

Problèmes mathématiques de la mécanique

Stabilité de solutions faibles globales pour les équations de Navier–Stokes compressible avec température

Didier Bresch^a, Benoît Desjardins^{b,c}

^a LMC-IMAG UMR5223, 51, rue des mathématiques, B.P. 53, 38041 Grenoble, France

^b CEA/DIF, B.P. 12, 91680 Bruyères le Châtel, France

^c DMA E.N.S. Ulm, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France

Reçu le 1^{er} décembre 2005 ; accepté après révision le 15 mai 2006

Présenté par Gérard Iooss

Résumé

Nous présentons un résultat de stabilité globale en temps de suites de solutions faibles «à la Leray» des équations de Navier–Stokes compressibles modélisant un fluide visqueux conducteur de chaleur dans le cas de l'espace entier \mathbf{R}^3 (ou dans un domaine $\mathbf{T}^3 = [0, 2\pi]^3$ avec conditions aux limites périodiques) pour des données initiales arbitrairement grandes. Des hypothèses sont faites sur la dépendance en densité et température de la conductivité thermique κ et des coefficients de viscosité λ et μ , qui assurent des propriétés importantes de conservation déjà mises en évidence par les auteurs. L'équation d'état est supposée celle d'un gaz parfait polytropique, à laquelle on ajoute une composante de pression et d'énergie interne à température nulle, qui ne joue un rôle que pour les faibles densités. Notre résultat complète celui de P.-L. Lions, restreint aux écoulements barotropes. *Pour citer cet article : D. Bresch, B. Desjardins, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Stability of global weak solutions for the Navier–Stokes equations modelling compressible and heat conducting fluids. We present a global in time stability result for sequences of weak solutions 'à la Leray' to the Navier–Stokes equations modelling viscous compressible heat conducting fluids in the whole space \mathbf{R}^3 (or in the box $\mathbf{T}^3 = [0, 2\pi]^3$ with periodic boundary conditions) with arbitrary large initial data. Specific assumptions are made on the density and temperature dependence of the thermal conduction κ and the viscosity coefficients λ and μ in order to preserve a particular conservation property discovered by the authors. The underlying mathematical structure is the key ingredient to get additional information on the density which allows to define weak solutions and get strong compactness results needed on the temperature. The equation of state is assumed to be the perfect polytropic gas law with an additional zero isothermal component that plays a role only for small density. Our result extends the work of P.-L. Lions restricted to barotropic flows obtained in 1993. Note that approximate solutions construction process, i.e. sequences of suitable smooth approximate solutions, is explained elsewhere. *To cite this article: D. Bresch, B. Desjardins, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Since P.-L. Lions' pioneering work on barotropic compressible Navier–Stokes equations with constant viscosity coefficients [9,10], such barotropic fluid mechanics models have been extensively studied from a mathematical viewpoint. Considerably less is known for the full compressible Navier–Stokes equations, that means the full modelling heat conducting fluids with general equation of state (except for some results in one space dimension, on local in time solutions for large data or global solutions for small data). We want to show in this note (see [3] for details) that the analogue of Leray's theory (for incompressible flows), see [5], or P.-L. Lions' theory (for compressible barotropic Navier–Stokes equations) may be developed for the full heat conducting compressible Navier–Stokes equations under some compatibility conditions between the viscosities λ and μ and for suitable conductivity coefficients κ . Our result may be seen as a first partial answer to the currently widely open problem of global existence for the full Navier–Stokes equations described for instance in P.-L. Lions' book [10].

A compressible and heat conducting fluid governed by the compressible Navier–Stokes equations satisfies the following system in $\mathbf{R}_+ \times \Omega$ ($\Omega = \mathbf{R}^3$ or \mathbf{T}^3)

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \operatorname{div} \sigma + \rho f, \quad (2)$$

$$\partial_t(\rho E) + \operatorname{div}(\rho u H) = \operatorname{div}((\sigma + p\mathbf{I}) \cdot u) + \operatorname{div}(\kappa \nabla \theta) + \rho f \cdot u, \quad (3)$$

$$E = e + \frac{|u|^2}{2}, \quad H = h + \frac{|u|^2}{2}, \quad h = e + \frac{p}{\rho},$$

