.$$

Comme l'ont remarqué Lanteri et Mallavibarena (voir [4], pages 357–359), cette équation développée ne s'exprime qu'avec les 6 formes cubiques suivantes

$$X_0^2X_1, X_0^2X_2, X_1^2X_2, X_1X_2^2, X_0X_1^2, X_0X_2^2.$$

Notons V l'espace vectoriel engendré par ces six formes cubiques. Alors, dans l'espace projectif

$$\mathbb{P}^6 = \mathbb{P}((X_0X_1X_2 \oplus V)^\vee)$$

des cubiques s'annulant aux points e_1, e_2, e_3 , les hyperplans osculateurs de S_6 passent par le point $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Nous venons de rappeler comment est définie la surface de Togliatti ainsi que la propriété d'incidence de ses hyperplans osculateurs. Cette surface peut aussi être décrite comme une section hyperplane générale de $\text{Seg}(1, 3) \subset \mathbb{P}^7$ qui est l'image par le morphisme de Segre de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Proposition 2.2. Soit H un hyperplan général de \mathbb{P}^7 . Alors $H \cap \text{Seg}(1, 3) \simeq S_6$.

Preuve. Sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ l'équation de H est de la forme suivante

$$\phi((X_iY_jZ_k)_{0 \leq i, j, k \leq 1}) = \left(\sum a_{i,j} Y_i Z_j \right) X_0 + \left(\sum b_{i,j} Y_i Z_j \right) X_1.$$

Comme les biformes $\sum a_{i,j} Y_i Z_j$ et $\sum b_{i,j} Y_i Z_j$ s'annulent simultanément en deux points, la surface $H \cap \text{Seg}(1, 3)$ est l'éclatement de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ le long de deux points, i.e. l'éclatement de \mathbb{P}^2 en trois points (non alignés). \square

Remarque. Le théorème de bidualité (voir par exemple [2] Théorème 15.24) ne s'étend pas trivialement aux ordres supérieurs de tangence. La surface de Togliatti, par exemple, ne vérifie pas un résultat attendu de « biosculation » car la surface de ses hyperplans osculateurs est dégénérée. Cette dernière est, à ma connaissance le seul exemple un peu élaboré de surface de \mathbb{P}^6 telle que $(S^{2\vee})^{2\vee} \neq S$.

3. Polarité par rapport à une courbe rationnelle normale

Théorème 3.1. Soient $2n + 1$ points de $v_{2n+1}(\mathbb{P}^2)$ en position générale, $\mathfrak{P} = \mathbb{P}^{2n}$ l'espace projectif qu'ils engendrent et $S_{2n(2n+1)}$ l'image de $v_{2n+1}(\mathbb{P}^2)$ par la projection de centre \mathfrak{P} . Sous ces hypothèses, les hyperplans $2n$ -tangents de $S_{2n(2n+1)}$ ont un point commun.

Preuve. Soient l_0, \dots, l_{2n+1} des formes linéaires en position générale. Afin de montrer que les hyperplans $2n$ -tangents de $S_{2n(2n+1)}$ ont un point commun on montre que l'espace projectif $\mathbb{P} = \mathbb{P}(l_0^{2n+1}, \dots, l_{2n+1}^{2n+1}, \prod_i \bar{l}_i)$ rencontre tous les espaces $2n$ -tangents de $v_{2n+1}(\mathbb{P}^2)$. L'image de \mathbb{P} est le point commun recherché.

