Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 727–732

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des groupes

Invariants relatifs : une algèbre extérieure

Vincent Beck

Institut de mathématiques, université Paris VII, 175, rue du Chevaleret 75013 Paris, France

Reçu le 7 juillet 2005 ; accepté après révision le 14 mars 2006

Disponible sur Internet le 18 avril 2006

Présenté par Michel Duflo

Résumé

Soient $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexion complexe, M un G-module de dimension finie et S l'algèbre symétrique de V^*. Nous généralisons des résultats d'Orlik et Solomon, et de Shepler en construisant une structure d'algèbre extérieure sur l'ensemble des invariants relatifs (associés à un caractère linéaire de G) de l'algèbre $S \otimes \Lambda(M^*)$. ***Pour citer cet article : V. Beck, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Relative invariants: an exterior algebra. Let G be a complex reflection group acting on V, M be a finite dimensional G-module and S be the coordinate ring of V. Generalizing results of Orlik and Solomon, and of Shepler, we build an exterior algebra structure on the set of relative invariants (associated to a linear character of G) of the algebra $S \otimes \Lambda(M^*)$. ***To cite this article: V. Beck, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abridged English version

Let G be a complex reflection group acting on the complex vector space V of dimension ℓ. If S is the coordinate ring of V, the ring S^G of the invariants in S is a polynomial algebra. We denote by d_i for $i \in [\![1,\ell]\!]$ the degrees of a family of algebraically free homogeneous generators of G. These integers are determined by G and called the invariant degrees of G. Let I be the ideal of S generated by the elements of S^G which vanish at $0 \in V$. The algebra $S_G = S/I$ realizes a graded version of the regular representation of G. Let T be an indeterminate; for any finite dimensional G-module N, we define the fake degree of N as the polynomial $F_N(T) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle (S_G)_i, N\rangle T^i$ and the integers $m_i(N)$, called the N-exponents of G, by $\sum_{j=1}^{\dim N} T^{m_j(N)} := F_N(T)$. We define the total N-exponent of G as $m(N) = \sum_{j=1}^{\dim N} m_j(N)$.

Let $\mathfrak{H}$ be the set of reflecting hyperplanes of G. For $H \in \mathfrak{H}$, we define G_H to be the pointwise stabilizer of H and we set $e_H := |G_H|$. We introduce the integers $(n_{j,H}(N))_{0\leqslant j\leqslant e_H-1}$ and $n_H(N)$ defined as

Adresse e-mail : beck@math.jussieu.fr (V. Beck).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.03.014

$$\mathrm{Res}_{G_H}^G(N) = \bigoplus_{j=0}^{e_H-1} n_{j,H}(N)\det{}^{-j} \quad \text{and} \quad n_H(N) = \sum_{j=0}^{e_H-1} j n_{j,H}(N) = m\big(\mathrm{Res}_{G_H}^G(N)\big).$$

We define s_H to be the element of the cyclic group G_H with determinant $\exp(2\mathrm{i}\pi/e_H)$.

Let χ be a linear character of G. We denote by $\mathbb{C}_\chi$ a representation of G with character χ and $n_H(\chi)$ instead of $n_H(\mathbb{C}_\chi)$. By Stanley's theorem [9], there exists a unique polynomial Q_χ (up to multiplication by a non zero scalar) such that the χ-isotypic component of S is $S^G Q_\chi$. We can now state the main theorem of this paper which is a generalization of those of Orlik and Solomon [7] (with $\chi = 1$) and Shepler [8] (with $M = V$). The proof is based on the notion of minimal matrix associated to a representation of G (see [3] and [6]).

Theorem 0.1 *(Exterior Algebra). Let M be a finite dimensional G-module. Assume that s_H acts trivially or as a reflection on M for all $H \in \mathfrak{H}$ or that $n_H(M) < e_H - n_H(\chi)$ for all $H \in \mathfrak{H}$. We can define an algebra structure on the χ-isotypic component $(S \otimes \Lambda(M^*))^\chi$ of the algebra $S \otimes \Lambda(M^*)$ with the law $\curlywedge$ defined as*

$$\forall \mu, \omega \in \big(S \otimes \Lambda\big(M^*\big)\big)^\chi, \quad \mu \curlywedge \omega = {Q_\chi}^{-1} \mu \wedge \omega.$$

The algebra $((S \otimes \Lambda(M^*))^\chi, \curlywedge)$ is the S^G-exterior algebra of $(S \otimes M^*)^\chi$.

