

Analyse harmonique

Le problème des diviseurs de zéro pour les groupes de Lie nilpotents

Jean Ludwig^a, Christian Masse^a, Carine Molitor-Braun^b

^a Département de mathématiques, Université de Metz, île du Saulcy, 57045 Metz cedex 1, France

^b Laboratoire de mathématiques, Université du Luxembourg, 162A, avenue de la Faïencerie, 1511 Luxembourg, Luxembourg

Reçu le 4 octobre 2004 ; accepté après révision le 11 janvier 2006

Disponible sur Internet le 9 février 2006

Présenté par Michel Duflou

Résumé

Soit G un groupe de Lie nilpotent non abélien connexe. Alors il existe $0 \neq \alpha \in C_c(G)$ et $0 \neq \xi \in L^2(G)$ tels que $\alpha * \xi = 0$, contrairement à ce qui se passe pour le groupe \mathbb{R}^n par exemple. De plus, l'ensemble des diviseurs de zéro est un sous-ensemble total de $L^2(G)$. Ce résultat est d'abord démontré pour le groupe de Heisenberg H_n où il se base sur l'existence de fonctions de Schwartz f non nulles vérifiant $f * (X_k + iY_k) = 0$ pour $1 \leq k \leq n$. **Pour citer cet article : J. Ludwig et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).**

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

The problem of zero divisors for nilpotent Lie groups. Let G be a non-Abelian, connected, nilpotent Lie group. Then there exist $0 \neq \alpha \in C_c(G)$ and $0 \neq \xi \in L^2(G)$ such that $\alpha * \xi = 0$, contrary to what happens for the group \mathbb{R}^n . Moreover, the set of zero divisors is a total subset of $L^2(G)$. This result is first proven for the Heisenberg group H_n where it is based on the existence of non-trivial Schwartz functions f satisfying $f * (X_k + iY_k) = 0$ for $1 \leq k \leq n$. **To cite this article : J. Ludwig et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).**

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

The problem of the zero divisors (1.1) may be stated in the following way: let $\alpha \in C_c(G)$ and $\xi \in L^2(G)$ be such that $\alpha * \xi = 0$. Does this imply that $\alpha = 0$ or $\xi = 0$ in $L^2(G)$?

The answer to this question is yes in the case of the group \mathbb{R}^n for instance: this results from the fact that the Fourier transform of any function in $C_c(\mathbb{R}^n)$ is analytic.

Because of the similarities of the connected, simply connected, nilpotent Lie groups with \mathbb{R}^n , it seems reasonable to assume that the answer is the same for these groups, even though they are non-Abelian. However, this is not correct and is shown by the following theorem:

Theorem 5.2. *For every connected, non-Abelian nilpotent Lie group G , there exist $0 \neq \alpha \in C_c(G)$ and $0 \neq \xi \in L^2(G)$ such that $\alpha * \xi = 0$. Moreover, for these groups, the set of $\xi \in L^2(G)$ for which there exists $0 \neq \alpha \in C_c(G)$ such that $\alpha * \xi = 0$ is a total subset of $L^2(G)$.*

Adresses e-mail : ludwig@poncelet.univ-metz.fr (J. Ludwig), masse@poncelet.univ-metz.fr (C. Masse), carine.molitor@uni.lu (C. Molitor-Braun).

If G is simply connected, this theorem is deduced from the corresponding result for the Heisenberg group H_n , as every connected, simply connected, non-Abelian nilpotent Lie group admits a closed subgroup that is isomorphic to the Heisenberg group H_1 .

For the Heisenberg group H_n , we first show the existence of non-trivial Schwartz functions f satisfying $f * (X_k + iY_k) = 0$ for $1 \leq k \leq n$ where $\{X_k, Y_k, Z \mid 1 \leq k \leq n\}$ is the set of generators of the Lie algebra \mathfrak{h}_n of H_n , satisfying $[X_k, Y_k] = Z$ for $1 \leq k \leq n$ (Proposition 2.1). Such a function f is for instance given by

$$f(x, y, z) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\lambda) e^{-\frac{\lambda}{4} \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2)} e^{-i\lambda z} d\lambda,$$

where $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ such that $\text{supp } \Phi \subset]0, +\infty[$.

