



Théorie des groupes

Sur les automorphismes du groupe de Cremona

Julie Déserti

IRMAR, UMR 6625 du CNRS, université de Rennes I, 35042 Rennes, France

Reçu le 20 septembre 2005 ; accepté le 10 janvier 2006

Disponible sur Internet le 3 mars 2006

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Nous décrivons le groupe des automorphismes du groupe de Cremona. *Pour citer cet article : J. Déserti, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

On the automorphisms of the Cremona group. We describe the group of automorphisms of the Cremona group. *To cite this article: J. Déserti, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

We proved in [7] that if \mathbf{k} is an uncountable field of characteristic 0, an automorphism of the group $\text{Aut}[\mathbf{k}^2]$ of polynomial diffeomorphisms of \mathbf{k}^2 is the composition of an interior one and the action of an automorphism of the field \mathbf{k} . The goal of this Note is to announce a similar result for an automorphism of the Cremona group $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Each automorphism τ of the field \mathbf{C} naturally acts on $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$; we note $\tau(\cdot)$ this action.

Theorem 0.1. *Let φ be an automorphism of $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. There exists a birational transformation ψ and an automorphism τ of the field \mathbf{C} such that for all f in $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ we have: $\varphi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1})$.*

For the group $\text{Aut}[\mathbf{k}^2]$, we used the tree obtained from the amalgamated product structure of this group (Jung's theorem, [9,11,12]). We do not have such an object for the Cremona group so the proof is essentially different; it is based on a study of maximal Abelian subgroups of the Jonquières group J . Among these groups there are:

$$J_a = \{(x + P(y), y) \mid P \in \mathbf{C}(y)\}, \quad T = \{(x + \alpha, y + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{C}\}, \quad D = \{(\alpha x, \beta y) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{C}^*\};$$

the notation $(f_1(x, y), f_2(x, y))$ stands for $(x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$.

Let G be an uncountable Abelian subgroup of $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$, then each element of G preserves at least one rational vector field and one of the following holds:

Adresse e-mail : julie.deserti@univ-rennes1.fr (J. Déserti).

- G has a periodic element,
- there exists a foliation \mathcal{F} invariant by each element of G .

In the first case, G is not conjugate to J_a .

In the second case we have up to conjugacy one of the two possibilities: G is an uncountable maximal Abelian subgroup of J or G possesses a periodic element.

Let φ be an automorphism of the group $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Applying these to $G = \varphi(J_a)$ we get thanks to the description of the uncountable maximal Abelian subgroups of J : up to conjugacy, $\varphi(J_a) = J_a$ and $\varphi(x+1, y) = (x+1, y)$. We can prove that, up to conjugacies, we have $\varphi(J_a) = J_a$, $\varphi(x+1, y) = (x+1, y)$, $\varphi(T) = T$ and $\varphi(D) = D$.

Then we obtain: after conjugating φ by an interior automorphism and an automorphism of the field \mathbf{C} , the groups T and D are pointwise invariant by φ . Finally, we show that φ preserves (y, x) and $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$. As the Cremona group is generated by $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$ and the involution $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ (Noëther's theorem [6]), we get the announced result.

1. Introduction

Dans [13] Whittaker montre que tout isomorphisme entre les groupes d'homéomorphismes de deux variétés topologiques connexes est induit par un homéomorphisme entre les variétés elles-mêmes. En 1982 Filipkiewicz propose un résultat semblable pour les variétés différentiables ; si M est une variété de classe \mathcal{C}^k nous noterons $\text{Diff}^k(M)$ le groupe des difféomorphismes de classe \mathcal{C}^k de M .

Théorème 1.1 ([8]). *Soient M et N deux variétés connexes respectivement de classe \mathcal{C}^k et \mathcal{C}^j . Si $\varphi : \text{Diff}^k(M) \rightarrow \text{Diff}^j(N)$ est un isomorphisme de groupes, alors k est égal à j et il existe un difféomorphisme $\psi : M \rightarrow N$ de classe \mathcal{C}^k tel que pour tout f dans $\text{Diff}^k(M)$ on ait :*

$$\varphi(f) = \psi f \psi^{-1}.$$

Nous renvoyons à [1] et [2] pour d'autres résultats analogues.

