

Analyse numérique

Formulation fonction-courant et tourbillon du problème de Stokes dans un domaine bidimensionnel multiplement connexe

Mohamed Amara^a, Christine Bernardi^b, Vivette Girault^b, Frédéric Hecht^b

^a I.P.R.A.-L.M.A. (U.M.R. 5142 du C.N.R.S.), université de Pau, avenue de l'université, 64000 Pau, France

^b Laboratoire Jacques-Louis Lions, C.N.R.S. & université Pierre et Marie Curie, B.C. 187, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 19 mai 2005 ; accepté le 7 février 2006

Disponible sur Internet le 13 mars 2006

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

Dans un domaine bidimensionnel multiplement connexe, on considère la formulation du problème de Stokes où les inconnues sont la fonction courant et le tourbillon. On établit son équivalence avec un système composé d'un nombre fini de problèmes variationnels. Ceci permet d'en construire une discrétisation par éléments finis. L'analyse et une expérience numérique prouvent la convergence de la méthode. *Pour citer cet article* : M. Amara et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

The stream-function and vorticity formulation of the Stokes problem in a multiply connected two-dimensional domain. We consider the formulation of the Stokes problem in a multiply connected two-dimensional domain where the unknowns are the stream-function and the vorticity. We derive its equivalence with a finite system of several variational problems. This leads to the construction of a finite element discretization of this problem. The analysis and a numerical experiment prove the convergence of the method. *To cite this article*: M. Amara et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Introduction

Let Ω be a bounded connected domain in \mathbb{R}^2 , with a Lipschitz-continuous boundary $\partial\Omega$. We agree to denote by Γ_i , $0 \leq i \leq I$, the connected components of $\partial\Omega$, where Γ_0 stands for the outer boundary of Ω , i.e. the boundary of the only unbounded connected component of $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$. We are interested in the case $I \geq 1$ of a multiply connected domain. For a positive constant viscosity ν and data \mathbf{f} in $L^2(\Omega)^2$, the Stokes problem (1) where the unknowns are the velocity \mathbf{u} and the pressure p , implies the system (2), where the unknowns are the stream-function ψ such that $\mathbf{u} = \mathbf{curl} \psi$ and the vorticity $\omega = \mathbf{curl} \mathbf{u}$ (both curls are replaced by rot in the French version). This new formulation is very interesting

Adresses e-mail : mohamed.amara@univ-pau.fr (M. Amara), bernardi@ann.jussieu.fr (C. Bernardi), girault@ann.jussieu.fr (V. Girault), hecht@ann.jussieu.fr (F. Hecht).

from a numerical point of view, since it only involves two scalar unknowns and leads to exactly divergence-free discrete velocities. However, as first noted in [6, §6.1] (see also [5, §5 & §49]), the main difficulty in handling this system is that no equivalent variational formulation seems to be known when Ω is not simply connected: Indeed, the stream-function does not vanish on the whole boundary $\partial\Omega$, in contrast with the case of a simply connected domain.

We first prove that problem (1) is equivalent to a finite system of uncoupled variational problems. We propose a finite element discretization that relies on this formulation and prove the convergence of the method. We illustrate this result with a numerical experiment.

Variational formulation

The main idea consists in writing the expansion (3) of a solution (ψ, ω) of problem (2), where $\tilde{\psi}$ now vanishes on $\partial\Omega$. The quantities that appear in (3) are defined in three steps.

Step A. For $1 \leq i \leq I$, let ρ_i be a function of $H^2(\Omega)$ with a compact support in $\Omega \cup \Gamma_i$, equal to 1 in a neighbourhood of Γ_i (so that it satisfies (6)). Thus, we consider the solution (ψ_i, ω_i) of problem (7) which admits the equivalent formulation (8), the space $X(\Omega)$ and the bilinear forms $a(\cdot, \cdot)$ and $b(\cdot, \cdot)$ being introduced in (4) and (5). Finally, we define the functions ψ_i by (9).

Step B. We solve the linear system (10) in order to obtain the coefficients λ_i .

Step C. We consider the solution $(\tilde{\psi}, \tilde{\omega})$ of problem (11); this problem admits the equivalent formulation (12).

All these problems are well-posed. The main result of this Note can be stated as follows.

