

Analyse mathématique

Idéaux fermés de certaines algèbres de fonctions analytiques

Brahim Bouya

Département de mathématiques, université Mohamed V, BP 1014, Rabat, Maroc

Reçu le 29 mai 2006 ; accepté le 1^{er} juin 2006

Disponible sur Internet le 18 juillet 2006

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Nous donnons une caractérisation complète des idéaux fermés de l'algèbre $\mathcal{D} \cap \text{lip}_\alpha$, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, où \mathcal{D} est l'espace de Dirichlet et lip_α est l'algèbre de fonctions analytiques vérifiant la condition de Lipschitz d'ordre α . *Pour citer cet article : B. Bouya, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Closed ideals in some algebras of analytic functions. We obtain a complete description of closed ideals of the algebra $\mathcal{D} \cap \text{lip}_\alpha$, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, where \mathcal{D} is the Dirichlet space and lip_α is the algebra of analytic functions satisfying the Lipschitz condition of order α . *To cite this article: B. Bouya, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Soit \mathcal{D} l'espace de Dirichlet des fonctions holomorphes f sur le disque unité \mathbb{D} tel que l'intégrale de Dirichlet de f

$$D(f) := \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z) < +\infty$$

est finie, où $dA(z) = \frac{1}{\pi} r dr dt$ est la mesure planaire normalisé sur \mathbb{D} . L'espace de Dirichlet muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt + D(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n) |\hat{f}(n)|^2,$$

est un espace de Banach. Pour $0 < \alpha \leq 1$, lip_α est l'algèbre de Banach des fonctions analytiques sur \mathbb{D} , continues sur $\overline{\mathbb{D}}$ et vérifiant la condition de Lipschitz d'ordre α sur \mathbb{D} :

$$|f'(z)| = o((1-|z|)^{\alpha-1}) \quad (|z| \rightarrow 1^-).$$

La norme dans lip_α est définie par

$$\|f\|_\alpha := \|f\|_\infty + \sup\{(1-|z|)^{1-\alpha} |f'(z)| : z \in \mathbb{D}\},$$

Adresse e-mail : b_bouya@yahoo.fr (B. Bouya).

où $\|f\|_\infty := \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|$. Notons que si $1/2 < \alpha \leq 1$, alors $\text{lip}_\alpha \subset \mathcal{D}$. Dans ce qui suit on suppose que $0 < \alpha \leq 1/2$ et on pose $\mathcal{A}_\alpha := \mathcal{D} \cap \text{lip}_\alpha$. Muni du produit usuel et de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} := \|f\|_\alpha + D^{1/2}(f),$$

\mathcal{A}_α est une algèbre de Banach commutative unitaire. Pour tout idéal fermé $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}_\alpha$, on note par

$$E_{\mathcal{I}} := Z_{\mathcal{I}} \cap \mathbb{T},$$

où $Z_{\mathcal{I}} := \bigcap_{f \in \mathcal{I}} Z_f$, avec $Z_f := \{z \in \mathbb{D} : f(z) = 0\}$ est l'ensemble des zéros de f . On désigne par $U_{\mathcal{I}}$ le plus grand commun diviseur des fonctions intérieures non identiquement nulle de \mathcal{I} , [4].

On note par $d(\zeta, E)$ la distance du point $\zeta \in \mathbb{T}$ à l'ensemble $E \subset \mathbb{T}$. Puisque $\mathcal{A}_\alpha \subset \text{lip}_\alpha$, pour tout $f \in \mathcal{A}_\alpha \setminus \{0\}$, l'ensemble $E_f := Z_f \cap \mathbb{T}$ satisfait la condition de Carleson

$$\int_{\mathbb{T}} \log \frac{1}{d(\zeta, E_f)} |d\zeta| < +\infty.$$

Dans ce travail, on s'intéresse à la caractérisation des idéaux fermés de \mathcal{A}_α (Théorème 1). Nous montrons que tout idéal \mathcal{I} de \mathcal{A}_α est complètement caractérisé par son facteur intérieur $U_{\mathcal{I}}$ et son ensemble des zéros sur le cercle unité $E_{\mathcal{I}}$.

Pour tout ensemble fermé E de \mathbb{T} on note

$$\mathcal{J}(E) := \{f \in \mathcal{A}_\alpha : f|_E = 0\}$$

Théorème 1. *Soit \mathcal{I} un idéal fermé de \mathcal{A}_α , alors*

$$\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{J}(E_{\mathcal{I}}) : f/U_{\mathcal{I}} \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})\},$$

où $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ est l'algèbre des fonctions holomorphes et bornées sur \mathbb{D} .

Notons que \mathcal{A}_α admet la propriété de factorisation (la F-propriété) : Soit $f \in \mathcal{A}_\alpha$ et soit U une fonction intérieure telle que $f/U \in \mathcal{H}^\infty$, alors $f/U \in \mathcal{A}_\alpha$ et $\|f/U\|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq c\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha}$, où c est une constante absolue. En effet la F-propriété de \mathcal{A}_α résulte de [1] et de [8].

