Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 407–410
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Résolution à l'infini et courbes polaires affines

Dimce Ivanovski

Laboratoire Emile-Picard, université Toulouse III, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 09, France

Reçu le 21 février 2006 ; accepté après révision le 4 juillet 2006

Présenté par Bernard Malgrange

Résumé

Soient f une fonction polynômiale en deux variables et l une forme linéaire. La courbe polaire affine de f pour la direction l est le lieu singulier de l'application $\Phi = (l, f)$. On considère deux résolutions à l'infini : la résolution intermédiaire Π et la résolution totale Π_{tot}. Notons L_∞ la droite à l'infini. Dans cette Note on décrit les intersections des transformées strictes de la polaire avec $\Pi^{-1}(L_\infty)$ et $\Pi_{\text{tot}}^{-1}(L_\infty)$. ***Pour citer cet article : D. Ivanovski, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Abstract

Resolution at infinity and affine polar curves. Let f be a polynomial map of two variables and let l be a linear form. The affine polar curve of f, for the direction l, is the singular locus of the map $\Phi = (l, f)$. We introduce two resolutions at infinity: the small resolution Π and the total resolution Π_{tot}. Let L_∞ be the line at infinity. The task of this Note is to determine the intersection locus of the strict transform of the polar curve with $\Pi^{-1}(L_\infty)$ and $\Pi_{\text{tot}}^{-1}(L_\infty)$. ***To cite this article: D. Ivanovski, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

1. Introduction

Soient $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction polynômiale et $l : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une forme linéaire non asymptotique à f en l'infini. Considérons l'application Φ, à valeurs dans $\mathbb{C}^2$, définie par $\Phi = (l, f)$. Après choix d'axes de coordonnées, il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $l(x, y) = ax + by$. Ainsi la courbe polaire de f pour la direction l, notée Γ_{aff}, est la réunion, avec multiplicités, des composantes irréductibles de la courbe d'équation $a\frac{\partial f}{\partial y} - b\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Pour $c \in \mathbb{C}$ on note F_c l'adhérence de la fibre $f^{-1}(c)$ dans $\mathbb{C}P^2$. On dira que f est à singularités isolées si aucune des fibres F_c n'admet de composante irréductible multiple.

Lorsque f est à singularités isolées, la définition de la polaire est l'équivalent affine de la notion de courbe polaire locale introduite par D.T. Lê [6] et B. Teissier [10]. Lorsque f n'est pas à singularités isolées, les composantes irréductibles non réduites des fibres de f sont aussi des composantes de Γ_{aff}. En cela notre définition diffère de la définition de polaire locale introduite par D.T. Lê [6] pour les germes à singularités non isolées.

Notons d le degré de f. On peut écrire : $f(x, y) = \sum_{\alpha+\beta \leqslant d} c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ où $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$. Si $(X : Y : Z)$ sont des coordonnées homogènes de $\mathbb{C}P^2$, l'équation homogène de f est : $F(X : Y : Z) = \sum_{\alpha+\beta=d} c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta Z^{d-\alpha-\beta}$. Alors l'ap-

Adresse e-mail : divanovski@yahoo.fr (D. Ivanovski).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.08.003

plication rationnelle $F_* : \mathbb{C}P^2 \dashrightarrow \mathbb{C}P^1$ qui à un $(X : Y : Z)$ associe $(F(X : Y : Z) : Z^d)$ n'est pas bien définie sur tout $\mathbb{C}P^2$. On notera L_∞ la droite à l'infini de $\mathbb{C}P^2$ définie par $L_\infty = \{Z = 0\}$. Ainsi $\mathbb{C}P^2 \backslash L_\infty$ peut être identifié à $\mathbb{C}^2$ avec les coordonnées (x, y). Les points d'indétermination de F_* sont les points d'intersection de $\{F = 0\}$ avec L_∞. Ils sont en nombre fini n et on notera $P = \{p_i, i = 1, \ldots, n\}$ l'ensemble de ces points. Une compactification de f par éclatements est la donnée d'une surface algébrique lisse X et d'un morphisme birationnel $\Pi : X \longrightarrow \mathbb{C}P^2$ où Π est une suite d'éclatements de points à partir de P tels que $F_* \circ \Pi : X \to \mathbb{C}P^1$ soit une fonction holomorphe. L'ensemble $\Pi^{-1}(P)$ est appelé diviseur exceptionnel de Π. Il est bien connu que de telles compactifications existent (voir par exemple [2]).