where $u \in \mathbf{R}^3$ denotes the velocity field of the fluid, ρ the density, κ the thermal conductivity coefficient, σ the stress tensor, p the pressure field, e the specific internal energy and h the specific enthalpy. The specific total energy is denoted E and the associated specific enthalpy H . Finally, bulk forces are represented by a given three component vector field f . Eqs. (1), (2) and (3) respectively express the conservation of mass, momentum and total energy. Remark that a dissipative equation may be written on the specific internal energy e using the momentum equation on u . In order to close the system, two additional ingredients are necessary. First, the fluid is assumed to be Newtonian, so that there exists two viscosity coefficients μ and λ such that

$$\sigma = 2\mu D(u) + (\lambda \operatorname{div} u - p)\mathbf{I}, \quad (4)$$

where $D(u)$ denotes the strain rate, given as the symmetric part of the velocity gradient ∇u . As a second condition, a thermodynamic closure law provides the pressure p and the internal energy e as functions of the density ρ and the temperature θ . For the sake of simplicity here, we consider equations of state close to perfect polytropic gas $p = r\rho\theta$ and $e = C_v\theta$, where r and C_v are positive constants. As we shall see, a cold pressure and internal energy at zero temperature have to be added close to vacuum in order to conclude.

System (1), (2), (3) is also supplemented with initial conditions

$$\rho|_{t=0} = \rho_0, \quad \rho u|_{t=0} = m_0, \quad \rho E|_{t=0} = G_0. \quad (5)$$

The functions ρ_0 and m_0 are assumed to satisfy

$$\rho_0 \geq 0, \quad \text{and} \quad \frac{|m_0|^2}{\rho_0} = 0 \quad \text{on} \quad \{x \in \Omega \mid \rho_0(x) = 0\}, \quad (6)$$

and G_0 has to be taken in such a way that

$$G_0 - \frac{|m_0|^2}{2\rho_0} \geq 0, \quad \text{a.e. in } \Omega. \quad (7)$$

In most practical and industrial applications, the viscosity coefficients μ and λ , as well as the thermal conductivity coefficient κ are given functions of the density and temperature (the so-called Sutherland law is a popular example). The question of global well posedness of the above system is one of the main challenges since the end of the last century. Only partial results are currently available, see [7,6]. In this remarkable paper, existence of 'variational solutions' is obtained for specific pressure laws given by $p(\rho, \theta) = p_c(\rho) + \theta p_\theta(\rho)$ with suitable behavior at infinity for p_c and restrictions on p_θ , which has to grow suitably slower than the 'zero temperature' pressure p_c . Note that the

perfect gas pressure law does not satisfy the conditions assumed by the authors, even in the large density limit. As a matter of fact, the method used in [7,6] strongly uses the dominant role of the first, barotropic, pressure term p_c , even for density far from vacuum, to obtain such an existence result. This restrictive assumption prevents from covering equations of state commonly used in realistic applications. Moreover, in [6], the temperature equation is satisfied only as an inequality (which justifies the notion of ‘variational weak solutions’ or ‘variational solutions’) which seems to be quite not satisfactory from a physical viewpoint, even though it preserves the second principle of Thermodynamics. As a matter of fact, the compactness on the temperature does not seem to be sufficient to pass to the limit in the energy equality.

In our result, standard weak solutions ‘à la Leray’ could be obtained but temperature depending viscosities cannot be handled unlike the recent paper [6]. Indeed in our proof, the viscosity coefficients λ and μ are assumed to be respectively $C^0(\mathbf{R}_+^*)$ and $C^0(\mathbf{R}_+) \cap C^1(\mathbf{R}_+^*)$ functions of the density only, such that the following constraints are satisfied for all positive ρ : there exists positive constants $c_0, c_1, A > 0$ such that, for all $\tau > 0$

$$\lambda(\tau) = 2(\tau\mu'(\tau) - \mu(\tau)), \tag{8}$$

$$\text{for all } \tau < A, \quad \mu(\tau) \geq c_0\tau^n \quad \text{and} \quad d\lambda(\tau) + 2\mu(\tau) \geq c_0\tau^n, \tag{9}$$

$$\text{for all } \tau \geq A, \quad c_1\tau^m \leq \mu(\tau) \leq \frac{\tau^m}{c_1} \quad \text{and} \quad c_1\tau^m \leq 3\lambda(\tau) + 2\mu(\tau) \leq \frac{\tau^m}{c_1} \tag{10}$$

with $n \in (2/3, 1)$ and $m > 1$. Next, the heat conductivity coefficient κ is assumed to satisfy

$$\kappa(\rho, \theta) = \kappa_0(\rho, \theta)(\rho + 1)(\theta^a + 1), \tag{11}$$

with $a \geq 2$ and κ_0 a $C^0(\mathbf{R}_+^2)$ function such that for all positive ρ

$$c_3 \leq \kappa_0(\rho, \theta) \leq \frac{1}{c_3}, \tag{12}$$

for some positive constant c_3 .