Theorem. *For any data \mathbf{f} in $L^2(\Omega)^2$, a pair (ψ, ω) in $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ satisfies (3)(8)(9)(10)(12) if and only if it is associated with a solution (\mathbf{u}, p) of problem (1) by the relations (13).*

The discrete problem

Let $(\mathcal{T}_h)_h$ be a uniformly regular family of triangulations of Ω (see [4, Chap. I, Def. A.2]), where h stands for the maximum of the diameters of the triangles of \mathcal{T}_h . We consider the discrete spaces \mathbb{X}_h and \mathbb{M}_h defined in (14), and the Lagrange interpolation operator \mathcal{I}_h with values in \mathbb{X}_h . Next, for each h , we define a discrete solution (ψ_h, ω_h) by the relations (15) to (19).

Standard arguments [4, Chap. III, Lemma 2.4] yield that (ψ_h, ω_h) is uniquely defined by these relations. Using [4, Chap. III, Thm 2.6] or [3, §6.3] also leads to the convergence property (20). But no error estimate can be proved, due to the weak regularity of the solutions of the Stokes problem in a non convex polygon and to the lack of optimality of the above discretization. We refer to [1] for an improved discretization, relying on the addition of a stabilizing term.

A numerical experiment

The domain Ω is equal to $]0, 2[\times]-2, 2[$ minus two obstacles, a triangle and a quadrilateral (as illustrated in the left part of Fig. 1). We solve the discrete problem (15) to (19) for the data given in (21). The middle and right parts of the figure present the isovalues of the stream-function and the vorticity, respectively.

1. Introduction

Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^2 à frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. On note Γ_i , $0 \leq i \leq I$, les composantes connexes de $\partial\Omega$, où Γ_0 désigne la frontière extérieure de Ω , c'est-à-dire la frontière de l'unique composante connexe non bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$. Comme on souhaite travailler dans le cas d'un ouvert non simplement connexe, on suppose dorénavant $I \geq 1$. Pour une viscosité ν constante positive et une donnée \mathbf{f} dans $H^{-1}(\Omega)^2$, le problème de Stokes avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes s'écrit

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{grad} p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Les inconnues sont alors la vitesse \mathbf{u} et la pression p . Lorsque la donnée \mathbf{f} appartient à l'espace $L^2(\Omega)^2$, ce problème implique le système

$$\begin{cases} -\nu \Delta \omega = \text{rot } \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta \psi = \omega & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n \psi = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \psi = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \psi = \text{constante} & \text{sur } \Gamma_i, \ 1 \leq i \leq I, \end{cases} \tag{2}$$

où les inconnues sont la fonction-courant, définie à partir de la relation $\mathbf{u} = \text{rot } \psi$, et le tourbillon ω égal à $\text{rot } \mathbf{u}$. Toutefois la solution de ce système n'est unique que si on précise les valeurs de ψ sur les Γ_i . L'intérêt numérique du problème (2) est double : il comporte deux inconnues scalaires, ce qui rend sa discrétisation peu coûteuse, et mène à des vitesses discrètes à divergence exactement nulles puisque calculées à partir des fonctions-courant discrètes. On peut finalement calculer une pression discrète comme solution d'une équation de Laplace.

La principale difficulté liée au traitement d'un domaine multiplement connexe, déjà remarquée dans [6, §6.1] dans le cas d'un problème avec seule inconnue ψ (voir aussi [5, §5 & §49]), réside dans l'écriture d'une formulation variationnelle du problème (2). En effet, le tourbillon ω est usuellement cherché dans $H^1(\Omega)$, toutefois il n'appartient pas à cet espace lorsque Ω n'est pas régulier, par exemple lorsque c'est un polygone (nécessairement non convexe puisque multiplement connexe). Une formulation plus récente proposée dans [2], consiste à chercher ω dans l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ à laplacien dans $H^{-1}(\Omega)$, toutefois on ne peut plus donner de sens au produit de dualité $\langle \Delta \omega, \psi \rangle$ puisque ψ n'appartient plus à $H_0^1(\Omega)$ dans le cas général (voir la cinquième ligne de (2)).

Le principal résultat de cet article consiste à montrer que le problème (1) est équivalent à un système composé d'un nombre fini de problèmes variationnels découplés. En s'appuyant sur cette formulation, on propose alors une discrétisation par éléments finis du problème et on vérifie la convergence de la méthode à partir des estimations d'erreur usuelles. On illustre la discrétisation par une expérience numérique.

