Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 87–90
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique

Fonctions holomorphes définies positives sur les domaines tubes

Jean-Jacques Loeb [a], El Hassan Youssfi [b]

[a] *Département de mathématiques et informatique, université d'Angers, 2, boulevard Lavoisier, 49045 Angers cedex 01, France*
[b] *LATP, centre de mathématiques et informatique, 39, rue Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, France*

Reçu le 11 avril 2006 ; accepté après révision le 1er juin 2006

Disponible sur Internet le 27 juin 2006

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Dans cette Note, on établit un lien fort entre les domaines tubes à base convexe dans $\mathbb{C}^n$ et les fonctions holomorphes définies positives. On donne une caractérisation de la convexité au moyen de la transformée de Laplace. ***Pour citer cet article : J.-J. Loeb, E.H. Youssfi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Abstract

Positive definite holomorphic functions on tube domains. In this Note, we establish a strong relationship between tube domains in $\mathbb{C}^n$ with convex base and positive definite holomorphic functions. We also give a Laplace transform characterization of convexity. ***To cite this article: J.-J. Loeb, E.H. Youssfi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Abridged English version

Let $\Omega = \mathrm{i}D + \mathbb{R}^n$ be a tube domain in $\mathbb{C}^n$ where D is a domain in $\mathbb{R}^n$. It is well known [3] that Ω is a domain of holomorphy if and only if D is convex. Our main goal herein is to investigate a natural class of holomorphic functions for which a tube domain of holomorphy Ω is a domain of existence; that is, there is an element of this class which does not extend near any boundary point of Ω.

A holomorphic function $f : \Omega \to \mathbb{C}$ is said to be positive definite if for each $b \in D$, the function $f(\mathrm{i}b + \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ is positive definite; that is,

$$\sum_{j,k} c_j \overline{c_k} f(\mathrm{i}b + x_j - x_k) \geqslant 0$$

for all finite sequences (c_j) in $\mathbb{C}$ and (x_j) in $\mathbb{R}^n$. It was shown in [1] that such functions extend holomorphically to the tube domain $\mathrm{i}\widehat{D} + \mathbb{R}^n$, where $\widehat{D}$ is the convex hull of D. For further properties of these functions see [1] and [5].

In this Note we shall establish the following:

Adresses e-mail : jean-jacques.Loeb@univ-angers.fr (J.-J. Loeb), youssfi@gyptis.univ-mrs.fr (E.H. Youssfi).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.06.004

Theorem 1. *Let $\Omega = \mathrm{i}D + \mathbb{R}^n$ be a tube domain in $\mathbb{C}^n$ where D is a convex domain in $\mathbb{R}^n$. Then there is a positive definite holomorphic function $f : \Omega \to \mathbb{C}$ which does not extend holomorphically near any boundary point of Ω.*

We recall that if μ is a non-negative Radon measure μ on $\mathbb{R}^n$ then its Laplace transform $L\mu$ is defined by

$$(L\mu)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\langle x,y\rangle}\,\mathrm{d}\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

It is clear that the set

$$D_\mu := \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ (L\mu)(x) < +\infty\}$$

is a convex subset of $\mathbb{R}^n$. In particular, if the interior $\mathrm{Int}(D_\mu)$ of D_μ is non-empty, then it is a convex domain in $\mathbb{R}^n$. We shall show that the converse holds also and, even more, we have the following Laplace transform characterization of convexity.

Theorem 2. *An open set D in $\mathbb{R}^n$ is convex if and only if $D = \mathrm{Int}(\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ (L\mu)(x) < +\infty\})$, where μ is a non-negative Radon measure on $\mathbb{R}^n$.*

Moreover, the function $f(z) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\langle z,y\rangle}\,\mathrm{d}\mu(y)$ is well defined and holomorphic on the tube domain $D + \mathrm{i}\mathbb{R}^n$ and its restriction to D is $L\mu$.

1. Introduction et énoncé des résultats

Soit $\Omega = \mathrm{i}D + \mathbb{R}^n$ un domaine tube dans $\mathbb{C}^n$ où la base D est un domaine de $\mathbb{R}^n$. Il est bien connu que Ω est d'holomorphie si et seulement si D est convexe [3]. Notre but principal est l'investigation d'une classe naturelle de fonctions holomorphes pour laquelle un domaine tube Ω est d'existence en ce sens qu'il existe une fonction appartenant à cette classe qui ne s'étend holomorphiquement à aucun voisinage d'un point quelconque du bord de Ω.