One has similar results for the equations $f * (X_k - iY_k) = 0$ for $1 \leq k \leq n$.

If now $0 \neq f \in \mathcal{S}(H_n)$ such that $f * (X + iY) = 0$ for some non-zero $X, Y \in \mathfrak{h}_n$, take $0 \neq \varphi \in C_c^\infty(H_n)$ with $\alpha = \varphi * (X - iY) \neq 0$. Then $\alpha * f^* = 0$, even though $\alpha \neq 0$ and $f \neq 0$ (Theorem 3.1). The fact that the set of L^2 -zero divisors is total in $L^2(H_n)$, results from an L^2 version of Wiener's tauberian theorem (Theorem 3.3 and Theorem 3.5).

If G is a connected, non-simply connected, nilpotent Lie group, we have the same result. This is then due to the existence of a non-trivial compact subgroup in G . As a matter of fact, if G is a locally compact group which admits a non-trivial compact subgroup, then there exist $0 \neq \alpha \in C_c(G)$ and $0 \neq \xi \in L^2(G)$ such that $\alpha * \xi = 0$ and the set of zero divisors is again total in $L^2(G)$ (Theorem 4.1).

1. Introduction

Historiquement, le problème des diviseurs de zéro a été étudié par Linnell [3,4], notamment dans le cas des groupes discrets. Si G est un groupe localement compact, le problème s'énonce de la façon suivante :

Problem 1.1. Soit $\alpha \in C_c(G)$ et soit $\xi \in L^2(G)$ tels que $\alpha * \xi = 0$ dans $L^2(G)$. Peut-on en déduire que $\alpha = 0$ ou $\xi = 0$ dans $L^2(G)$?

Ici $C_c(G)$ désigne l'ensemble des fonctions continues à support compact dans G .

Il est clair que la réponse à cette question est oui dans le cas du groupe \mathbb{R}^n : si $\xi \neq 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, en appliquant la transformation de Fourier à l'équation $\alpha * \xi = 0$, on remarque que la transformée de Fourier $\hat{\alpha}$ doit être une fonction analytique, nulle sur un ensemble de mesure non nulle, ce qui est impossible si $\alpha \neq 0$. D'ailleurs, la réponse à la question est la même pour tout groupe localement compact abélien sans sous-groupe compact [5].

Il est bien connu qu'il est possible de définir dans le cadre des groupes de Lie nilpotents l'analogie de la transformation de Fourier. On dispose alors de résultats correspondant à ceux de \mathbb{R}^n , comme par exemple le théorème de Plancherel, le théorème taubérien de Wiener...

A cause de ces similarités, il est alors naturel de penser qu'il ne sera pas possible de trouver des diviseurs de zéros non triviaux $\alpha \in C_c(G)$ et $\xi \in L^2(G)$ dans le cas des groupes de Lie nilpotents connexes. Mais ceci est faux. Cela découle de l'existence d'opérateurs différentiels invariants à gauche sur le groupe de Heisenberg H_n , dont le noyau dans L^2 est non trivial. Plus précisément, il existe des fonctions f non nulles dans l'algèbre de Schwartz de H_n telles que $f * (X_k + iY_k) = 0$ pour $1 \leq k \leq n$ (voir paragraphe 2).

Nous utilisons les solutions de ces équations $f * (X_k + iY_k) = 0$ pour construire des diviseurs de zéro. En fait, il existe beaucoup de choix possibles pour construire de tels diviseurs. En effet, l'ensemble des fonctions de Schwartz sur H_n qui sont annulées, par convolution à gauche, par au moins une fonction continue à support compact non nulle est un sous-ensemble total de $L^2(H_n)$ (voir paragraphe 3).

L'existence de diviseurs de zéro pour le groupe de Heisenberg permet de prouver le même résultat pour tous les groupes de Lie nilpotents non abéliens, connexes et simplement connexes (voir paragraphe 5).