The proof relies upon a careful analysis of the structure of the equations using the relation between λ and μ . Moreover we assume that the equations of state are of ideal polytropic gas type:

$$p = \rho r \theta + p_c(\rho), \quad e = C_v \theta + e_c(\rho), \tag{13}$$

where r and C_v are two positive constant coefficients. Moreover, the additional pressure p_c and internal energy e_c are associated with the ‘zero Kelvin isothermal’. We require that e_c is a C^2 non negative function on \mathbf{R}_+^* such that

$$p_c(\rho) = \rho^2 \frac{de_c}{d\rho}(\rho). \tag{14}$$

We also require that there exists $\rho_* > 0, \tau_* > 0, k > 1, \ell > 1, C_* > 0$ and $C_{**} > 0$ such that for $\rho \in (0, \rho_*)$,

$$\frac{\rho^{-\ell-1}}{C_*} \leq p'_c(\rho) \leq C_* \rho^{-\ell-1}, \quad \frac{\rho^{-\ell-1}}{C_*} \leq e_c(\rho) \leq C_{**} \rho^{-\ell-1}, \quad \text{where } \ell \geq \frac{2n(3m-2)}{m-1} - 1, \tag{15}$$

and for all $\rho > \rho_*$

$$-\frac{1}{\tau_*} \mu'(\rho) \leq p'_c(\rho) \leq C_{**} \rho^{k-1}, \quad 0 \leq e_c(\rho) \leq C_{**} \rho^{k-1}, \quad \text{where } k \leq \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{5(\ell+1) - 6n}{\ell+1-n}. \tag{16}$$

Let us comment on the assumptions on the zero Kelvin isothermal curve: first, the cold component of the pressure and internal energy may vanish away from zero density under assumptions (15) and (16), so that the usual perfect polytropic gas equation of state is recovered away from vacuum.

We are able to get extra estimates on the density: far from vacuum, using the relation between λ and μ , and close to vacuum using the cold pressure and energy assumption. This allows us to get the compactness results for sequences of solutions. We also strongly use the form of the conductivity coefficient with the entropy inequality (24) and an estimate coming from the temperature equation multiplied by $1/(C_v \theta^c)$ with suitable $0 < c < 1$.

1. Introduction

Depuis les travaux fondateurs de P.-L. Lions sur les équations de Navier–Stokes compressible avec coefficients de viscosité constants [9,10], les modèles compressibles barotropes ont été abondamment étudiés. La compréhension des modèles compressibles complets avec équation sur la température est nettement moins avancée mis à part quelques résultats dans le cas de la dimension 1 d’espace, ou dans celui de solutions locales en temps, ou de solutions globales à données petites en dimension quelconque. L’objectif de cette note (voir [3] pour les détails) est de montrer qu’il est possible d’espérer l’analogie de la théorie de Pierre-Louis Lions pour les équations de Navier–Stokes compressibles complètes avec conduction de chaleur sous des hypothèses de compatibilité entre les viscosités λ et μ et des hypothèses sur la loi de pression proche du vide. Notre résultat peut être vu comme une première réponse partielle à un problème complètement ouvert, sur les équations de Navier–Stokes compressibles complètes, décrit dans le livre de P.-L. Lions [9]. Notons l’article récent [11], où un résultat concernant les écoulements barotropes est obtenu pour $\gamma \geq 1$ et en toute dimension d’espace entre 1 et 3. Ce résultat utilise d’une part la nouvelle entropie mathématique découverte dans [2] mais également un multiplicateur adéquat pour mieux contrôler $\sqrt{\rho}u$ et pouvoir passer à la limite sans avoir recours aux termes de trainée utilisés dans [1].

Un fluide compressible conducteur de chaleur gouverné par les équations de Navier–Stokes compressibles satisfait le système (1)–(2) dans $\mathbf{R}_+ \times \Omega$ où $u \in \mathbf{R}^3$ désigne le champ de vitesse du fluide, ρ la densité, κ la conductivité thermique, σ le tenseur des contraintes, p le champ de pression, e l’énergie interne spécifique et h l’enthalpie spécifique. L’énergie totale spécifique est notée E et l’enthalpie spécifique associée H . Enfin, les forces extérieures sont données par un champ f . Les équations (1), (2) et (3) expriment respectivement la conservation de la masse, des moments et de l’énergie totale. Afin de fermer le système, deux ingrédients supplémentaires sont nécessaires. Tout d’abord, le fluide est supposé Newtonien, c’est-à-dire qu’il existe μ et λ tels que (4) soit satisfaite où $D(u)$ désigne le taux de déformation, exprimé comme la partie symétrique du gradient de vitesse ∇u . Comme deuxième condition, une loi thermodynamique de fermeture donne la pression p et l’énergie interne e comme fonctions de la densité ρ et de la température θ . Par simplicité ici, on s’intéressera à des lois d’état proches d’un gaz parfait polytropique. Des lois générales sont considérées dans [3].