Let $\mathcal{N}$ be the normalizer of G in $GL(V)$ and γ be a semisimple element of $\mathcal{N}$ (see [1]). Assume that the derived group D of $\langle G, \gamma\rangle$ verifies $D \subset \ker\chi$. Let choose an homogeneous S^G-basis of $S^G \otimes ((S_G) \otimes V)^\chi$ whose vectors are eigenvectors for γ and define $\varepsilon_{i,\gamma,\chi}$ the corresponding eigenvalue. By applying this theorem to V, we obtain a new criterion for an integer to be γ-regular. Let d an integer, ξ a primitive dth root of unity. We define $r_i(\chi) = \deg(Q_\chi) - m_i(V \otimes \mathbb{C}_\chi)$,

$$a_\gamma(d) = \big|\big\{i \in [\![1, \ell]\!],\ \varepsilon_{i,\gamma,1}\xi^{-d_i} = 1\big\}\big| \quad \text{and} \quad b_\gamma(d,\chi) = \big|\big\{j \in [\![1, \ell]\!],\ \varepsilon_{j,\gamma,\chi}\xi^{r_j(\chi)-1} = 1\big\}\big|;$$

Remember that an integer d is said to be γ-regular if there exists $g \in G$ such that $\dim\ker(g\gamma - \xi\,\mathrm{id})$ meets $V \setminus \bigcup_{H\in\mathfrak{H}} H$.

Theorem 0.2. *If for all $H \in \mathfrak{H}$, the restriction of χ to G_H is not trivial, then d is γ-regular if and only if $a_\gamma(d) = b_\gamma(d,\chi)$.*

1. Introduction

Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension ℓ et $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexions complexes. Le groupe G agit de façon naturelle et homogène sur l'algèbre S des fonctions polynomiales sur V identifiée à l'algèbre symétrique du dual V^* de V. La sous-algèbre des invariants S^G est une algèbre de polynômes à ℓ indéterminées. On définit alors les degrés de G comme les degrés (comptés avec leur multiplicité) d'une famille de générateurs homogènes algébriquement indépendants de S^G. Ils sont bien définis et on les note $d_1, \ldots, d_\ell$. Soit I l'idéal de S engendré par les éléments de S^G nuls en $0 \in V$, l'algèbre quotient $S_G = S/I$ est graduée et est appelée l'algèbre des coinvariants de G. Elle est isomorphe en tant que G-module à la représentation régulière et on a $S = S_G \otimes S^G$ (voir [2]).

Soient T une indéterminée et N un G-module de dimension finie, on définit le degré fantôme de N comme le polynôme $F_N(T) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle (S_G)_i, N\rangle T^i$ et les N-exposants de G et le N-exposant total comme les entiers vérifiant $\sum_{j=1}^{\dim N} T^{m_j(N)} := F_N(T)$ et $m(N) := \sum_{j=1}^{\dim N} m_j(N)$. On note $\mathfrak{H}$ l'ensemble des hyperplans des réflexions de G et pour $H \in \mathfrak{H}$, on pose $G_H = \{g \in G,\ \text{pour tout } x \in H,\ gx = x\}$. C'est un groupe cyclique dont on note e_H le cardinal et s_H le générateur de déterminant $\zeta_H = \exp(2\mathrm{i}\pi/e_H)$. Enfin, on considère les entiers $(n_{j,H}(N))_j$ et $n_H(N)$ définis par

$$\mathrm{Res}_{G_H}^G(N) = \bigoplus_{j=0}^{e_H-1} n_{j,H}(N)\det{}^{-j} \quad \text{et} \quad n_H(N) = \sum_{j=0}^{e_H-1} j n_{j,H}(N) = m\big(\mathrm{Res}_{G_H}^G(N)\big).$$

Soient χ un caractère linéaire de G, on note $\mathbb{C}_\chi$ la représentation de caractère χ sur $\mathbb{C}$. On considère M un G-module de dimension r. L'objectif est de munir d'une structure de S^G-algèbre extérieure la composante χ-isotypique (notée $(S \otimes \Lambda(M^*))^\chi$) de l'algèbre $\Omega = S \otimes \Lambda(M^*)$ sur laquelle G agit de façon diagonale. On suit pour cela la méthode décrite dans l'article de Shepler [8].