Korenblum dans [5] a donné une description complète des idéaux fermés de l'algèbre H_1^2 ; des fonctions analytiques f telles que $f' \in H^2$, où H^2 est l'espace de Hardy usuel. De telle caractérisation d'idéaux fermés ont été ensuite obtenues par Matheson pour l'algèbre lip_α [6] et par Shamoyan pour l'algèbre $\lambda_\omega^{(n)}$ des fonctions analytiques f sur \mathbb{D} telles que $|f^{(n)}(\zeta_1) - f^{(n)}(\zeta_2)| = o(\omega(|\zeta_1 - \zeta_2|))$, $|\zeta_1 - \zeta_2| \rightarrow 0$, où n est un entier naturel supérieur de 1 et ω est un module de continuité [7]. Notons aussi que Shirokov a donné une caractérisation complète des idéaux fermés d'une large classe d'algèbres de Banach de type Besov, en particulier pour les algèbres $\mathcal{AB}_{2,2}^s := \{f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}) : \sum_{n \geq 0} |\hat{f}(n)|^2 (1+n)^{2s} < \infty\}$, avec $s > 1/2$. Pour $s > 1/2$ on a $\mathcal{AB}_{2,2}^s \subset A(\mathbb{D})$. En ce qui concerne l'algèbre $\mathcal{D} \cap A(\mathbb{D})$ (comme cas limite $s = 1/2$), la description des idéaux fermés paraît compliqué [2,3].

Le lemme suivant s'obtient grâce à la méthode de Beurling–Carleman–Domar. Il permet de ramener le problème de caractérisation des idéaux fermés de \mathcal{A}_α à un problème d'approximation (Théorème 3).

Lemme 2. *Soit \mathcal{I} un idéal fermé de \mathcal{A}_α et soit $f \in \mathcal{J}(E_{\mathcal{I}})$ telle que $U_{\mathcal{I}}$ divise f . S'il existe $g \in A(\mathbb{D})$ telle que $fg \in \mathcal{A}_\alpha$ et telle que $|g(\xi)| \leq cd^3(\zeta, E_f)$, $\zeta \in \mathbb{T}$. Alors $fg \in \mathcal{I}$.*

Le Théorème 3 ci-dessous montre, en particulier, que toute fonction f de $\mathcal{A}_\alpha \setminus \{0\}$ peut être approcher dans \mathcal{A}_α par une suite de fonctions tendant vite vers 0 quand-on s'approche de E_f .

Théorème 3. *Soit $f \in \mathcal{A}_\alpha \setminus \{0\}$ et soit $M > 0$. Il existe une suite de fonction $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset A(\mathbb{D})$ telle que*

(1) *Pour tout entier $n \geq 1$ $f_n = fg_n \in \mathcal{A}_\alpha$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{A}_\alpha} = 0$.*

(2) *$|g_n(\xi)| \leq c_n d^M(\zeta, E_f)$ ($\zeta \in \mathbb{T}$),*

où c_n est une constante qui dépend uniquement de n .

Pour montrer ce théorème nous utilisons un raffinement de la technique d’approximation de Korenblum [5], (voir aussi [6,7]). Soit $f \in \mathcal{A}_\alpha \setminus \{0\}$ et soit $\mathbb{T} \setminus E_f = \bigcup_n \gamma_n$. On note par Γ une union quelconque d’arcs disjoints γ_n . Pour toute fonction extérieure $f \in \mathcal{A}_\alpha$, on pose

$$f_\Gamma(z) := \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |f(e^{i\theta})| d\theta \right\}.$$

La difficulté du Théorème 3 réside dans la preuve du résultat suivant :

Lemme 4. Soit $f \in \mathcal{A}_\alpha \setminus \{0\}$ une fonction extérieure telle que $\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq 1$. Pour tout $N \geq 1$ et pour tout $\rho > 1$, $f^\rho f_\Gamma^N \in \mathcal{A}_\alpha$ et

$$\sup_\Gamma \|f^\rho f_\Gamma^N\|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq c_{N,\rho}, \tag{0.1}$$

où $c_{N,\rho}$ est une constante qui dépend seulement de N et de ρ .

Notons que $\|f^\rho f_\Gamma^N\|_{\mathcal{A}_\alpha} := \|f^\rho f_\Gamma^N\|_\alpha + D^{1/2}(f^\rho f_\Gamma^N)$. D’après Matheson [6] on a $\sup_\Gamma \|f^\rho f_\Gamma^N\|_\alpha \leq c_{N,\rho}$. Sachant que $(f^\rho f_\Gamma^N)' = \rho f^{\rho-1} f' f_\Gamma^N + N f^\rho f_\Gamma^{N-1} f'_\Gamma$, il est clair que pour montrer (0.1), il suffit de montrer que $\sup_\Gamma \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^{2\rho} |f'_\Gamma(z)|^2 dA(z) \leq c_\rho$, où c_ρ est une constante qui dépend uniquement de ρ .