2. Formulation variationnelle

L'idée de base consiste à écrire une décomposition

$$\psi = \tilde{\psi} + \sum_{i=1}^I \lambda_i \psi_i, \quad \omega = \tilde{\omega} + \sum_{i=1}^I \lambda_i \omega_i, \tag{3}$$

telle que la fonction $\tilde{\psi}$ ait une trace nulle sur toute la frontière $\partial\Omega$ et que la trace de ψ sur chaque Γ_i , $1 \leq i \leq I$, soit égale à λ_i . Pour écrire les problèmes variationnels, on introduit les espaces

$$X(\Omega) = \{ \mu \in L^2(\Omega); \Delta \mu \in H^{-1}(\Omega) \}, \quad V(\Omega) = \{ \mu \in X(\Omega); \Delta \mu = 0 \}, \tag{4}$$

ainsi que les formes bilinéaires

$$a(\omega, \mu) = \int_{\Omega} \omega(\mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad b(\mu, \varphi) = \langle \Delta \mu, \varphi \rangle. \tag{5}$$

La forme $a(\cdot, \cdot)$ est elliptique sur $V(\Omega)$ (qui coïncide avec le noyau de $b(\cdot, \cdot)$ dans $X(\Omega)$), tandis que la forme $b(\cdot, \cdot)$ vérifie une condition inf-sup liant les espaces $X(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$, voir [3, Prop. 2.4.4].

Étape A. Pour $1 \leq i \leq I$, on fixe une fonction ρ_i de $H^2(\Omega)$ à support compact dans $\Omega \cup \Gamma_i$, égale à 1 dans un voisinage de Γ_i (donc facile à construire). La fonction ρ_i vérifie alors

$$\partial_n \rho_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad \text{et} \quad \rho_i = \delta_{ij} \quad \text{sur } \Gamma_j, \ 0 \leq j \leq I, \tag{6}$$

où $\delta_{..}$ désigne le symbole de Kronecker. On considère maintenant le problème

$$\begin{cases} -\nu \Delta \omega_i = 0 & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta \tilde{\psi}_i = \omega_i + \Delta \rho_i & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n \tilde{\psi}_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \tilde{\psi}_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

On observe qu'il admet la formulation variationnelle équivalente suivante

Trouver $(\tilde{\psi}_i, \omega_i)$ dans $H_0^1(\Omega) \times X(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad b(\omega_i, \varphi) &= 0, \\ \forall \mu \in X(\Omega), \quad a(\omega_i, \mu) + b(\mu, \tilde{\psi}_i) &= -a(\Delta \rho_i, \mu). \end{aligned} \quad (8)$$

Les propriétés des formes $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ entraînent [3, Thm. 1.3.8] que ce problème admet une solution unique. On pose finalement

$$\psi_i = \tilde{\psi}_i + \rho_i. \quad (9)$$

Étape B. On résout le système linéaire consistant à trouver les coefficients λ_i , $1 \leq i \leq I$, tels que

$$\sum_{i=1}^I \lambda_i \int_{\Omega} \omega_i(\mathbf{x}) \omega_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{rot} \psi_j)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad 1 \leq j \leq I. \quad (10)$$

On note que les ω_i , $1 \leq i \leq I$, sont linéairement indépendants : en effet, si l'on suppose que $\sum_{i=1}^I \alpha_i \omega_i = 0$, la fonction $\sum_{i=1}^I \alpha_i \psi_i$ est harmonique, a une dérivée normale nulle sur $\partial\Omega$ et une trace nulle sur Γ_0 , donc est nulle ; sa trace sur Γ_i étant égale à α_i , tous les α_i sont nuls. On en déduit que la matrice carrée de coefficients $\int_{\Omega} \omega_i(\mathbf{x}) \omega_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ est inversible.

Étape C. On considère finalement le problème

$$\begin{cases} -\nu \Delta \tilde{\omega} = \mathbf{rot} \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta \tilde{\psi} = \tilde{\omega} & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n \tilde{\psi} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \tilde{\psi} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (11)$$

On vérifie facilement qu'il admet la formulation variationnelle équivalente

Trouver $(\tilde{\psi}, \tilde{\omega})$ dans $H_0^1(\Omega) \times X(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad b(\tilde{\omega}, \varphi) &= -\frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{rot} \varphi)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \\ \forall \mu \in X(\Omega), \quad a(\tilde{\omega}, \mu) + b(\mu, \tilde{\psi}) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Là encore, les arguments usuels permettent de prouver que ce problème admet une solution unique.