On note $\det_M$ (resp. $\det_{M^*}$) le déterminant de la représentation M (resp. M^*) et pour $p \in [\![0, r]\!]$ et $n \in \mathbb{N}$, $\Omega^p = S \otimes \Lambda^p(M^*)$ et $\Omega_n^p = S_n \otimes \Lambda^p(M^*)$. Pour $H \in \mathfrak{H}$, on choisit $\alpha_H \in V^*$ une forme linéaire de noyau H et on pose $n_H(\chi) = n_H(\mathbb{C}_\chi)$; on définit alors

$$Q_\chi = \prod_{H \in \mathfrak{H}} {\alpha_H}^{n_H(\chi)}.$$

R. Stanley [9] a montré que la composante χ-isotypique S^χ de S est $S^G Q_\chi$. On en déduit alors que

$$\left(\Omega^r\right)^\chi = S^G Q_{\chi \cdot \det_M} \operatorname{vol}_M \tag{1}$$

où vol_M est un élément non nul de $\Lambda^r(M^*)$.

Rappelons le théorème de Gutkin [3] (voir aussi la Proposition 2.5).

Théorème 1.1 *(Théorème de Gutkin (version faible)). On a $m(M) = \sum_{H \in \mathfrak{H}} n_H(M)$ et on dispose des équivalences :*

$$m(M) = m\left(\Lambda^r(M)\right) \iff \forall H \in \mathfrak{H}, \quad 0 \leqslant n_H(M) \leqslant e_H - 1\ ;$$
$$m(M) = m\left(\Lambda^r(M)\right) \quad \textit{et} \quad m\left(M^*\right) = m\left(\Lambda^r\left(M^*\right)\right) \iff \forall H \in \mathfrak{H}, \quad n_{0,H} \geqslant r - 1.$$

2. Divisibilité

Rappelons le résultat de divisibilité des polynômes qui est à la base du Lemme 2.2.

Lemme 2.1. *Soient $P \in S$ et $i \in [\![1; e_H]\!]$. Si $s_H P = {\zeta_H}^i P$ alors P est divisible par ${\alpha_H}^{e_H - i}$.*

Lemme 2.2. *Soient $\mu \in (\Omega^p)^\chi$ et $H \in \mathfrak{H}$. On considère $(y_1, \ldots, y_r)$ une base de M^* dans laquelle s_H agit diagonalement. On note ${\zeta_H}^{j_i}$ $(0 \leqslant j_i \leqslant e_H - 1)$ la valeur propre associée au vecteur y_i. On écrit*

$$\mu = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant r} \mu_{i_1, \ldots, i_p} y_{i_1} \wedge \cdots \wedge y_{i_p}.$$

Si $m(M) = m(\Lambda^r(M))$, on dispose de l'alternative suivante :

- *ou $0 \leqslant j_{i_1} + \cdots + j_{i_p} \leqslant e_H - 1 - n_H(\chi)$ et ${\alpha_H}^{j_{i_1} + \cdots + j_{i_p} + n_H(\chi)} \mid \mu_{i_1, \ldots, i_p}$;*
- *ou $e_H - n_H(\chi) \leqslant j_{i_1} + \cdots + j_{i_p} \leqslant 2e_H - 2 - n_H(\chi)$ et ${\alpha_H}^{j_{i_1} + \cdots + j_{i_p} + n_H(\chi) - e_H} \mid \mu_{i_1, \ldots, i_p}$.*

Preuve. Comme la famille $(y_{i_1} \wedge \cdots \wedge y_{i_p})_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant r}$ forme une S-base de Ω^p, on obtient que $s_H(\mu_{i_1, \ldots, i_p}) = {\zeta_H}^{-j_{i_1} - \cdots - j_{i_p} - n_H(\chi)} \mu_{i_1, \ldots, i_p}$. On a $0 \leqslant j_{i_1} + \cdots + j_{i_p} + n_H(\chi) \leqslant 2e_H - 2$ grâce à l'hypothèse $m(M) = m(\Lambda^r(M))$. Le Lemme 2.1 permet alors de conclure. □

Remarque 1. Les entiers j_i sont intimement liés aux $n_{j,H}$. De façon précise, pour $j \in [\![0, e_H - 1]\!]$, $n_{j,H}$ est le nombre d'entiers $i \in [\![1, r]\!]$ tels que $j_i = j$.