Soit V une variété algébrique complexe définie sur \mathbf{Q} ; notons $\text{Aut}(V)$ le groupe des biholomorphismes de V et $\text{Bir}(V)$ le groupe des transformations birationnelles de V . Puisque V est définie sur \mathbf{Q} , un automorphisme τ du corps \mathbf{C} induit un isomorphisme de $\text{Aut}(V)$ (resp. $\text{kBir}(V)$). Lorsque $V = \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$, nous notons, dans une carte affine (x, y) , un élément f de $\text{Bir}(V)$ par ses deux composantes $(f_1(x, y), f_2(x, y))$. Par exemple $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ est l'involution de Cremona.

Dans [7] nous établissons un analogue du Théorème 1.1 pour le groupe $\text{Aut}[\mathbf{k}^2]$ des automorphismes polynomiaux du plan \mathbf{k}^2 : si \mathbf{k} désigne un corps non dénombrable de caractéristique nulle, alors un automorphisme du groupe $\text{Aut}[\mathbf{k}^2]$ est la composée d'un automorphisme intérieur et de l'action induite par un automorphisme du corps \mathbf{k} . Cet énoncé s'étend au groupe de Cremona $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ décrit par le théorème de Noëther, résultat valable pour tout corps algébriquement clos :

Théorème 1.2 ([6]). *Le groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ est engendré par $\text{PGL}(3, \mathbf{C}) = \text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ et l'involution de Cremona $\sigma(x, y) = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.*

Comme annoncé nous avons le :

Théorème 1.3. *Soit φ un automorphisme du groupe de Cremona. Il existe ψ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ et un automorphisme τ du corps \mathbf{C} tel que pour tout élément f de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$, on ait :*

$$\varphi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}).$$

En d'autres termes le groupe des automorphismes extérieurs de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ s'identifie au groupe des automorphismes du corps \mathbf{C} . Nous présentons ici une esquisse de preuve de ce résultat ; les détails paraîtront ultérieurement.

Pour l'étude des automorphismes de $\text{Aut}[\mathbf{k}^2]$ nous avons largement utilisé les travaux de Lamy [10] qui sont conséquence de la structure de produit amalgamé de ce groupe (théorème de Jung, [9,11,12]). Nous ne disposons pas d'un tel outil pour le groupe de Cremona et la démonstration est donc essentiellement différente. Notons J le groupe de

Jonquières ; c'est le groupe d'invariance de la fibration standard $y = \text{cte}$. Il est isomorphe au produit semi-direct $\text{PGL}(2, \mathbf{C}(y)) \rtimes \text{PGL}(2, \mathbf{C})$. La preuve du Théorème 1.3 repose sur une étude des sous-groupes abéliens maximaux non dénombrables de J et de leurs images par φ . Parmi ceux-ci il y a les groupes suivants :

$$J_a = \{(x + P(y), y) \mid P \in \mathbf{C}(y)\}, \quad T = \{(x + \alpha, y + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{C}\}, \quad D = \{(\alpha x, \beta y) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{C}^*\};$$

tous les trois jouent un rôle important dans la démarche. L'idée est d'étudier leurs images par φ et, de proche en proche, de modifier φ par conjugaison pour qu'ils deviennent tous φ -invariants.

2. Feuilletages

Soit S une surface projective munie d'un feuilletage \mathcal{F} ; notons $\text{Bir}(S, \mathcal{F})$ (resp. $\text{Aut}(S, \mathcal{F})$) le groupe des transformations birationnelles (resp. holomorphes) laissant le feuilletage \mathcal{F} invariant sur la surface S .

Lemme 2.1. *Soit G un sous-groupe abélien non dénombrable de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Tout élément de G fixe un champ de vecteurs rationnel non nul. En particulier tout élément de G préserve au moins un feuilletage holomorphe singulier de $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$.*

Esquisse de preuve. Le groupe G étant non dénombrable il existe un entier n tel que l'ensemble des transformations birationnelles de degré n dans G soit non dénombrable. Sa clôture de Zariski est donc de dimension supérieure ou égale à un et contient des familles à un paramètre f_t de transformations qui commutent ; nous vérifions que le champ $X = \frac{\partial f_t}{\partial t} |_{t=0}$ convient. Si g est un élément quelconque de G , nous constatons, en considérant la famille $g_t = g f_0^{-1} f_t$, que g laisse un feuilletage invariant.

Théorème 2.2. *Soit G un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Alors le groupe G satisfait l'une des propriétés suivantes :*

- G possède un élément de torsion,
- G est conjugué à un sous-groupe de J .