Soit l une forme linéaire sur \mathbb{P}^2 et L la droite d'équation $l = 0$. En un point l^{2n+1} de la Veronese l'espace $2n$ -tangent est donné par l'ensemble des formes de degré $2n + 1$ qui sont divisibles par l i.e. par les formes de degré $2n$. Notons $U \simeq \mathbb{C}^2$ un espace vectoriel tel que $L = \mathbb{P}U$ et $C_{2n+1} \subset \mathbb{P}S^{2n+1}U$ l'image de L par le plongement de Veronese. On note \bar{l}_i la restriction des formes linéaires modulo l . D'après le résultat bien connu de polarité des courbes rationnelles normales (qui affirme que le point d'intersection des hyperplans $2n$ -tangents de C_{2n+1} en $(2n + 1)$ points généraux distincts appartient au \mathbb{P}^{2n} engendré par ces $(2n + 1)$ points) le sous espace projectif de dimension $2n$ de $\mathbb{P}S^{2n+1}U$ engendré par les $(2n + 1)$ points $(\bar{l}_0^{2n+1}, \dots, \bar{l}_{2n+1}^{2n+1})$ contient le point $\prod_i \bar{l}_i$ d'intersection des $(2n + 1)$ hyperplans $2n$ -tangents de C_{2n+1} . Modulo l les $2n + 1$ formes sont donc liées, ce qui prouve le théorème. \square

4. Polarité par rapport à un produit de droites projectives

Soit U un espace vectoriel complexe de dimension 2. Notons $\text{Seg}(1, n) \subset \mathbb{P}U^{\otimes n}$ l'image de $\mathbb{P}U \times \dots \times \mathbb{P}U$ par le plongement de Segre.

Lemme 4.1. $\text{Seg}(1, n)^{(n-1)\vee} \simeq \text{Seg}(1, n)$.

Preuve. Pour s'en convaincre donnons-en une preuve détaillée pour $\text{Seg}(1, 3)$. Notons

$$\mathbb{P}^7 = \mathbb{P}(\mathbb{C}[X_0Y_0Z_0, X_0Y_0Z_1, X_0Y_1Z_0, X_0Y_1Z_1, X_1Y_0Z_0, X_1Y_1Z_0, X_1Y_1Z_1]).$$

L'hyperplan d'équation $\phi(X_iY_jZ_k) = \sum \alpha_{i,j,k} X_iY_jZ_k = 0$ est osculateur au point $(x_iy_jz_k)$ si et seulement si

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X_i \partial Y_j}(x_iy_jz_k) = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_i \partial Z_k}(x_iy_jz_k) = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y_j \partial Z_k}(x_iy_jz_k) = 0.$$

On obtient immédiatement $\phi(X_iY_jZ_k) = (x_1X_0 - x_0X_1)(y_1Y_0 - y_0Y_1)(z_1Z_0 - z_0Z_1)$.

Plus généralement, notons \underline{X}_i (resp. \underline{x}_i) les coordonnées $X_{i,0}, X_{i,1}$ (resp. les nombres $x_{i,0}, x_{i,1}$). L'espace n -tangent en un point de $\text{Seg}(1, n)$ est donné par les dérivées $(n - 1)$ -ièmes d'un système de coordonnées locales qui est, essentiellement, le produit des variables. Ainsi la forme multilinéaire $\phi(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n)$ est la trace sur $\text{Seg}(1, n)$ d'un hyperplan n -tangent $H \subset \mathbb{P}^{2^n - 1}$ au point $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)$ si et seulement si

$$\phi(\underline{x}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n) = \phi(\underline{X}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{X}_n) = \dots = \phi(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_{n-1}, \underline{x}_n) = 0.$$

Après un calcul élémentaire on en déduit

$$\phi(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n) = \prod_{i=1, \dots, n} (x_{i,1}X_{i,0} - x_{i,0}X_{i,1}).$$

Ce qui prouve le lemme. \square

La polarité point-hyperplan par rapport à C_n permet d'étendre l'isomorphisme $C_n^{n\vee} \simeq C_n$ au \mathbb{P}^n ambiant. D'une façon similaire (une sorte de 'polarité' par rapport au Segre) l'isomorphisme $\text{Seg}(1, n)^{(n-1)\vee} \simeq \text{Seg}(1, n)$ s'étend aux espaces projectifs ambiants. Ici aussi il faudra distinguer le cas pair du cas impair.