Le système (1)–(3) est complété par des conditions initiales (5). Les fonctions ρ_0 et m_0 sont supposées satisfaire (6) et G_0 est pris tel que l’hypothèse (7) soit satisfaite.

Dans la plupart des applications pratiques et industrielles, les coefficients de viscosité μ et λ , ainsi que le coefficient de conductivité thermique κ sont des fonctions données de la densité et température (la loi de Sutherland en est un exemple). La question du caractère globalement bien posé du système précédent est l’un des grands défis depuis la fin de siècle dernier. Seuls des résultats très partiels sont disponibles, voir [6,7]. Dans notre résultat, des solutions faibles classiques «à La Leray» sont obtenues (des solutions des équations de Navier–Stokes au sens des distributions), mais le cas de viscosités dépendant de la température ne peut pas être considéré, contrairement à un travail récent dans [6]. En effet, les coefficients de viscosité λ et μ sont supposés être respectivement des fonctions $C^0(\mathbf{R}_+^*)$ and $C^0(\mathbf{R}_+) \cap C^1(\mathbf{R}_+^*)$ de la densité seulement, telles que les contraintes (8)–(10) sont satisfaites pour toute densité positive ρ . Rappelons que l’hypothèse (8) a été introduite dans [2] dans le cadre de fluides barotropes. L’extension à des coefficients de viscosité dépendant de la densité et de la température, qui permettrait par exemple de couvrir le cas de la loi de Sutherland malheureusement reste hors de portée des résultats présentés.

On suppose également que le coefficient de conductivité thermique κ satisfait (11)–(12).

2. Définition des solutions faibles

On dira que (ρ, u, θ) est une solution faible sur $(0, T)$ de (1)–(5) si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- Les propriétés de régularité suivantes sont satisfaites

$$\rho e \text{ et } \rho|u|^2 \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)), \quad \frac{\nabla \mu(\rho)}{\sqrt{\rho}} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d). \quad (17)$$

$$(\rho^{n/2} + \rho^{m/2})\nabla u \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^{d \times d}), \quad (1 + \sqrt{\rho})\nabla(\theta^{a/2} + \log \theta) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d). \quad (18)$$

Enfin, on a, pour une constante positive s

$$\rho \in C(\mathbf{R}_+; H^{-s}(\Omega)), \quad \rho u \in C(\mathbf{R}_+; H^{-s}(\Omega)^d), \quad \rho E \in C(\mathbf{R}_+; H^{-s}(\Omega)). \tag{19}$$

- La condition initiale (5) est satisfaite dans $D'(\Omega)$.
- Les équations (1)–(3) sont satisfaites dans $D'((0, T) \times \Omega)$.

On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Soit une suite de solutions approchées régulières satisfaisant notamment (24), l'inégalité d'énergie et (22)–(23). Supposons (8)–(12) satisfaits et que les données initiales (ρ_0, m_0, G_0) satisfont (6) et (7), et sont prises telles que*

$$H(0) = \int_{\Omega} \left(G_0 + \frac{|m_0|^2}{2\rho_0} \right) dx < +\infty, \tag{20}$$

que la densité initiale ρ_0 et l'entropie initiale s_0 pour une constante $\rho_{\infty} > 0$

$$\rho_0 - \rho_{\infty} \in L^1(\Omega), \quad \rho_0 \log \frac{\rho_{\infty}}{\rho_0} \in L^1(\Omega), \quad \rho_0 e_c(\rho_0) \in L^1(\Omega), \quad \frac{\nabla \mu(\rho_0)}{\sqrt{\rho_0}} \in L^2(\Omega)^d, \quad \rho_0 s_0 \in L^1(\Omega) \tag{21}$$

où e_c et p_c sont définis par (13)–(16). Alors, pour un gaz satisfaisant (13) où $s_0 = C_v \log(\theta_0/\rho_0^{\Gamma})$ avec C_v et $\Gamma = \gamma - 1$ constantes liées au gaz, il existe une solution globale faible de (1)–(3) avec (5).