Esquisse de preuve. A partir du Lemme 2.1 nous montrons que G possède un élément périodique ou laisse un feuilletage invariant \mathcal{F} . Plaçons nous dans ce dernier cas. Nous avons à examiner deux situations en liaison avec les travaux de Cantat et Favre [5] décrivant les symétries birationnelles des feuilletages.

(a) Supposons qu'il existe une surface S et une transformation birationnelle ξ de S dans $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ telles que $\text{Aut}(S, \xi^* \mathcal{F}) = \text{Bir}(S, \xi^* \mathcal{F})$. Puisque G est infini, $\text{Aut}(S, \xi^* \mathcal{F})$ l'est ; alors, d'après Cantat et Favre ([5], Théorème 1.1), nous pouvons supposer que :

- ou bien $\xi^* \mathcal{F}$ est invariant par un champ de vecteurs holomorphe,
- ou bien $\xi^* \mathcal{F}$ est une fibration elliptique.

Le groupe G n'étant pas dénombrable le dernier cas n'arrive pas (voir [4]). Examinons donc la possibilité où $\xi^* \mathcal{F}$ est invariant par un champ holomorphe X sur S ; il existe alors, toujours d'après [5], une suite de contractions π de S vers un modèle minimal \tilde{S} de S telle que $\tilde{G} = \pi_*(G)$ soit un sous-groupe de $\text{Aut}(\tilde{S})$. Suivant que \tilde{S} est une surface de Hirzebruch ou $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ nous montrons que ou bien \tilde{G} préserve une fibration rationnelle, ou bien \tilde{G} est un sous-groupe abélien maximal de $\text{PGL}(3, \mathbf{C}) = \text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Dans cette dernière éventualité, \tilde{G} contient un élément de torsion ou coïncide avec le groupe des translations (toujours à conjugaison près).

(b) Lorsque la situation (a) n'a pas lieu, alors, d'après Cantat et Favre ([5], Théorème 1.2 et Exemple 1.3), nous obtenons, à conjugaison près, l'alternative suivante :

- il existe des entiers p, q, r et s tels que $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}), \mathcal{F}) = \{(x^p y^q, x^r y^s), (\alpha x, \beta y) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{C}^*\}$ à revêtement fini près,
- \mathcal{F} est une fibration rationnelle.

Dans le premier cas, nous constatons que les sous-groupes abéliens maximaux non dénombrables de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}), \mathcal{F})$ contiennent des éléments de torsion de tout ordre. Il nous reste à examiner le second cas, autrement dit à étudier les sous-groupes abéliens maximaux non dénombrables de J . \square

3. Sous-groupes abéliens maximaux de J

3.1. Le groupe J_0

Soit G un sous-groupe de J . Notons π la projection de $J \simeq \text{PGL}(2, \mathbf{C}(y)) \rtimes \text{PGL}(2, \mathbf{C})$ sur le second facteur et G_0 le groupe $(\ker \pi) \cap G$. Remarquons que $J_0 = \ker \pi$ est isomorphe à $\text{PGL}(2, \mathbf{C}(y))$. Si f_S est une famille d'éléments d'un groupe G , nous désignons par $\langle f_S \rangle$ le groupe engendré par la famille f_S .

Introduisons les quatre types de sous-groupes de J_0 suivants :

- $J_m = \{(a(y)x, y) \mid a \in \mathbf{C}(y)^*\}$,
- pour tout F dans $\mathbf{C}(y)$ qui n'est pas un carré :

$$J_F = \left\{ \left(\frac{a(y)x + F(y)}{x + a(y)}, y \right) \mid a \in \mathbf{C}(y) \right\},$$

- pour tout c et F dans $\mathbf{C}(y)$ tels que F ne soit pas un carré :

$$I_F^c = \left\langle \left(\frac{F(y)}{x}, y \right), \left(\frac{c(y)x - F(y)}{x - c(y)}, y \right) \right\rangle,$$

- et enfin pour tout B dans $\mathbf{C}(y)^*$:

$$I_B = \left\langle (-x, y), \left(\frac{1}{B(y)x}, y \right) \right\rangle.$$

Remarquons que si F était un carré, le groupe J_F correspondant serait conjugué à J_m . Les groupes I_F^c et I_B ont quatre éléments.