Considérons la condition suivante (notée $(*)$) : pour tout $H \in \mathfrak{H}$, il n'existe pas deux parties disjointes de l'ensemble $[\![1; r]\!]$ (notées I_1 et I_2) vérifiant

$$e_H - n_H(\chi) \leqslant \sum_{i \in I_1} j_i \quad \text{et} \quad e_H - n_H(\chi) \leqslant \sum_{i \in I_2} j_i.$$

Corollaire 2.3. *Si $m(M) = m(\Lambda^r(M))$ et $(*)$ est vérifié alors Q_χ divise $\mu \wedge \omega$ pour tout $\mu, \omega \in \Omega^\chi$.*

Preuve. On fixe $H \in \mathfrak{H}$ et on considère la même base $(y_1, \ldots, y_r)$ de M^* que celle du Lemme 2.2. Pour une partie $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ de $[\![1; r]\!]$ avec $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant r$, on note $y_I = y_{i_1} \wedge \cdots \wedge y_{i_p}$. On peut alors écrire

$$\mu = \sum_{I \subset [\![1; r]\!]} \mu_I y_I \quad \text{et} \quad \omega = \sum_{I \subset [\![1; r]\!]} \omega_I y_I$$

avec $\mu_I, \omega_I \in S$. D'où

$$\mu \wedge \omega = \sum_{I \cap J = \emptyset} \varepsilon_{I,J} \mu_I \omega_J y_{I \cup J} \quad \text{avec } \varepsilon_{I,J} \in \{\pm 1\}.$$

L'hypothèse $(*)$ et le Lemme 2.2 assurent que si $I \cap J = \emptyset$ alors μ_I ou ω_J est divisible par ${\alpha_H}^{n_H(\chi)}$. Ainsi, le produit $\mu \wedge \omega$ est divisible par ${\alpha_H}^{n_H(\chi)}$. Comme la famille des $(\alpha_H)_{H \in \mathfrak{H}}$ est formée d'éléments premiers entre eux deux à deux, $\mu \wedge \omega$ est divisible par Q_χ. $\square$

Remarque 2 *(Structure d'algèbre).* Pour $\mu, \omega \in \Omega^\chi$, on peut alors définir le produit $\mu \curlywedge \omega = {Q_\chi}^{-1} \mu \wedge \omega$. Comme $\mu \curlywedge \omega \in \Omega^\chi$, on a ainsi défini sur Ω^χ une loi $\curlywedge$ qui munit Ω^χ d'une structure d'algèbre.

L'objectif est de montrer que $(\Omega^\chi, \curlywedge)$ est une S^G-algèbre extérieure. On suit pour cela la méthode indiquée dans les articles de Shepler [8] et Orlik et Solomon [7]. On note $\doteq$ la relation de colinéarité.

Proposition 2.4. *Soient $\omega_1, \ldots, \omega_r \in (\Omega^1)^\chi$. Si $m(M) = m(\Lambda^r(M))$ et la condition $(*)$ est vérifiée, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes* :

$$\text{pour tout } p \in [\![1, r]\!], \text{ la famille } (\omega_{i_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \omega_{i_p})_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant r} \text{ forme une } S^G\text{-base de } (\Omega^p)^\chi\,;$$

$$\omega_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \omega_r \doteq Q_{\chi \cdot \det_M} \mathrm{vol}_M. \tag{2}$$

L'objectif est à présent de montrer que toute S^G-base de $(\Omega^1)^\chi$ vérifie la condition (2). Cela repose sur la construction de deux familles $(\nu_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ et $(\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ d'éléments de Ω^1.