Enfin, nous prouvons l'existence de diviseurs de zéro dans $C_c(G)$, respectivement $L^2(G)$ pour les groupes nilpotents connexes, non simplement connexes ; cela repose sur l'existence, pour de tels groupes, d'un sous-groupe compact non trivial (voir paragraphes 4 et 5).

2. Groupe de Heisenberg

Le groupe de Heisenberg H_n peut être défini comme ceci : en tant qu'ensemble, H_n s'identifie avec \mathbb{R}^{2n+1} . Le produit de groupe est alors défini par la formule :

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = \left(x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(x \cdot y' - x' \cdot y) \right),$$

où $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$, $z, z' \in \mathbb{R}$ et où $x \cdot y'$ désigne le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^n .

L'algèbre de Lie \mathfrak{h}_n de H_n est engendrée par $2n + 1$ générateurs $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z$ vérifiant les relations $[X_k, Y_k] = Z$ pour $1 \leq k \leq n$. Elle peut alors être identifiée à \mathbb{R}^{2n+1} , de telle sorte que l'application exponentielle coïncide avec l'application identique sur \mathbb{R}^{2n+1} . En outre, l'algèbre \mathfrak{h}_n agit sur l'espace $C^\infty(H_n)$ des fonctions de classe C^∞ sur H_n par la formule :

$$f * U(g) = \frac{d}{ds} f(g \cdot \exp(sU)) \Big|_{s=0},$$

pour tous $g \in G$, $U \in \mathfrak{h}_n$. En particulier, si nous notons $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$,

$$f * (X_k + iY_k)(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right) f(x, y, z) + \frac{i}{2}(x_k + iy_k) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z).$$

Proposition 2.1. *Il existe $f \in \mathcal{S}(H_n)$ non nulle telle que $f * (X_k + iY_k) = 0$ pour $1 \leq k \leq n$, où $\mathcal{S}(H_n)$ désigne l'espace de Schwartz du groupe H_n .*

Démonstration. Soit $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\text{supp } \Phi \subset]0, +\infty[$ et définissons une fonction f sur H_n par

$$f(x, y, z) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\lambda) e^{-\frac{i}{4} \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2)} e^{-i\lambda z} d\lambda.$$

Alors $f \in \mathcal{S}(H_n)$, comme transformée de Fourier partielle d'une fonction de Schwartz et $f * (X_k + iY_k) = 0$ pour $1 \leq k \leq n$. \square

Remarque 1. (i) Pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, soit $\chi_\lambda(x, y, z) = e^{-i\lambda z}$ et $P_\lambda = \sum_{k=1}^n \mathbb{R}Y_k + \mathbb{R}Z$. Considérons la représentation induite $\pi_\lambda = \text{ind}_{P_\lambda}^{H_n} \chi_\lambda$. L'ensemble des classes d'équivalence des π_λ , $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, est un ouvert dense de $\widehat{H_n}$, le dual de H_n . Soit maintenant f la fonction construite dans la preuve de la Proposition 2.1. Alors $\pi_\lambda(f)$ est un opérateur à noyau, dont le noyau vaut

$$f_\lambda(u, v) = \int_{P_\lambda} f((u, 0, 0) \cdot (0, y, z) \cdot (-v, 0, 0)) e^{-i\lambda z} dy dz = 2^{n+1} \pi^{1+n/2} \Phi(-\lambda) |\lambda|^{-n/2} e^{-\frac{|\lambda|}{2} \sum_{k=1}^n (u_k^2 + v_k^2)}$$

si $\lambda < 0$ et $f_\lambda(u, v) = 0$ si $\lambda > 0$. Donc $\pi_\lambda(f) \neq 0$ pour tout $\lambda \in]-\infty, 0[$ tel que $\Phi(-\lambda) \neq 0$.