Lemme 3.1. *Soit G un sous-groupe abélien de J_0 . Alors G est, à conjugaison près, un sous-groupe de J_a , J_m , J_F , I_F^c ou I_B .*

La preuve est simple et repose sur la compréhension du groupe $\text{PGL}(2, \mathbf{k})$ pour $\mathbf{k} = \mathbf{C}(y)$.

3.2. Caractérisation de J_a

Voici deux propriétés de J_a qui nous permettront de le distinguer des autres sous-groupes abéliens maximaux non dénombrables de J :

- J_a ne possède pas d'élément de torsion,
- le groupe non résoluble $\{(a(y)x + b(y), v(y)) \mid a \in \mathbf{C}(y)^*, b \in \mathbf{C}(y), v \in \text{PGL}(2, \mathbf{C})\}$ agit par conjugaison sur J_a .

3.3. Étude de J_a

L'étude des sous-groupes abéliens maximaux non dénombrables de J s'effectue suivant la nature de G_0 (Lemme 3.1) et de $\pi(G)$; nous obtenons le :

Théorème 3.2. *Soit G un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de J . Le groupe G vérifie l'une des propriétés suivantes :*

- G contient un élément de torsion,
- G est conjugué à J_a ,

- G est conjugué à T ,
- tout sous-groupe de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ agissant par conjugaison sur G est virtuellement résoluble.

Les Théorèmes 2.2 et 3.2 ajoutés aux propriétés de J_a (cf. 3.2) conduisent au :

Corollaire 3.3. *Soit φ un automorphisme de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Quitte à composer φ par une conjugaison, le groupe J_a est invariant par φ et $\varphi(x + 1, y) = (x + 1, y)$.*

4. Conclusion

Introduisons les groupes suivants : $T_1 = \{(x + \alpha, y) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$, $T_2 = \{(x, y + \beta) \mid \beta \in \mathbb{C}\}$, $D_1 = \{(\alpha x, y) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\}$ et $D_2 = \{(x, \beta y) \mid \beta \in \mathbb{C}^*\}$.

La proposition qui suit est relativement technique ; outre l’abélianité elle utilise par exemple les actions des D_i sur les T_i qui sont transportées par φ .

Proposition 4.1. *Soit φ un automorphisme du groupe de Cremona. Supposons que*

$$\varphi(J_a) = J_a \quad \text{et} \quad \varphi(x + 1, y) = (x + 1, y).$$

Alors il existe un conjugué de φ qui satisfait encore ces deux conditions et qui, de plus, laisse invariant les groupes T_i et D_i .

Par suite φ induit deux automorphismes du groupe des transformations affines de la droite. Le lemme suivant est sans doute bien connu, on peut en trouver une preuve dans [7] :

Lemme 4.2. *Soit ϕ un automorphisme du groupe des transformations affines de la droite complexe. Alors ϕ est la composée d’un automorphisme intérieur et de l’action d’un isomorphisme du corps \mathbb{C} .*

Esquisse de preuve. Les sous-groupes abéliens maximaux du groupe des transformations affines de la droite sont : le groupe des translations et les groupes des transformations affines qui fixent un point. Puisque le premier ne contient pas d’élément de torsion, il est envoyé sur lui-même par ϕ . Il existe donc une bijection additive τ_2 de \mathbb{C} telle que $\phi(z + b) = z + \tau_2(b)$. Quitte à faire une conjugaison par une translation nous pouvons supposer que le groupe des transformations affines qui fixent 0 est invariant par ϕ ; autrement dit il existe une bijection multiplicative τ_1 de \mathbb{C}^* telle que $\phi(az) = \tau_1(a)z$. En remarquant que $\phi(az + a)$ s’écrit $\phi(z + a)\phi(az)$ mais aussi $\phi(az)\phi(z + 1)$ nous obtenons : $\tau_1(a)\tau_2(1) = \tau_2(a)$. Comme $\tau_2(1)$ est non nul, τ_1 est additive donc un isomorphisme de corps et $\phi(az + b) = \tau_1(a)z + \tau_2(1)\tau_1(b)$.