Remarquons que le résultat repose sur des résultats de compacité pour des suites de solutions approchées, dont la procédure de construction est indiquée dans [4] en utilisant l'entropie mathématique avec capillarité mise en évidence dans [2], [8], dont les effets régularisants permettent la construction effective de suites de solutions approchées satisfaisant uniformément les estimations a priori [3]. Une fois cette construction effectuée, nous obtenons le premier résultat d'existence globale de solutions faibles sur le modèle complet de Navier–Stokes. Notons que des lois d'état plus générales peuvent être considérées. Les résultats de compacité, nécessaires à la stabilité, sont obtenus grâce aux relations suivantes mises en évidence formellement dans [2]

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |u|^2 + \int_{\Omega} 2\mu(\rho) D(u) : D(u) + \int_{\Omega} \lambda(\rho) |\operatorname{div} u|^2 = \int_{\Omega} p(\rho, \theta) \operatorname{div} u \tag{22}$$

et

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |u + 2\nabla \varphi(\rho)|^2 + \int_{\Omega} 2\mu(\rho) A(u) : A(u) = \int_{\Omega} p(\rho, \theta) \operatorname{div} u - 2\nabla p(\rho, \theta) \cdot \nabla \varphi(\rho), \tag{23}$$

où $A(u) = (\nabla u - {}^t \nabla u)/2$ représente la partie antisymétrique de ∇u , et φ est défini à une constante près par $\varphi'(\tau) = \mu'(\tau)/\tau$ ($\tau > 0$). C'est pour cette dernière égalité que l'on utilise (8). On utilise également la forme du coefficient de conductivité (11)–(12) avec l'inégalité d'entropie

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\theta} (2\mu |D(u)|^2 + \lambda |\operatorname{div} u|^2) + \int_{\Omega} \frac{\kappa}{\theta^2} |\nabla \theta|^2 \leq \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho s \tag{24}$$

et une information supplémentaire sur $(1 + \sqrt{\rho})\nabla \theta^{(a-c+1)/2}$ obtenue en multipliant formellement l'équation de température $C_v(\partial_t(\rho\theta) + \operatorname{div}(\rho\theta u) + \Gamma\rho\theta \operatorname{div} u) = 2\mu D(u) : D(u) + \lambda |\operatorname{div} u|^2 + \operatorname{div}(\kappa \nabla \theta)$ par $1/(C_v\theta^c)$ pour un c approprié tel que $0 < c < 1$ pour obtenir la compacité sur la température. La pression froide permet de contrôler la densité proche du vide alors que la nouvelle « vitesse » $u + 2\nabla \varphi(\rho)$ permet de contrôler la densité loin du vide en utilisant les hypothèses (9), (10) et (14)–(16).

Références

[1] D. Bresch, B. Desjardins, Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model, *Comm. Math. Phys.* 238 (1–2) (2003) 211–223.
 [2] D. Bresch, B. Desjardins, Some diffusive capillary models of Korteweg type, *C. R. Mécanique* 332 (11) (2004) 881–886.

- [3] D. Bresch, B. Desjardins, On the existence of global weak solutions to the Navier–Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids, (2005), submitted for publication.
- [4] D. Bresch, B. Desjardins. On the construction of approximate solutions for the 2D viscous shallow water model and for compressible Navier–Stokes models. *J. Math. Pures Appl.* (2006), in press.
- [5] D. Bresch, B. Desjardins, C.K. Lin, On some compressible fluid models: Korteweg, lubrication and shallow water systems, *Comm. Partial Differential Equations* 28 (3–4) (2003) 1009–1037.
- [6] E. Feireisl, On the motion of a viscous, compressible, and heat conducting fluid, *Indiana Univ. Math. J.* 53 (2004) 1707–1740.
- [7] E. Feireisl, *Dynamics of Viscous Compressible Fluids*, Oxford Science Publication, Oxford, 2004.
- [8] J. Leray, Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace, *Acta Math.* 63 (1934) 193–248.
- [9] P.-L. Lions, Compacité des solutions des équations de Navier–Stokes compressibles isentropiques, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* 317 (1993) 115–120.
- [10] P.-L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Dynamics*, vol. 2, *Compressible Models*, Oxford Science Publication, Oxford, 1998.
- [11] A. Mellet, A. Vasseur, On the isentropic compressible Navier–Stokes equation, (2005), submitted for publication.