Théorème 1. Pour toute donnée \mathbf{f} dans $L^2(\Omega)^2$, un couple (ψ, ω) de $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ vérifie le système (3)(8)(9)(10)(12) si et seulement si il est associé à une solution (\mathbf{u}, p) du problème (1) par les relations

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot} \psi \quad \text{et} \quad \omega = \mathbf{rot} \mathbf{u} \quad \text{dans } \Omega, \quad \psi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0. \quad (13)$$

Preuve. Le problème (1) et le système (3)(8)(9)(10)(12) ont chacun une solution unique. Il suffit donc de vérifier que, si un couple (ψ, ω) est associé à (\mathbf{u}, p) par (13), les traces λ_i de ψ sur Γ_i satisfont (10). On note d'après (1) que $\mathbf{f} - \nu \mathbf{rot} \omega$ est un gradient. Comme $\mathbf{rot} \psi_j$ appartient à $H_0^1(\Omega)^2$, on obtient

$$\frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{rot} \psi_j)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{rot} \omega, \mathbf{rot} \psi_j \rangle = \langle \mathbf{rot} \tilde{\omega}, \mathbf{rot} \psi_j \rangle + \sum_{i=1}^I \lambda_i \langle \mathbf{rot} \omega_i, \mathbf{rot} \psi_j \rangle.$$

La quantité $\langle \mathbf{rot} \tilde{\omega}, \mathbf{rot} \psi_j \rangle$ est égale à $\langle \Delta \omega_j, \tilde{\psi} \rangle$, donc est nulle, et la quantité $\langle \mathbf{rot} \omega_i, \mathbf{rot} \psi_j \rangle$ est égale à $\int_{\Omega} \omega_i(\mathbf{x}) \omega_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$, d'où le résultat.

3. Le problème discret

On suppose maintenant que Ω est un polygone et on introduit une famille régulière de triangulations $(\mathcal{T}_h)_h$ de Ω , au sens usuel [4, Chap. I, Def. A.2], h désignant le maximum des diamètres des triangles de \mathcal{T}_h . Les espaces discrets sont alors définis par

$$\mathbb{X}_h = \{ \mu_h \in C^0(\bar{\Omega}); \forall K \in \mathcal{T}_h, \mu_h|_K \in P_2(K) \}, \quad \mathbb{M}_h = \mathbb{X}_h \cap H_0^1(\Omega), \quad (14)$$

où $P_2(K)$ désigne l'espace des restrictions à K des polynômes à deux variables de degré ≤ 2 . On construit une solution discrète (ω_h, ψ_h) à partir de la formule

$$\psi_h = \tilde{\psi}_h + \sum_{i=1}^I \lambda_{ih} \psi_{ih}, \quad \omega_h = \tilde{\omega}_h + \sum_{i=1}^I \lambda_{ih} \omega_{ih}, \tag{15}$$

où les $(\tilde{\psi}_h, \tilde{\omega}_h)$, (ψ_{ih}, ω_{ih}) et λ_{ih} sont définis comme suit.

Étape A. On résout le problème discret

Trouver $(\tilde{\psi}_h, \tilde{\omega}_h)$ dans $\mathbb{M}_h \times \mathbb{X}_h$ tel que

$$\begin{aligned} \forall \varphi_h \in \mathbb{M}_h, \quad \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \omega_{ih})(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{rot} \varphi_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= 0, \\ \forall \mu_h \in \mathbb{X}_h, \quad a(\omega_{ih}, \mu_h) - \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \tilde{\psi}_{ih})(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{rot} \mu_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathcal{I}_h \rho_i)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{rot} \mu_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{16}$$

où \mathcal{I}_h désigne l'opérateur d'interpolation de Lagrange à valeurs dans \mathbb{X}_h . Puis on pose

$$\psi_{ih} = \tilde{\psi}_{ih} + \mathcal{I}_h \rho_i. \tag{17}$$

Étape B. On résout le système linéaire consistant à trouver les coefficients λ_{ih} , $1 \leq i \leq I$, tels que

$$\sum_{i=1}^I \lambda_{ih} \int_{\Omega} \omega_{ih}(\mathbf{x}) \omega_{jh}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{rot} \psi_{jh})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad 1 \leq j \leq I. \tag{18}$$

Étape C. On résout le problème discret

Trouver $(\tilde{\psi}_h, \tilde{\omega}_h)$ dans $\mathbb{M}_h \times \mathbb{X}_h$ tel que

$$\begin{aligned} \forall \varphi_h \in \mathbb{M}_h, \quad \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \tilde{\omega}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{rot} \varphi_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{rot} \varphi_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \\ \forall \mu_h \in \mathbb{X}_h, \quad a(\tilde{\omega}_h, \mu_h) - \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \tilde{\psi}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{rot} \mu_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

On déduit des arguments usuels [4, Chap. III, Lemma 2.4] que les problèmes (16) et (19) admettent chacun une solution unique et, en outre, que la matrice de coefficients $\int_{\Omega} \omega_{ih}(\mathbf{x}) \omega_{jh}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$, $1 \leq i, j \leq I$, est inversible. De plus, la propriété de convergence suivante se démontre à partir de [4, Chap. III, Thm. 2.6] ou [3, §6.3].