Par suite, pour tous α, β dans \mathbb{C}^* et γ, δ dans \mathbb{C} nous avons :

$$\varphi(\alpha z + \gamma, \beta z + \delta) = (\zeta_1(\alpha)z + \mu\zeta_1(\gamma), \zeta_2(\beta)z + \lambda\zeta_2(\delta))$$

où λ, μ désignent deux complexes non nuls et ζ_1, ζ_2 deux automorphismes du corps \mathbb{C} . En écrivant que $(x + y, y)$ et $(\alpha x, \alpha y)$ commutent, et donc que $\varphi(x + y, y) = (x + \xi(y), y)$ et $\varphi(\alpha x, \alpha y) = (\zeta_1(\alpha)x, \zeta_2(\alpha)y)$ commutent, nous obtenons que $\zeta_1 = \zeta_2$. Ainsi, quitte à composer φ par un automorphisme intérieur et un isomorphisme du corps \mathbb{C} , les groupes T et D sont laissés invariants point par point. Nous constatons, après ces modifications, que les involutions $(x, \frac{1}{y})$ et (y, x) sont fixées par φ . Or le groupe engendré par $D, T, (y, x)$ et $(x, \frac{1}{y})$ contient $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$; de plus, l’involutions de Cremona s’écrit $((x, \frac{1}{y})(y, x))^2$; ces groupes et involutions étant invariants point par point par φ , nous obtenons grâce au Théorème 1.2 le résultat annoncé.

5. Compléments

Nous pouvons déduire du Théorème 1.3 un résultat sur le groupe d’automorphismes du semi-groupe des transformations rationnelles de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$; comme ce semi-groupe contient $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$, nous pouvons parler d’automorphisme intérieur.

Corollaire 5.1. *Un isomorphisme du semi-groupe des transformations rationnelles de $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ dans lui-même est intérieur à composition près par un automorphisme de corps \mathbf{C} .*

Dans l'esprit du théorème de Filipkiewicz, nous avons le résultat suivant :

Corollaire 5.2. *Soient S une surface projective complexe et φ un isomorphisme entre $\text{Bir}(S)$ et $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Il existe une transformation birationnelle $\psi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ et un automorphisme τ du corps \mathbf{C} tels que, pour tout f dans $\text{Bir}(S)$, on ait :*

$$\varphi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}).$$

Corollaire 5.3. *Le groupe des automorphismes du corps $\mathbf{C}(x, y)$ est isomorphe au groupe des automorphismes du groupe de Cremona.*

Remarque 1. Les groupes $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ et $\text{Bir}(\mathbb{P}^n(\mathbf{C}))$ sont isomorphes si et seulement si $n = 2$.
C'est une conséquence de théorèmes récents de Beauville [3].

Remerciements

Je tiens à remercier Serge Cantat et Dominique Cerveau pour avoir encadré ce travail avec enthousiasme et patience. Merci à Stéphane Lamy pour les discussions que nous avons eues.

Références

- [1] A. Banyaga, On isomorphic classical diffeomorphism groups. I, Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1) (1986) 113–118.
- [2] A. Banyaga, The Structure of Classical Diffeomorphism Groups, Math. Appl., vol. 400, Kluwer Academic, Dordrecht, 1997.
- [3] A. Beauville, p -elementary subgroups of the Cremona group, A paraître dans J. Algebra.
- [4] S. Cantat, Dynamique des automorphismes des surfaces complexes compactes, Thèse, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1999.
- [5] S. Cantat, C. Favre, Symétries birationnelles des surfaces feuilletées, J. Reine Angew. Math. 561 (2003) 199–235.
- [6] G. Castelnuovo, Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano, Atti R. Accad. Sci. Torino 36 (1901) 861–874.
- [7] J. Déserti, Sur le groupe des automorphismes polynomiaux du plan affine, A paraître dans J. Algebra.
- [8] R.P. Filipkiewicz, Isomorphisms between diffeomorphism groups, Ergodic Theory Dynamical Systems 2 (1982) 159–171.
- [9] H.W.E. Jung, Über ganze birationale Transformationen der Ebene, J. Reine Angew. Math. 184 (1942) 161–174.
- [10] S. Lamy, L'alternative de Tits pour $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, J. Algebra 239 (2) (2001) 413–437.
- [11] S. Lamy, Une preuve géométrique du théorème de Jung, Enseign. Math. (2) 48 (3–4) (2002) 291–315.
- [12] W. van der Kulk, On polynomial rings in two variables, Nieuw Arch. Wiskunde (3) 1 (1953) 33–41.
- [13] J.V. Whittaker, On isomorphic groups and homeomorphic spaces, Ann. of Math. (2) 78 (1963) 74–91.