Une fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite définie positive si pour tout point $b \in D$, la fonction $f(\mathrm{i}b + \cdot)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ définie positive ; c'est à dire,

$$\sum_{j,k} c_j \overline{c_k} f(\mathrm{i}b + x_j - x_k) \geqslant 0$$

pour toutes les suites finies (c_j) dans $\mathbb{C}$ et (x_j) dans $\mathbb{R}^n$. D'après [1] ces fonctions s' etendent holomorphiquement au domaine $\mathrm{i}\widehat{D} + \mathbb{R}^n$, où $\widehat{D}$ est l'enveloppe convexe de D. Pour plus de renseignements sur ces fonctions consulter [1] et [5].

Dans la présente note nous allons établir le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit $\Omega = \mathrm{i}D + \mathbb{R}^n$ un domaine tube dans $\mathbb{C}^n$ où D est un domaine convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une fonction holomorphe définie positive $f : \Omega \to \mathbb{C}$ qui ne s'étend holomorphiquement à aucun voisinage d'un point du bord de Ω.*

On rappelle que la transformée de Laplace d'une mesure de Radon positive μ sur $\mathbb{R}^n$ est définie par :

$$(L\mu)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\langle x,y\rangle}\,\mathrm{d}\mu(y), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Il est clair que l'ensemble

$$D_\mu := \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ (L\mu)(x) < +\infty\}$$

est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. In particulier, si l'interieur $\mathrm{Int}(D_\mu)$ de D_μ est non vide, alors c'est un domaine convexe dans $\mathbb{R}^n$. Nous allons établir le théorème suivant donnant en particulier une réciproque à ce fait.

Théorème 2. *Soit D un ouvert concexe de $\mathbb{R}^n$. Il existe une mesure de Radon positive μ tellle que $D = D_\mu$.*

De plus la fonction $f(z) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\langle z, y\rangle}\, \mathrm{d}\mu(y)$ est bien définie et holomorphe dans le domaine tube $D + \mathrm{i}\mathbb{R}^n$ et sa restriction à D est L_μ.

2. Démonstrations

Considérons une suite $(b_k)_{k\geqslant 1}$ de points de la frontière ∂D de D. Comme D est convexe it suit du Théorème 2.1.10 de [4] qu'il existe une suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ de vecteurs unitaires appartenant à $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\langle y - b_k, v_k\rangle > 0 \quad \text{for all } y \in D \text{ and } k \geqslant 1. \tag{1}$$

Lemme 2.1. *Supposons que la suite $(b_k)_{k\geqslant 1}$ de points de ∂D et la suite $(v_k)_{k\geqslant}$ de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ vérifient* (1). *Alors, pour tout $\eta \in D$ et toute suite $(a_k)_{k\geqslant 1}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, la série*

$$f(z) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \frac{\langle \eta - b_k, v_k\rangle}{\langle z - (a_k + \mathrm{i}b_k), v_k\rangle}$$

converge uniformément sur les compacts de Ω.

Preuve. Four tout entier $j \geqslant 1$ et tout $z = a + \mathrm{i}b \in \Omega$, posons

$$\begin{aligned} h_j(z) :&= -\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k^2} \frac{\langle \eta - b_k, v_k\rangle}{\langle z - (a_k + \mathrm{i}b_k), v_k\rangle}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k^2} \frac{\langle \eta - b_k, v_k\rangle\langle y - b_k, v_k\rangle}{|\langle z - (a_k + \mathrm{i}b_k), v_k\rangle|^2}. \end{aligned}$$

Il est clair que $(h_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite de fonctions harmoniques positives sur Ω. Comme la limite $\lim_{j\to\infty} h_j(\mathrm{i}\eta) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ est finie, le principe de Harnack [2] implique que la série

$$h(z) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \frac{\langle \eta - b_k, v_k\rangle\langle y - b_k, v_k\rangle}{|\langle z - (a_k + \mathrm{i}b_k), v_k\rangle|^2}$$

converge uniformément sur les compacts de Ω et sa somme h est une fonction harmonique dans Ω. D'autre part, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \frac{\langle \eta - b_k, v_k\rangle}{|\langle z - (a_k + \mathrm{i}b_k), v_k\rangle|} \leqslant h(\mathrm{i}y), \quad \text{pour tout } z = x + \mathrm{i}y \in \Omega,$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

Lemme 2.2. *Supposons que la suite $(b_k)_{k\geqslant 1}$ de points de ∂D et la suite $(v_k)_{k\geqslant}$ de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ vérifient* (1). *Alors, pour tout $\eta \in D$ et toute suite $(a_k)_{k\geqslant 1}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, la fonction*

$$\varphi(z) := \mathrm{i}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \langle \eta - b_k, v_k\rangle \sum_{j=-1}^{+1} \frac{2 - |j|}{\langle z - (ja_k + \mathrm{i}b_k), v_k\rangle}$$

est holomorphe et définie positive sur Ω.