Théorème 2. *Si la famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_h$ est uniformément régulière, les couples (ψ_h, ω_h) , définis pour chaque h par les relations (15) à (19), vérifient la propriété de convergence*

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\|\psi - \psi_h\|_{H^1(\Omega)} + \|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}) = 0. \tag{20}$$

On ne peut établir aucune estimation d'erreur pour ces solutions (ψ_h, ω_h) . Toutefois ceci est dû à la faible régularité des solutions du problème de Stokes dans un polygone non convexe, combinée avec le fait que la discrétisation proposée n'est pas optimale [4, Chap. III, Thm. 2.8]. Un meilleur résultat peut être obtenu si l'on utilise la discrétisation proposée dans [1] où, grâce à l'ajout d'un terme de stabilisation, la convergence et une estimation d'erreur sont établies pour une famille de triangulations régulière et des espaces discrets constitués de fonctions affines par morceaux.

4. Une expérience numérique

Le domaine Ω que l'on considère est le rectangle $]0, 2[\times]-2, 2[$ privé de deux obstacles, l'un triangulaire et l'autre quadrilatéral, comme indiqué dans la partie gauche de la Fig. 1. On résout le système discret (15) à (19) dans le cas

$$\nu = 10^{-3}, \quad \mathbf{f}(x, y) = \mathbf{rot}(\sin(\pi x) \sin(2\pi y)). \tag{21}$$

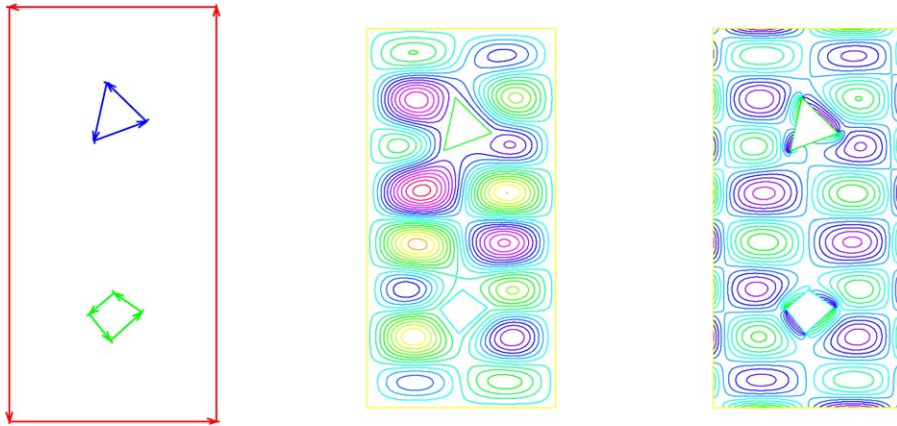


Fig. 1. Une expérience numérique.

Fig. 1. A numerical experiment.

Les parties médiane et droite de la figure représentent respectivement les isovaleurs de la fonction-courant ψ_h et du tourbillon ω_h . Les valeurs de ψ_h sur la frontière des deux obstacles sont égales à 0,103 (triangle) et $-0,038$ (quadrilatère).

Références

- [1] M. Amara, C. Bernardi, Convergence of a finite element discretization of the Navier–Stokes equations in vorticity and stream function formulation, *Modél. Math. Anal. Numér.* 33 (1999) 1033–1056.
- [2] C. Bernardi, V. Girault, Y. Maday, Mixed spectral element approximation of the Navier–Stokes equations in the stream-function and vorticity formulation, *IMA J. Numer. Anal.* 12 (1992) 565–608.
- [3] C. Bernardi, V. Girault, P.-A. Raviart, *Incompressible Viscous Fluids and their Finite Element Discretization*, in preparation.
- [4] V. Girault, P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer-Verlag, 1986.
- [5] R. Glowinski, Numerical Methods for Fluids (Part 3), in: P.G. Ciarlet, J.-L. Lions (Eds.), *Handbook of Numerical Analysis*, vol. IX, Elsevier, 2003.
- [6] R. Glowinski, O. Pironneau, Numerical methods for the first biharmonic equation and for the two-dimensional Stokes problem, *SIAM Rev.* 21 (1979) 167–212.