(ii) Plus généralement, soit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tel que

$$g(x, y, z) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\lambda) \psi(x, y) e^{-\frac{i}{4} \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2)} e^{-i\lambda z} d\lambda$$

soit une fonction de Schwartz. Ceci est le cas si et seulement si $(\lambda, x, y) \mapsto \Phi(\lambda) \psi(x, y) e^{-\frac{i}{4} \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2)}$ est une fonction de Schwartz. Alors g est solution du système $g * (X_k + iY_k) = 0$ pour $1 \leq k \leq n$, si et seulement si $\psi(x, y)$ est une fonction holomorphe en $x + iy$. Toutes les solutions sont « essentiellement de ce type », c. à d. si $f \in \mathcal{S}(H_n)$ tel que $f * (X_k + iY_k) = 0$, $1 \leq k \leq n$, alors la transformée de Fourier partielle par rapport à la troisième variable \hat{f}^3 vérifie $\hat{f}^3(\cdot, \cdot, \lambda) = 0$ si $\lambda \in]0, +\infty[$. De plus, pour tout $\lambda > 0$, il existe une fonction $F(x, y, \lambda)$ holomorphe en $x + iy$, telle que $\hat{f}^3(x, y, -\lambda) = e^{-\frac{i}{4} \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2)} F(x, y, \lambda)$.

(iii) On a des résultats analogues pour les équations $f * (X_k - iY_k) = 0$ dans $\mathcal{S}(H_n)$. Dans ce cas, il faut prendre $\text{supp } \Phi \subset]-\infty, 0[$ et remplacer $e^{-\frac{i}{4} \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2)}$ par $e^{\frac{i}{4} \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2)}$.

3. Diviseurs de zéro dans le cas du groupe de Heisenberg

Commençons ce paragraphe par la construction de diviseurs de zéro pour le groupe de Heisenberg.

Théorème 3.1. *Pour le groupe de Heisenberg H_n , il existe des diviseurs de zéro non triviaux dans $C_c(G)$, respectivement $L^2(G)$.*

Démonstration. Nous avons vu au paragraphe précédent qu'il existe $0 \neq f \in \mathcal{S}(H_n)$ tel que $f * (X + iY) = 0$ pour certains $X, Y \in \mathfrak{h}_n$ non nuls. Par passage à l'adjoint, on obtient $(X - iY) * f^* = 0$, où $f^*(a) = \overline{f(a^{-1})}$. Choisissons $0 \neq \varphi \in C_c^\infty(H_n)$ tel que $\varphi * (X - iY) \neq 0$. On pose alors $\alpha = \varphi * (X - iY)$; donc $\alpha \in C_c^\infty(H_n)$, $\alpha \neq 0$ et $\alpha * f^* = 0$. On peut faire un raisonnement analogue avec $X - iY$ au lieu de $X + iY$. \square

Le but de la suite de ce paragraphe est de prouver le théorème suivant : l'ensemble des applications $\xi \in L^2(H_n)$ telles qu'il existe $0 \neq \alpha \in C_c(H_n)$ vérifiant $\alpha * \xi = 0$ est un sous-ensemble total de \mathbb{R}^n , c. à d. l'ensemble des combinaisons linéaires de telles fonctions engendre \mathbb{R}^n . Ceci est démontré à l'aide d'une version L^2 du théorème taubérien de Wiener expliquée dans ce qui suit.

Définition 3.2. Soit G un groupe localement compact, séparable, de type I, unimodulaire. Soit \widehat{G} l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de G . Pour tout $\xi \in L^2(G)$, le théorème de Plancherel permet d'obtenir un champs d'opérateurs de Hilbert–Schmidt $(\pi(\xi))_{\pi \in \widehat{G}}$ défini presque partout sur \widehat{G} et vérifiant $\|\xi\|_2^2 = \int_{\widehat{G}} \|\pi(\xi)\|_{\text{HS}}^2 d\mu(\xi)$, $d\mu(\xi)$ désignant la mesure de Plancherel. Soit $\mathcal{V} \subset L^2(G)$ un sous-ensemble fermé de $L^2(G)$. Soit $\{\xi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un sous-ensemble dénombrable dense de \mathcal{V} . On appelle support de \mathcal{V} et on note $\text{Supp } \mathcal{V}$ l'ensemble

$$\text{Supp } \mathcal{V} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\pi \in \widehat{G} \mid \pi(\xi_i) \neq 0\},$$

à un ensemble de mesure nulle près. Ici, $\pi(\xi_i)$ désigne l'opérateur de Hilbert–Schmidt donné par le théorème de Plancherel, comme expliqué ci-dessus. L'ensemble $\text{Supp } \mathcal{V}$ est défini à un ensemble de mesure nulle près, est mesurable et ne dépend pas du choix de l'ensemble $\{\xi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