Preuve. La fonction φ is bien définie et holomorphe dans Ω grâce au Lemme 2.1. Pour voir qu'elle est définie positive on observe que φ peut être écrite sous la forme

$$\varphi(z) := 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \langle \eta - b_k, v_k\rangle \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t\langle \mathrm{i}z + b_k, v_k\rangle}\big(1 + \cos(ta_k)\big)\, \mathrm{d}t$$

pour tout $z \in \Omega$. □

Lemme 2.3. *Supposoons que φ est comme dans le Lemme 2.2. Alors φ ne se prolonge continuement à aucun voisinage d'un point frontière $z_{k_0} = a_{k_0} + \mathrm{i}b_{k_0} \in \partial\Omega$.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde et prenons une suite $(y^\nu)_{\nu\geqslant 1}$ de points de D qui converge vers b_{k_0}. Pour tout entier ν posons $x^\nu := a_{k_0} + y^\nu - b_{k_0}$ et $z^\nu := x^\nu + \mathrm{i}y^\nu$. Remarquons par (1) que pour tout $z = x + \mathrm{i}y \in \Omega$ on a $\langle y - b_k, v_k\rangle > 0$. Par conséquent, pour tout $k \geqslant 1$ et $j \in \{-1, 0, 1\}$, on a

$$-\operatorname{Im}\left[\frac{2-|j|}{\langle z-(ja_k+\mathrm{i}b_k), v_k\rangle}\right] = \frac{(2-|j|)\langle y-b_k, v_k\rangle}{|\langle z-(ja_k+\mathrm{i}b_k), v_k\rangle|^2} > 0.$$

Il suit de là que,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\bigl(\varphi(z^\nu)\bigr) &\geqslant -\frac{2}{k_0^2}\langle \eta - b_{k_0}, v_{k_0}\rangle \operatorname{Im}\left[\frac{1}{\langle z^\nu - (ja_{k_0}+\mathrm{i}b_{k_0}), v_{k_0}\rangle}\right]\\ &= \frac{1}{k_0^2}\frac{\langle \eta - b_{k_0}, v_{k_0}\rangle}{\langle y^\nu - b_{k_0}, v_{k_0}\rangle}\end{aligned}$$

ce qui montre que $\lim_{\nu\to+\infty} \operatorname{Re}(\varphi(z^\nu)) = +\infty$. □

Preuve du Théorème 1. Prenons une suite de vecteurs $\xi_k = a_k + \mathrm{i}b_k$, $k \in \mathbb{N}$, qui est dense dans $\partial\Omega$. Choisissons $\eta \in D$ et une suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ vérifiant (1) et considérons la fonction φ définie par le Lemme 2.2. Par le Lemme 2.2 φ est holomorphe et définie positive sur Ω. Par le Lemme 2.3 on voit que φ ne se prolonge continûment au voisinage d'aucun point de $\partial\Omega$. □

Preuve du Théorème 2. Supposons que D est un domaine convexe dans $\mathbb{R}^n$ et consdérons le domaine tube $\Omega := \mathrm{i}D + \mathbb{R}^n$. Choisissons une suite $(b_k)_{k\geqslant 1}$ dense dans ∂D et une suite $(a_k)_{k\in\geqslant 1}$ dense dans $\mathbb{R}^n$. La suite $\xi_k = a_k + \mathrm{i}b_k$, $k \geqslant 1$, est alors dense dans $\partial\Omega$. Fixons un vecteur $\eta \in D$ et une suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie (1). Considérons la fonction φ de la preuve du Theorème 1 correspondant au domaine tube $\Omega = \mathrm{i}D + \mathbb{R}^n$. Alors φ est une fonction holomorphe et définie sur Ω qui ne s'étend holomorphiquement à aucun voisinage d'un point de ∂D. De plus, par un résultat de [1] φ admet une représentation intégrale sous la forme

$$\varphi(z) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\langle z, y\rangle}\,\mathrm{d}\mu(y), \quad z \in \Omega,$$

où μ est une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^n$. Il est facile de vérifier que cette mesure μ possède les propriétés désirées. La réciproque est facile à vérifier. □

Références

[1] P. Graczyk, J.J. Loeb, Bochner and Schoenberg theorems on symmetric spaces in the complex case, Bull. Soc. Math. France 122 (4) (1994) 571–590.
[2] L. Helms, Introduction to Potential Theory, Robert E. Kreiger Publ. Co., Huntington, NY, 1975.
[3] L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, North-Holland, Amsterdam, 1973.
[4] L. Hörmander, Notions of Convexity, Birkhäuser, Boston, 1994.
[5] E.H. Youssfi, Harmonic analysis on conelike bodies and holomorphic functions on tube domains, J. Funct. Anal. 155 (1998) 381–435.