Définitions. (1) Si Π est minimal tel que $\tilde{f}_* = F_* \circ \Pi$ soit bien définie, et que $\forall c \in \mathbb{C}P^1$ les fibres $\tilde{f}_*^{-1}(c)$ ne passent que par des points lisses du diviseur exceptionnel $\Pi^{-1}(P) = E_*$ on dira que Π est la résolution intermédiaire.

(2) Si Π est minimal tel que $\tilde{f}_* = F_* \circ \Pi$ soit telle que $\forall c \in \mathbb{C}P^1$ les fibres $\tilde{f}_*^{-1}(c)$ sont des diviseurs à croisements normaux transverses à $\Pi^{-1}(P) = E_*$ on dira que Π est la résolution totale de f.

Notations. On notera Π la résolution intermédiaire de f et Π_{tot} la résolution totale de f. De plus on notera $\tilde{f} = F_* \circ \Pi$ et $\tilde{f}_{\text{tot}} = F_* \circ \Pi_{\text{tot}}$. Pour obtenir des résultats globaux à l'infini on utilisera les diviseurs suivants : $E = \Pi^{-1}(L_\infty)$ et $E_{\text{tot}} = \Pi_{\text{tot}}^{-1}(L_\infty)$.

Soit $\Gamma = \overline{\Gamma_{\text{aff}}}$ i.e. Γ est la compactifiée dans $\mathbb{C}P^2$ de la courbe Γ_{aff}. On dira que Γ est la polaire de f pour la direction l, ou, si aucune confusion n'est possible, la courbe polaire de f. Pour obtenir Γ à partir de Γ_{aff}, on lui adjoint ses points à l'infini.

On notera $\widetilde{\Gamma} = \overline{\Pi^{-1}(\Gamma \backslash P)}$ i.e. $\widetilde{\Gamma}$ est l'adhérence dans X de $\Pi^{-1}(\Gamma \backslash P)$. Par définition $\widetilde{\Gamma}$ est la transformée stricte de Γ par Π. De même $\widetilde{\Gamma}_{\text{tot}} = \overline{\Pi_{\text{tot}}^{-1}(\Gamma \backslash P)}$ est la transformée stricte de Γ par Π_{tot}. On notera aussi L_∞ la transformée stricte de L_∞ par Π et Π_{tot}.

Nous allons étudier « où passe la polaire » dans la résolution intermédiaire et la résolution totale. À notre connaissance l'étude de la polaire affine dans les résolutions à l'infini n'a jamais été effectuée. Mais les invariants polaires de la situation ont été décrits dans le cadre plus général des quotients jacobiens à l'infini dans [1].

Chaque composante irréductible de E et E_{tot} appartient à une seule des 4 catégories suivantes qui seront définies précisément dans la suite :

(I) L_∞, (II) le diviseur dicritique D_{dic}, (III) le diviseur critique D_{crit}, (IV) le diviseur à l'infini D_∞.

Un premier théorème détermine les intersections avec L_∞. Dans un deuxième paragraphe on donne une caractérisation des intersections avec les composantes dicritiques de la résolution intermédiaire (Théorème 2) et on obtient en particulier (Théorème 3) que $\widetilde{\Gamma}_{\text{tot}}$ n'intersecte pas les dicritiques de la résolution totale dans le cas où f est à singularités isolées. Ensuite il ne reste plus qu'à regarder les composantes irréductibles des diviseurs exceptionnels sur lesquelles $\tilde{f}$ (resp. $\tilde{f}_{\text{tot}}$) est constante (la constante étant finie ou infinie). Enfin, on illustrera le tout sur un exemple.

Remarque. Cette Note constitue une annonce de résultats et toutes les démonstrations se trouvent dans [5].

2. Intersection avec L_∞

Théorème 1. (1) *Soit p_i un point dans P. Alors $p_i \in \Gamma \cap L_\infty$ si et seulement si la multiplicité d'intersection* (*ou l'indice d'intersection*) *en p_i de L_∞ avec $\{F = 0\}$ est supérieure ou égale à* 2.