On a alors un résultat de type « Wiener » :

Théorème 3.3. *Soit G un groupe localement compact, séparable, de type I, unimodulaire. Soit $\mathcal{V} \subset L^2(G)$ un sous-espace fermé de $L^2(G)$ invariant par translations à gauche et à droite par des éléments de G . Si $\text{Supp } \mathcal{V} = \widehat{G}$ (à un ensemble de mesure nulle près), alors $\mathcal{V} = L^2(G)$.*

Démonstration. C'est une conséquence d'un résultat plus général de Sutherland [7]. \square

Corollaire 3.4. *Soit G un groupe localement compact, séparable, de type I, unimodulaire. Soit $\mathcal{V} \subset L^2(G)$ un sous-espace fermé de $L^2(G)$ invariant par translations à gauche et à droite par des éléments de G . Supposons qu'il existe un ensemble de mesure nulle $N \subset \widehat{G}$ tel que pour tout $\pi \in \widehat{G} \setminus N$, il existe $\xi \in \mathcal{V}$ tel que $\pi(\xi) \neq 0$. Alors $\mathcal{V} = L^2(G)$.*

D'où le résultat annoncé :

Théorème 3.5. *Considérons $E_{\mathcal{S}} = \{f \in \mathcal{S}(H_n) \mid \exists 0 \neq \alpha \in C_c(H_n), \alpha * f = 0\}$. Alors $\overline{\langle E_{\mathcal{S}} \rangle}^{L^2(H_n)} = L^2(H_n)$, où $\langle E_{\mathcal{S}} \rangle$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par $E_{\mathcal{S}}$.*

Démonstration. L'ensemble $E_{\mathcal{S}}$ est invariant par translations à droite et par conjugaisons, donc également par translations à gauche. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il existe $f \in E_{\mathcal{S}}$ tel que $\pi_\lambda(f) \neq 0$ d'après la Remarque 1 ((i) et (iii)). Le Corollaire 3.4 permet alors de conclure. \square

4. Groupes possédant un sous-groupe compact non trivial

Soit K un groupe compact non trivial. Fixons d’abord quelques notations. Dans toute classe d’équivalence de représentations unitaires irréductibles, fixons un représentant π agissant sur l’espace de Hilbert \mathfrak{H}_π de dimension finie d_π . Dans \mathfrak{H}_π , prenons une base orthonormée $\{e_i^\pi \mid 1 \leq i \leq d_\pi\}$ et définissons les fonctions matricielles ζ_{ij}^π par $\zeta_{ij}^\pi(x) = \langle \pi(x)e_i^\pi, e_j^\pi \rangle$. Elles sont indépendantes du représentant π choisi dans la classe de π . On a $\zeta_{ij}^\pi * \zeta_{kl}^{\pi'} = 0$ si $\pi \not\sim \pi'$ et $\zeta_{ij}^\pi * \zeta_{kl}^\pi = \frac{1}{d_\pi} \delta_{jk} \zeta_{il}^\pi$. De plus, comme K est non trivial, il existe au moins deux représentations unitaires irréductibles non équivalentes (la représentation triviale et une autre) (voir [2,6]). Ceci nous amène au résultat suivant :

Théorème 4.1. *Soit G un groupe localement compact possédant un sous-groupe compact non trivial K . Alors il existe des diviseurs de zéro non triviaux $\alpha \in C_c(G)$ et $\xi \in L^2(G)$. L’ensemble des $\xi \in L^2(G)$ tels qu’il existe $0 \neq \alpha \in C_c(G)$ vérifiant $\alpha * \xi = 0$ est un sous-ensemble total de $L^2(G)$. Ce résultat est vrai en particulier lorsque G lui-même est compact.*