Proposition 4.2. L'isomorphisme $\text{Seg}(1, n) \simeq \text{Seg}(1, n)^{(n-1)\vee}$ qui à un point du Segre associe l'hyperplan n -tangent au Segre en ce point s'étend aux espace projectifs $\mathbb{P}(U^{\otimes n})$ et $\mathbb{P}(U^{*\otimes n})$ de la manière suivante : Au point $x \in \mathbb{P}(U^{\otimes n})$ on associe le point d'intersection des hyperplans n -tangents aux points de $x^\vee \cap \text{Seg}(1, n)^{(n-1)\vee}$. Lorsque n est impair,

ce point image appartient à x^\vee . Lorsque n est pair, les points $x \in \mathbb{P}(U^{\otimes n})$ pour lesquels le point image appartient à x^\vee forment une hyperquadrique.

Preuve. L'isomorphisme $m^{\otimes n} : U^{\otimes n} \rightarrow U^{*\otimes n}$ donné par la matrice $m^{\otimes n} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\otimes n}$ est symétrique pour n pair et antisymétrique pour n impair. Pour $x \in \mathbb{P}(U^{\otimes n})$ on note x^\vee l'équation de l'hyperplan correspondant dans $\mathbb{P}(U^{*\otimes n})$. Notons $\xi \in x^\vee \cap \text{Seg}(1, n)^{(n-1)\vee}$ le point générique de l'intersection. On a par définition $\langle x, \xi \rangle = 0$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité. Comme $m^{\otimes n}$ est inversible il existe un unique $x_\xi \in \text{Seg}(1, n)$ tel que $\xi = m^{\otimes n}(x_\xi)$. On en déduit, en utilisant les propriétés de symétrie de la matrice $m^{\otimes n}$, que $\langle x, m^{\otimes n}(x_\xi) \rangle = \langle x_\xi, m^{\otimes n}(x) \rangle = 0$, c'est à dire que le point $m^{\otimes n}(x)$ appartient à l'hyperplan n -tangent générique de la variété $x^\vee \cap \text{Seg}(1, n)^{(n-1)\vee}$.

Enfin lorsque n est impair, la matrice $m^{\otimes n}$ étant antisymétrique, on a $\langle x, m^{\otimes n}(x) \rangle = 0$ pour tout $x \in \mathbb{P}(U^{\otimes n})$. Lorsque n est pair la matrice est symétrique et les points $x \in \mathbb{P}(U^{\otimes n})$ tels que $\langle x, m^{\otimes n}(x) \rangle = 0$ forment une quadrique de $\mathbb{P}(U^{\otimes n})$. \square

Théorème 4.3. Soit X_{2n} une section hyperplane générale de $\text{Seg}(1, 2n + 1)$. Les hyperplans $2n$ -tangents de X_{2n} ont un point commun.

Preuve. Les hyperplans $2n$ -tangents de X_{2n} sont les hyperplans tangents de $\text{Seg}(1, 2n + 1)$ coupés par l'hyperplan considéré. Le théorème est alors une conséquence immédiate de la Proposition 4.2. \square

Références

- [1] D. Franco, G. Ilardi, On a theorem of Togliatti, preprint n. 9, Università degli studi di Napoli "Federico II", 2001.
- [2] J. Harris, Algebraic Geometry: A First Course, Graduate Texts in Mathematics, vol. 133, Springer-Verlag, 1992.
- [3] G. Ilardi, Rational varieties satisfying one or more Laplace equations, Ricerche Mat. XLVIII (1) (1999) 123–137.
- [4] A. Lanteri, R. Mallavibarrena, Osculatory behavior and second dual varieties of Del Pezzo surfaces, Adv. Geom. 2 (4) (2002).
- [5] E. Togliatti, Alcuni esempi di superficie algebriche degli iperspazi che rappresentano un'equazione di Laplace, Comm. Math. Helv. I (1929) 255–272.