(2) *Rappelons que P est de cardinal n. La multiplicité d'intersection de Γ avec $L_\infty \backslash P$ est* $(n-1)$. *De plus, si la direction l est assez générale, Γ est lisse et transverse à L_∞ en ses* $(n-1)$ *points d'intersection avec $L_\infty \backslash P$.*

3. Intersection avec les composantes dicritiques

Le diviseur dicritique, D_{dic}, de Π est la réunion des composantes irréductibles E_i de E sur lesquelles $\tilde{f}$ est non constante i.e. $\tilde{f}(E_i) = \mathbb{C}P^1$. De même, le diviseur dicritique de Π_{tot} noté $D_{\text{dic}}^{\text{tot}}$, est la réunion des composantes irréductibles E_i de E_{tot} sur lesquelles $\tilde{f}_{\text{tot}}$ est non constante i.e. $\tilde{f}_{\text{tot}}(E_i) = \mathbb{C}P^1$.

Notons $\dot{D}_{\text{dic}}$ l'ensemble des points lisses de D_{dic} dans E.

On a obtenu les résultats suivants :

Théorème 2. *La transformée stricte $\widetilde{\Gamma}$ intersecte D_{dic} aux points de ramification de $\tilde{f}$ sur $\dot{D}_{\text{dic}}$.*

Si $p \in \tilde{f}_{\text{tot}}^{-1}(c) \cap D_{\text{dic}}^{\text{tot}}$ on note $F_{c,p}^{\text{red}}$ la réduite de $\tilde{f}_{\text{tot}}^{-1}(c)$ en p. On note T l'ensemble des points p de $D_{\text{dic}}^{\text{tot}}$ tels que $\tilde{f}_{\text{tot}}^{-1}(c)$ soit non réduite en p et sa réduite $F_{c,p}^{\text{red}}$ soit lisse et transverse à $D_{\text{dic}}^{\text{tot}}$ en p.

Théorème 3. *Si on note $\widetilde{\Gamma}_{\text{tot}}$ la transformée stricte de Γ par Π_{tot} nous avons :*
(1) *Si f est à singularités isolées alors $\widetilde{\Gamma}_{\text{tot}} \cap D_{\text{dic}}^{\text{tot}} = \emptyset$.*
(2) *Si f admet des fibres avec des composantes irréductibles multiples alors $\widetilde{\Gamma}_{\text{tot}} \cap D_{\text{dic}}^{\text{tot}} = T$.*

4. Intersection avec les composantes critiques

Le diviseur critique, D_{crit}, de Π est la réunion des composantes irréductibles E_i de E pour lesquelles il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\tilde{f}(E_i) = c$.

Le diviseur critique, $D_{\text{crit}}^{\text{tot}}$, de Π_{tot} est la réunion des composantes irréductibles E_i de E_{tot} pour lesquelles il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\tilde{f}_{\text{tot}}(E_i) = c$.

Il est connu depuis Thom que pour une fonction polynômiale à deux variables il existe un ensemble fini $B \subset \mathbb{C}$ tel que l'application $f : \mathbb{C}^2 \setminus f^{-1}(B) \to \mathbb{C} \setminus B$ soit une fibration localement triviale. On appelle valeurs irrégulières affines les éléments de l'ensemble $B_{\text{aff}} = \{f(x, y) \mid \operatorname{grad} f(x, y) = 0\}$. Il est clair que $B_{\text{aff}} \subset B$. L'exemple de Broughton pour le polynôme $f(x, y) = x(xy + 1)$ montre que l'inclusion peut être stricte.

Définition. On dit que $c \in \mathbb{C}$ est une valeur régulière à l'infini pour f s'il existe $R \in \mathbb{R}$ suffisamment grand et $\eta \in \mathbb{R}_+$ suffisamment petit tels que $f : f^{-1}(D_\eta^2(c)) \cap (\mathbb{C}^2 \setminus B_R^4) \to D_\eta^2(c)$ soit une fibration localement triviale, où $D_\eta^2(c)$ désigne le disque fermé dans $\mathbb{C}$ de rayon η et de centre c, et B_R^4 est la boule ouverte dans $\mathbb{C}^2$ de rayon R et de centre $0_{\mathbb{C}^2}$. Une valeur est irrégulière à l'infini si elle n'est pas régulière à l'infini. On note B_∞ l'ensemble des valeurs irrégulières à l'infini et on a :

Théorème *(Ha–Lê).*

$$B = B_{\text{aff}} \cup B_\infty.$$

Il est montré par ailleurs (voir [4]) que $B_\infty = \{c_j \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe au moins une composante irréductible E_i de E_{tot} telle que $\tilde{f}_{\text{tot}}(E_i) = c_j\} \cup \tilde{f}_{\text{tot}}(T)$. Voir aussi [3].