Lemme 5. Soit $f \in \mathcal{A}_\alpha \setminus \{0\}$ une fonction extérieure telle que $\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq 1$ et soit $\gamma = (a, b) \subset \mathbb{T} \setminus E_f$ un arc tel que $f(a) = f(b) = 0$. On a

$$\int_{\Delta_\gamma} |f(z)|^{2\rho} |f'_\Gamma(z)|^2 dA(z) \leq c_\rho \|f'\|_{L^2(\Delta_\gamma)}^2 + cA(\Delta_\gamma),$$

où c_ρ est une constante qui dépend uniquement de ρ et c est une constante absolue. $A(\Delta_\gamma)$ étant la mesure d’aire de $\Delta_\gamma := \{z \in \mathbb{D} : z/|z| \in \gamma\}$ et $\|f'\|_{L^2(\Delta_\gamma)}^2 := \int_{\Delta_\gamma} |f'(z)|^2 dA(z)$.

Pour montrer ce lemme nous partageons la région Δ_γ en quatre parties :

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma^1 &:= \{z \in \Delta_\gamma : d(z) < 2(1 - |z|)\}, \\ \Delta_\gamma^{21} &:= \left\{ z \in \Delta_\gamma : d(z) \geq 2(1 - |z|) \text{ et } a_\gamma(z) \leq 8 \frac{|\log(d(z))|}{d(z)} \right\}, \\ \Delta_\gamma^{22} &:= \left\{ z \in \Delta_\gamma : d(z) \geq 2(1 - |z|) \text{ et } 8 \frac{|\log(d(z))|}{d(z)} < a_\gamma(z) < 8 \frac{|\log(d(z))|}{1 - |z|} \right\}, \\ \Delta_\gamma^{23} &:= \left\{ z \in \Delta_\gamma : d(z) \geq 2(1 - |z|) \text{ et } 8 \frac{|\log(d(z))|}{1 - |z|} \leq a_\gamma(z) \right\}, \end{aligned}$$

où $d(z) := \min\{|z - a|, |z - b|\}$ et

$$a_\gamma(z) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{-\log |f(e^{i\theta})|}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta & \text{si } \gamma \notin \Gamma, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T} \setminus \Gamma} \frac{-\log |f(e^{i\theta})|}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta & \text{si } \gamma \in \Gamma. \end{cases}$$

On obtient le Lemme 5 grâce au lemme suivant :

Lemme 6. Soit $f \in \mathcal{A}_\alpha \setminus \{0\}$ une fonction extérieure telle que $\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq 1$ et soit $\gamma = (a, b) \subset \mathbb{T} \setminus E_f$ un arc tel que $f(a) = f(b) = 0$. On a les estimations suivantes

- (1) $\int_{\Delta_\gamma^1} |f(z)|^{2\rho} |f'_\Gamma(z)|^2 dA(z) \leq c_\rho \|f'\|_{L^2(\Delta_\gamma)}^2,$
- (2) $\int_{\Delta_\gamma^{21}} |f(z)|^{2\rho} a_\gamma^2(z) dA(z) \leq c_\rho \|f'\|_{L^2(\Delta_\gamma)}^2,$
- (3) $\int_{\Delta_\gamma^{22} \cup \Delta_\gamma^{23}} |f(z)|^{2\rho} a_\gamma^2(z) dA(z) \leq c_\rho \|f'\|_{L^2(\Delta_\gamma)}^2 + cA(\Delta_\gamma),$

où c_ρ est une constante qui dépend uniquement de ρ et c est une constante absolue.

Remerciements

Je tiens à remercier les professeurs A. Borichev, O. El-Fallah et K. Kellay pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Références

- [1] L. Carleson, A representation formula in the Dirichlet space, *Math. Z.* 73 (1960) 190–196.
- [2] O. El-Fallah, K. Kellay, T. Ransford, Cyclicity in the Dirichlet space, *Ark. Mat.*, in press.
- [3] H. Hedenmalm, A. Shields, Invariant subspaces in Banach spaces of analytic functions, *Michigan Math. J.* 37 (1990) 91–104.
- [4] K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Dover Publications Inc., New York, 1988. Reprint of the 1962 original.
- [5] B.I. Korenblum, Invariant subspaces of the shift operator in a weighted Hilbert space, *Mat. Sb.* 89 (131) (1972) 110–138.
- [6] A. Matheson, Approximation of analytic functions satisfying a Lipschitz condition, *Michigan Math. J.* 25 (3) (1978) 289–298.
- [7] F.A. Shamoyan, Closed ideals in algebras of functions that are analytic in the disk and smooth up to its boundary, *Mat. Sb.* 79 (2) (1994) 425–445.
- [8] N.A. Shirokov, *Analytic Functions Smooth up to the Boundary*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1312, Springer-Verlag, Berlin, 1988.