Proposition 2.5. *Si $m(M) = m(\Lambda^r(M))$, il existe $\nu_1, \ldots, \nu_r \in (\Omega^1)^G$ vérifiant $\nu_1 \wedge \cdots \wedge \nu_r \doteq Q_{\det_M} \mathrm{vol}_M$.*
Si $m(M^*) = m(\Lambda^r(M^*))$, il existe $\mu_1, \ldots, \mu_r \in (\Omega^1)^{\det_{M^*}}$ vérifiant $\mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_r \doteq (Q_{\det_{M^*}})^{r-1} \mathrm{vol}_M$.

Preuve. La preuve utilise la version forte du théorème de Gutkin [3] et la notion de matrice minimale [6]. Pour $C = (c_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_r(S)$ et $g \in G$, on note $g \cdot C$ la matrice $(gc_{ij})_{i,j}$. Considérons C une matrice M-minimale. Par définition, $C \in \mathrm{M}_r(S)$ vérifie $g \cdot N = N g_M$, $\det N \neq 0$ et $\deg \det N = m(M)$.

On choisit $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ une base de M^* et on définit pour $j \in [\![1, r]\!]$,

$$\nu_j = \sum_{i=1}^r c_{ji} \otimes y_i.$$

On a alors $\nu_1 \wedge \cdots \wedge \nu_r \doteq \det(N) \mathrm{vol}_M$. De plus, $\deg \det N = m(M) = m(\Lambda^r(M)) = \deg Q_{\det_M}$ et $\det N$ est $\det g_M$-invariant. Ainsi, le théorème de Stanley assure que $\det N \doteq Q_{\det_M}$. Enfin, on vérifie que ν_j est G-invariant pour tout $j \in [\![1, r]\!]$ grâce à la relation ${}^t g_{M^*} = {g_M}^{-1}$.

Pour les μ_j, on applique la même construction à la comatrice d'une matrice M^*-minimale. $\square$

Lemme 2.6. *Si $m(M) = m(\Lambda^r(M))$ alors les polynômes $Q_\chi Q_{\det_M} (Q_{\chi \cdot \det_M})^{-1}$ et $Q_{\chi \cdot \det_M} Q_{\det_{M^*}} (Q_\chi)^{-1}$ sont premiers entre eux.*

Proposition 2.7. *On suppose que $m(M) = m(\Lambda^r(M))$ et $m(M^*) = m(\Lambda^r(M^*))$. Si $\omega_1, \ldots, \omega_r$ engendrent $(\Omega^1)^\chi$ sur S^G alors $\omega_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \omega_r \doteq Q_{\chi \cdot \det_M} \mathrm{vol}_M$.*

Preuve. La preuve suit celle de la Proposition 2 de Shepler [8]. D'après l'égalité (1), on sait que $\omega_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \omega_r = f Q_{\chi \cdot \det_M} \mathrm{vol}_M$ où $f \in S^G$. Pour montrer que f est inversible, on montre que f divise $Q_\chi Q_{\det_M} (Q_{\chi \cdot \det_M})^{-1}$ et $(Q_{\chi \cdot \det_M} Q_{\det_{M^*}} (Q_\chi)^{-1})^{r-1}$ grâce aux ν_i et μ_j. $\square$

Remarque 3. La condition $m(M^*) = m(\Lambda^r(M^*))$ est superflue si $Q_\chi Q_{\det_M} \doteq Q_{\chi \cdot \det_M}$ c'est-à-dire si $n_H(M) < e_H - n_H(\chi)$ pour tout $H \in \mathfrak{H}$. Dans ce cas, la condition $(*)$ est vérifiée.

Cette situation se produit lorsque χ est le caractère trivial. On a alors $Q_\chi = 1$ et les produits $\curlywedge$ et $\wedge$ sont identiques. On retrouve le résultat d'Orlik et Solomon [7].