Ceci implique que $D_{\text{crit}}^{\text{tot}} = \bigsqcup_{c_j \in B_\infty} D_{c_j}^{\text{tot}}$ et $D_{\text{crit}} = \bigsqcup_{c_j \in B_\infty} D_{c_j}$ où $D_{c_j}^{\text{tot}} = \tilde{f}_{\text{tot}}^{-1}(c_j) \cap (\overline{E_{\text{tot}} \setminus D_{\text{dic}}^{\text{tot}}})$ *(resp.* $D_{c_j} = \tilde{f}^{-1}(c_j) \cap (\overline{E \setminus D_{\text{dic}}})$*).*

Définitions. On appelle arbre de résolution de Π_{tot} (respectivement Π) le graphe dual de résolution (voir [2] chap. III) obtenu de la façon suivante : Chaque composante irréductible de E_{tot} (respectivement E) correspond à un sommet et deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les composantes irréductibles correspondantes s'intersectent. On indice par $\#i$ le sommet de l'arbre qui représente E_i et par $\#\infty$ le sommet correspondant à L_∞. On choisit une valeur régulière à l'infini $c \in B \setminus B_\infty$. Un sommet $\#i$ est muni d'autant de flèches de couleur c(j) qu'il y a de points d'intersection entre E_i et $\tilde{f}_{\text{tot}}^{-1}(c_j)$ (resp. $\tilde{f}^{-1}(c_j)$) si $c_j \in B_\infty$ et de même avec une couleur noire pour $c \in B \setminus B_\infty$. La totalité du graphe et des flèches constitue en fait un arbre que l'on appelle arbre de résolution de Π_{tot} (resp. Π) et est noté $\mathrm{A}(\Pi_{\text{tot}})$ (resp. $\mathrm{A}(\Pi)$). Plus généralement, si D est un diviseur connexe son graphe dual est noté $\mathrm{A}(D)$.

On appelle géodésique le chemin le plus court reliant le sommet $\#\infty$ à une flèche dans l'arbre de résolution. Notons G_{tot} (resp. G) la réunion de toutes ces géodésiques de l'arbre de résolution $\mathrm{A}(\Pi_{\text{tot}})$ (resp. $\mathrm{A}(\Pi)$).

Définitions. (1) On appelle branche morte de $\mathrm{A}(\Pi_{\text{tot}})$ (resp. $\mathrm{A}(\Pi)$) n'importe quelle composante connexe du graphe $\mathrm{A}(\Pi_{\text{tot}}) \setminus G_{\text{tot}}$ (resp. $\mathrm{A}(\Pi) \setminus G$).

(2) La valence d'un sommet est le nombre d'arêtes et de flèches qui le rencontrent. On dit qu'un sommet est de rupture si sa valence est strictement supérieure à 2.

(3) La zone de rupture associée à $\#i$ est constituée de la réunion de E_i avec les composantes de E (resp. E_{tot}) représentées par les sommets des branches mortes s'accrochant à $\#i$. Voir également [8].

Concernant l'étude de $D_{\mathrm{crit}} \cap \widetilde{\Gamma}$ et $D_{\mathrm{crit}}^{\mathrm{tot}} \cap \widetilde{\Gamma}_{\mathrm{tot}}$ nous obtenons :

Théorème 4. *Chaque composante connexe de D_{crit} rencontre $\widetilde{\Gamma}$.*

Les Théorèmes 1, 2 et 4 impliquent le corollaire suivant :

Corollaire 1. *On a l'assertion suivante :*
Si $n > 1$ alors $\tilde{f}(\widetilde{\Gamma} \cap E) = \{\infty\} \cup B_\infty$ et si $n = 1$ alors $B_\infty \subset \tilde{f}(\widetilde{\Gamma} \cap E) \subset \{\infty\} \cup B_\infty$.

Théorème 5. *La transformée stricte $\widetilde{\Gamma}_{\mathrm{tot}}$ intersecte chaque zone de rupture de $D_{\mathrm{crit}}^{\mathrm{tot}}$.*

Les preuves des Théorèmes 4 et 5 utilisent en particulier les résultats obtenus pour les polaires locales ([7] ou [9]).