Démonstration. Soient $\pi, \pi' \in \widehat{K}$ non équivalents. Soient $g \in C_c(G)$ et $f \in L^2(G)$ tels que $\alpha = g * \zeta_{ij}^{\pi'} \neq 0$ et $\xi = \zeta_{kl}^\pi * f \neq 0$ pour certains indices i, j, k, l . Alors $\alpha \in C_c(G)$, $\xi \in L^2(G)$ et $\alpha * \xi = 0$, ce qui prouve l’existence de diviseurs de zéros non triviaux dans $C_c(G)$, respectivement $L^2(G)$. De plus, $\{\zeta_{ij}^\pi \mid \pi \in \widehat{K}, 0 \leq i, j \leq d_\pi\}$ est total dans $C(K)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ (et donc aussi pour la norme $\|\cdot\|_1$, K étant compact) et $C(K) * L^2(G)$ est dense dans $L^2(G)$. Donc $\{\zeta_{ij}^\pi * f \mid f \in L^2(G), \pi \in \widehat{K}, 0 \leq i, j \leq d_\pi\}$ est total dans $L^2(G)$. \square

5. Groupes de Lie non abéliens, nilpotents, connexes

Même dans ce cas il existe des diviseurs de zéro non triviaux dans $C_c(G)$, respectivement $L^2(G)$. Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 5.1. *Soit G un groupe localement compact sans diviseurs de zéro $0 \neq \alpha \in C_c(G)$ et $0 \neq \xi \in L^2(G)$. Alors la même chose est vraie pour tout sous-groupe fermé de G .*

Démonstration. Soit H un sous-groupe fermé de G . Soit $\alpha \in C_c(H)$, $\alpha \neq 0$. Soit $\xi \in L^2(H)$ tel que $\alpha * \xi = 0$. Soit $0 \neq \varphi \in C_c(G)$ telle que $\varphi * \alpha \neq 0$. Donc $0 \neq \varphi * \alpha$ est une fonction continue à support compact sur G . Alors pour tout $\psi \in C_c(G)$, $\xi * \psi \in L^2(G)$ et $(\varphi * \alpha) * (\xi * \psi) = 0$. Par hypothèse sur G , $\xi * \psi = 0$ pour tout $\psi \in C_c(G)$. Donc $\xi = 0$ dans $L^2(H)$. \square

On obtient alors le théorème final :

Théorème 5.2. *Soit G un groupe de Lie nilpotent, non abélien, connexe quelconque. Pour ce groupe, il existe des diviseurs de zéro non triviaux $\alpha \in C_c(G)$ et $\xi \in L^2(G)$. De plus, l’ensemble des $\xi \in L^2(G)$ tels qu’il existe $0 \neq \alpha \in C_c(G)$ vérifiant $\alpha * \xi = 0$, est un sous-ensemble total de $L^2(G)$.*

Démonstration. (i) Si G est en plus simplement connexe, il contient un sous-groupe fermé isomorphe au groupe de Heisenberg H_1 . Le résultat découle alors du Théorème 3.1, du Théorème 3.5 et du Lemme 5.1.

(ii) Si G n’est pas simplement connexe, alors G contient un sous-groupe compact non trivial (voir [1], p. 161) et on peut conclure par le Théorème 4.1. \square

Remerciements

Recherche réalisée dans le cadre du projet de recherche R1F104C09 de l’Université du Luxembourg.

Références

[1] L. Corwin, F.P. Greenleaf, Representations of Nilpotent Lie Groups and their Applications. Part 1: Basic Theory and Examples, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 18, Cambridge University Press, 1990.

- [2] E. Hewitt, K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis II*, Grundlehren Math. Wiss. in Einzeldarstellungen, Band 152, Springer, 1970.
- [3] P.A. Linnell, Zero divisors and $L^2(G)$, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* 315 (1) (1992) 49–53.
- [4] P.A. Linnell, *Analytic Versions of the Zero Divisor Conjecture*, London Mat. Soc. Lecture Note Ser., vol. 252, 1998.
- [5] C. Masse, *Conjecture des diviseurs de zéro et Propriété (T)*, Thèse, Université de Metz, 2004.
- [6] L. Pukanszky, *Leçons sur les représentations des groupes*, Dunod, Paris, 1967.
- [7] C. Sutherland, L^2 version of Wiener's Tauberian theorem, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* 308 (19) (1989) 543–547.