Finalement, on obtient le théorème de structure suivant :

Proposition 2.8 *(Algèbre extérieure). Supposons que s_H agisse sur M de façon triviale ou comme une pseudo-réflexion pour tout $H \in \mathfrak{H}$ ou que $n_H(M) < e_H - n_H(\chi)$ pour tout $H \in \mathfrak{H}$, alors la S^G-algèbre $(\Omega^\chi, \curlywedge)$ est l'algèbre extérieure de $(\Omega^1)^\chi$.*

3. Conséquences

On considère le normalisateur $\mathcal{N}$ de G dans $GL(V)$. On choisit alors $\gamma \in \mathcal{N}$ que l'on suppose semisimple (voir [1]). On suppose que M est un $\langle G, \gamma\rangle$-module et que γ agit de façon semisimple sur M. On suppose de plus que le groupe dérivé D de $\langle G, \gamma\rangle$ vérifie $D \subset \ker\chi$. On peut ainsi prolonger χ en un caractère linéaire de $\langle G, \gamma\rangle$ (que l'on note encore χ). On note $M_\chi = M \otimes \mathbb{C}_\chi$. On a alors $(\Omega^1)^\chi = S^G \otimes (S_G \otimes M_\chi)^G$. Ainsi la définition des M_χ-exposants assure qu'on peut choisir une S^G-base $\mathfrak{B} = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$ de $(\Omega^1)^\chi$ bihomogène avec $\deg'(\omega_i) = (m_i(M_\chi) - \deg(Q_\chi), 1)$. On peut, de plus, supposer que les ω_i sont des vecteurs propres de γ. On note $\varepsilon_{i,\gamma,\chi}(M)$ la valeur propre de γ associée à ω_i. On en déduit alors, grâce à la structure de S^G-algèbre extérieure, l'identité suivante.

Corollaire 3.1. *Si pour tout $H \in \mathfrak{H}$, s_H agit sur M comme une pseudo-réflexion ou l'identité alors*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi\left(g^{-1}\right)\frac{\det(1+(g\gamma)_M Y)}{\det(1-g\gamma X)} = X^{\deg(Q_\chi)}\frac{\prod_{i=1}^r(1+\varepsilon_{i,\gamma,\chi}(M)YX^{m_i(M_\chi)-\deg(Q_\chi)})}{\prod_{i=1}^\ell(1-\varepsilon_{i,\gamma,1}(V)X^{d_i})}. \tag{3}$$

De manière analogue aux articles de Lehrer et Michel [4,5], voyons ce que donne cette formule appliquée aux représentations V^σ et $V^{*\sigma}$ où $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Soit $d \in \mathbb{N}$ et ξ une racine d^{e}primitive de l'unité ; on définit alors $A_\gamma(d) = \{i \in [\![1,\ell]\!],\ \varepsilon_{i,\gamma}(V)\xi^{-d_i} = 1\}$ et $a_\gamma(d) = |A_\gamma(d)|$, et pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$,

$$r_i(\sigma,\chi) = \deg(Q_\chi) - m_i\left(V_\chi^\sigma\right), \quad \text{et} \quad r_i^*(\sigma,\chi) = \deg(Q_\chi) - m_i\left(V_\chi^{*\sigma}\right) ;$$
$$B_{\sigma,\gamma}(d,\chi) = \left\{j \in [\![1,\ell]\!],\ \varepsilon_{j,\gamma,\chi}\left(V^\sigma\right)\xi^{-\sigma}\xi^{r_j(\sigma,\chi)} = 1\right\} \quad \text{et} \quad b_{\sigma,\gamma}(d,\chi) = \left|B_{\sigma,\gamma}(d,\chi)\right| ;$$
$$B^*_{\sigma,\gamma}(d,\chi) = \left\{j \in [\![1,\ell]\!],\ \varepsilon_{j,\gamma,\chi}\left(V^{*\sigma}\right)\xi^{\sigma}\xi^{r_j^*(\sigma,\chi)} = 1\right\} \quad \text{et} \quad b^*_{\sigma,\gamma}(d,\chi) = \left|B^*_{\sigma,\gamma}(d,\chi)\right|.$$

Pour $h \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, on note $\det'(h)$ le produit des valeurs propres non nulles de h, $V(h,\xi)$ le sous-espace propre de h associé à la valeur propre ξ et $d(h,\xi) = \dim(V(h,\xi))$.