5. Intersection avec le diviseur à l'infini

Le diviseur D_∞ est la réunion des composantes irréductibles E_i de E telles que $\tilde{f}(E_i) = \infty$.

Pour obtenir la résolution totale, on n'éclate aucun point de D_∞. Donc dans cette section il suffit de considérer la résolution Π. Pour chaque $p_i \in P$ on considére le diviseur $D_\infty(p_i) = D_\infty \cap \Pi^{-1}(p_i)$. Ainsi $D_\infty = \bigsqcup_{p_i \in P} D_\infty(p_i) \cup L_\infty$.

Théorème 6. *La transformée stricte $\widetilde{\Gamma}$ intersecte chaque zone de rupture de $D_\infty(p_i)$ et ceci pour tout $p_i \in P$.*

Example. Considérons le polynôme $f(x, y) = x(y^2x^5 - x^2y - x^3y + 1)$. Les points à l'infini de f sont $p_1 = (0:1:0)$ et $p_2 = (1:0:0)$. Soit $l(x, y) = x - y$. La polaire affine Γ_{aff} associée à f pour la direction l est la courbe $\{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0\}$. Les points à l'infini de Γ_{aff} sont p_1, p_2 et $p_3 = (-3:1:0)$. Ceci illustre le Théorème 1. Ensuite, pour avoir la résolution intermédiaire, nous faisons les éclatements aux points p_1 et p_2. On remarque que $\widetilde{\Gamma}$ intersecte D_∞ en la composante irréductible correspondant à l'unique sommet de rupture incombant à $D_\infty(p_2)$. Compte tenu de la remarque de la Section IV, on aura le même résultat pour $\widetilde{\Gamma}_{\mathrm{tot}}$.

La restriction de $\tilde{f}$ à D_{dic} possède un seul point de ramification p sur le dicritique issu d'éclatements en p_1. Alors, $\widetilde{\Gamma}$ intersecte D_{dic} en p conformément au Théorème 2. D'autre part, D_{crit} a une seule composante connexe D_0 et $\mathrm{A}(D_0)$ est un bambou. On vérifie que $\widetilde{\Gamma}$ intersecte D_0 et on constate que $B_\infty = \{0, -\frac{1}{4}\}$. Ceci illustre le Corollaire 1.

Lorsqu'on effectue la résolution totale, $\widetilde{\Gamma}_{\mathrm{tot}}$ n'intersecte plus D_{dic} (voir Théorème 3), mais intersecte les composantes critiques D_0^{tot} et $D_{-1/4}^{\mathrm{tot}}$ qui ont chacune un seul sommet de rupture.

Références

[1] E.A. Bartolo, P. Cassou-Noguès, H. Maugendre, Quotients jacobiens d'applications polynômiales, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 2 (2003) 399–428.

[2] E. Brieskorn, H. Knörer, Plane Algebraic Curves, Birkhäuser, 1986.

[3] E. Cassas-Alvero, R. Peraire, A bound for the number of critical values at infinity, J. Pure Appl. Algebra 149 (1999) 35–47.

[4] A. Durfee, Five definitions of critical point at infinity, in: Progr. Math., vol. 162, Birkhäuser, Basel, 1998, pp. 345–360.

[5] D. Ivanovski, Résolution à l'infini et courbes polaires affines, thèse de l'Université Paul Sabatier à Toulouse sous la direction de Françoise Michel, 2006.

[6] D.-T. Lê, Topological use of polar curves, in: Algebraic Geometry, Arcata 1974, in: Proc. Sympos. Pure Math., vol. 29, Amer. Math. Soc., 1975, pp. 507–512.

[7] D.-T. Lê, F. Michel, C. Weber, Sur le comportement des courbes polaires associées aux germes de courbes planes, Compositio Math. 72 (1986) 87–113.

[8] D.-T. Lê, C. Weber, A geometrical approach to the Jacobian conjecture, Kodai Math. J. 17 (1994) 374–381.

[9] H. Maugendre, Discriminant d'un germe $(g, f) : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ et quotients de contact dans la résolution de fg, Ann. Fac. Sci. Toulouse VII (3) (1998) 398–525.

[10] B. Teissier, Introduction to equisingularity problems, in: Algebraic Geometry, Arcata 1974, in: Proc. Sympos. Pure Math., vol. 29, Amer. Math. Soc., 1975, pp. 596–632.