Théorème 3.2. *On a $a_\gamma(d) \leqslant b_{\sigma,\gamma}(d,\chi)$ et l'égalité suivante dans $\mathbb{C}[T]$*

$$\xi^{\deg(Q_\chi)}\sum_{g\in G}\chi\left(g^{-1}\right)T^{d(g\gamma,\xi)}\left(\det'\left(1-\xi^{-1}g\gamma\right)\right)^{\sigma-1}$$
$$= \begin{cases} \displaystyle\prod_{j\in B_{\sigma,\gamma}(d,\chi)}\left(T - r_j(\sigma,\chi)\right)\prod_{j\notin B_{\sigma,\gamma}(d,\chi)}\left(1-\varepsilon_j\xi^{r_j(\sigma,\chi)-\sigma}\right)\prod_{j\notin A_\gamma(d)}\frac{d_j}{1-\varepsilon'_j\xi^{-d_j}} & \text{si } a_\gamma(d) = b_{\sigma,\gamma}(d,\chi),\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

où $\varepsilon_i = \varepsilon_{i,\gamma,\chi}(V^\sigma)$ et $\varepsilon'_i = \varepsilon_{i,\gamma,1}(V)$.

On a $a_\gamma(d) \leqslant b^*_{\sigma,\gamma}(d,\chi)$ et l'égalité suivante dans $\mathbb{C}[T]$

$$(-1)^\ell\xi^{\deg(Q_\chi)+\ell\sigma}\sum_{g\in G}\chi\left(g^{-1}\right)(-T)^{d(g\gamma,\xi)}\left(\det'\left(1-\xi^{-1}g\gamma\right)\right)^{\sigma-1}\det(g\gamma)^{-\sigma}$$
$$= \begin{cases} \displaystyle\prod_{j\in B^*_{\sigma,\gamma}(d,\chi)}\left(T - r^*_j(\sigma,\chi)\right)\prod_{j\notin B^*_{\sigma,\gamma}(d,\chi)}\left(1-\varepsilon_j\xi^{r^*_j(\sigma,\chi)+\sigma}\right)\prod_{j\notin A_\gamma(d)}\frac{d_j}{1-\varepsilon'_j\xi^{-d_j}} & \text{si } a_\gamma(d) = b^*_{\sigma,\gamma}(d,\chi),\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

où $\varepsilon_i = \varepsilon_{i,\gamma,\chi}(V^{*\sigma})$ et $\varepsilon'_i = \varepsilon_{i,\gamma,1}(V)$.

Voyons comment les égalités précédentes donnent des critères de régularité pour les entiers.

Corollaire 3.3 *(Entier régulier). Rappelons que d est dit γ-régulier si l'un des $V(g\gamma, \xi)$ rencontre le complémentaire des hyperplans de $\mathfrak{H}$.*

(i) *Si d est γ-régulier, alors $a_\gamma(d) = b_{\sigma,\gamma}(d, \chi) = b^*_{\sigma,\gamma}(\chi, d)$ pour tout χ et tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.*
(ii) *Si pour tout $H \in \mathfrak{H}$, la restriction de χ à G_H est non-triviale, alors d est γ-régulier si et seulement si $a_\gamma(d) = b_\gamma(\chi, d)$.*
(iii) *Si pour tout $H \in \mathfrak{H}$, la restriction de $\chi \cdot \det$ à G_H est non-triviale, alors d est γ-régulier si et seulement si $a_\gamma(d) = b^*_\gamma(\chi, d)$.*

Références

[1] C. Bonnafé, G.I. Lehrer, J. Michel, Twisted invariant theory for reflection groups, Prépublications du laboratoire de mathématiques de Besançon.
[2] C. Chevalley, Invariants of finite groups generated by reflections, Amer. J. Math. 77 (1955) 778–782.
[3] E.A. Gutkin, Matrices connected with groups generated by mappings, Funct. Anal. Appl. 7 (1973) 153–154.
[4] G.I. Lehrer, Remarks concerning linear characters of reflection groups, Preprint, 2004.
[5] G.I. Lehrer, J. Michel, Invariant theory and eigenspaces for unitary reflection groups, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 795–800.
[6] E. Opdam, Complex reflection groups and fake degrees, Preprint, 1998.
[7] P. Orlik, L. Solomon, Unitary reflection groups and cohomology, Invent. Math. 59 (1980) 77–94.
[8] A.V. Shepler, Semi-invariants of finite reflection groups, J. Algebra 220 (1999) 314–326.
[9] R. Stanley, Relative invariants of finite groups, J. Algebra 49 (1977) 134–148.