Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 233–236
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des groupes

Algèbre de Temperley–Lieb de type B

Claire Vincenti

LAMFA, CNRS UMR6140, 33, rue St Leu, 80039 Amiens cedex 1, France

Reçu le 24 novembre 2004 ; accepté après révision le 6 décembre 2005

Disponible sur Internet le 4 janvier 2006

Présenté par Jacques Tits

Résumé

On donne une présentation duale, correspondant à la présentation duale du groupe d'Artin, de l'algèbre de Temperley–Lieb de type B. En particulier, on obtient une base de cette algèbre en considérant l'image des éléments simples du monoïde dual. Cette algèbre est le plus grand quotient de l'algèbre de Hecke dont les représentations irréductibles sont paramétrées par les paires de diagrammes de Young ayant au plus une colonne dans chaque composante. ***Pour citer cet article : C. Vincenti, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Temperley–Lieb algebra of type *B*. We give a dual presentation, in the sense of the dual presentation of Artin groups, of the Temperley–Lieb algebra of type B. In particular, we obtain a basis of this algebra by considering the homomorphic images of the simple elements of the dual monoid. This algebra is the largest quotient of the Hecke algebra whose irreducible representations are parametrized by pairs of Young diagrams with at most one column in each component. ***To cite this article: C. Vincenti, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

1. L'algèbre de Temperley–Lieb

Soient n un entier supérieur à 2, q et Q des indéterminées. On note $\mathcal{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q, Q)$, et on définit l'algèbre de Hecke HB_n sur $\mathcal{K}$ par la présentation suivante :

Générateurs : t, s_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$;
Relations :

(i) $(t+1)(t-Q) = (s_i+1)(s_i-q) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$;
(ii) $ts_1ts_1 = s_1ts_1t$;
(iii) $ts_i = s_it$ pour $2 \leqslant i \leqslant n-1$;
(iv) $s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-2$;
(v) $s_is_j = s_js_i$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$ et $2 \leqslant |i-j|$.

Adresse e-mail : claire.vincenti@u-picardie.fr (C. Vincenti).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.12.007

Définition 1.1. L'algèbre de Temperley–Lieb TLB_n est le quotient de HB_n par l'idéal (e_1, e_2), où :

$$e_1 = 1 + s_1 + t + s_1t + ts_1 + s_1ts_1 + ts_1t + s_1ts_1t, \tag{1}$$

$$e_2 = 1 + s_1 - Q^{-1}t - Q^{-1}s_1t - Q^{-1}ts_1 - Q^{-1}s_1ts_1 + Q^{-2}ts_1t + Q^{-2}s_1ts_1t. \tag{2}$$

Les représentations irréductibles de HB_n sont paramétrées par les bipartitions de n. Soit HB_2 la sous-algèbre de HB_n engendrée par t et s_1. Les éléments e_1 et e_2 sont, à une constante près, les idempotents respectivement associés aux caractères irréductibles de degré 1 de HB_2 définis par $\chi_1 : t \mapsto Q, s_1 \mapsto q$ et $\chi_2 : t \mapsto -1, s_1 \mapsto q$, correspondant respectivement aux diagrammes $(\square\square, \emptyset)$ et $(\emptyset, \square\square)$.

Théorème 1.2. *L'algèbre TLB_n est semi-simple de dimension $\binom{2n}{n}$. C'est la composante semi-simple de HB_n dont les représentations irréductibles sont paramétrées par les bipartitions de n dont le diagramme contient au plus une colonne par composante, c'est-à-dire dont la restriction à HB_2 ne contient ni χ_1 ni χ_2.*

Démonstration. On utilise la règle de restriction suivante (voir par exemple [5], 7.9, Branching rule) :

Proposition 1.3. *Soit $\gamma = (\gamma^0, \gamma^1)$ une bipartition de n, et χ^γ le caractère de HB_n associé. Alors la décomposition en caractères irréductibles de la restriction de χ^γ à la sous-algèbre de HB_n de type B_{n-1} engendrée par $\{t, s_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n-2\}$ s'écrit $\sum \chi^\alpha$, pour α parcourant les bipartitions de $n-1$ telles que $\alpha \subset \gamma$.*

Soit χ un caractère irréductible de HB_n. On a

$$\left\langle \operatorname{Res}_{HB_2}^{HB_n} \chi, \chi_1 \right\rangle = \left\langle \chi, \operatorname{Ind}_{HB_2}^{HB_n} \chi_1 \right\rangle = 0$$

si et seulement si l'idempotent e_χ associé à χ appartient à l'idéal engendré par e_1. Par conséquent les caractères irréductibles de TLB_n sont exactement les caractères χ de HB_n vérifiant $\langle \operatorname{Res}_{HB_2}^{HB_n} \chi, \chi_1 \rangle = \langle \operatorname{Res}_{HB_2}^{HB_n} \chi, \chi_2 \rangle = 0$, c'est-à-dire, suivant la règle de restriction, les caractères associés aux bipartitions $\gamma = (\gamma^0, \gamma^1)$ de n telles que γ_0 et γ_1 aient chacun au plus une colonne. Si on note k le nombre de lignes de γ^0, on sait que la représentation associée à γ est de dimension $\binom{n}{k}$ [5]. On en déduit la dimension de TLB_n : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. $\square$

Remarque 1. On retrouve l'algèbre de Temperley–Lieb de type B_n considérée par Graham et Lehrer ([3], 5.2), et définie comme le quotient de HB_n par l'idéal (x, ϵ), où

$$\epsilon = 1 + s_1 + s_2 + s_1s_2 + s_2s_1 + s_1s_2s_1, \tag{3}$$

$$x = 1 - Q + (1 - Q)s_1 + t + s_1t + ts_1 + s_1ts_1. \tag{4}$$

Un calcul simple montre qu'on a les égalités $x(t+1) = e_1$ et $x(t-Q) = Q^2e_2$; il en résulte les inclusions entre idéaux $(e_1, e_2) \subseteq (x) \subseteq (x, \epsilon)$. Les deux algèbres, étant de même dimension, sont égales, et TLB_n est le quotient de HB_n par (x).

2. Présentation duale des algèbres de Temperley–Lieb de type *B*

On considère l'ensemble des racines $2n$-ièmes complexes de l'unité, et on choisit l'orientation opposée au sens trigonométrique. On confondra les partitions de $2n$ avec leur représentation dans le disque unité (cf. [2], Section 1). On va identifier le treillis des éléments simples du monoïde de tresses dual BB_n^+ avec celui des partitions de $2n$ sans auto-intersection et stables par demi-tour (voir [1], 4.2). On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des telles partitions minimales non triviales. Un élément $\mathbf{u}$ de $\mathbf{R}$ est appelé long (respectivement court) s'il a exactement une (resp. deux) partie(s) non triviale(s). Sa représentation U dans le disque unité est alors un diamètre (resp. la réunion de deux segments symétriques l'un de l'autre).

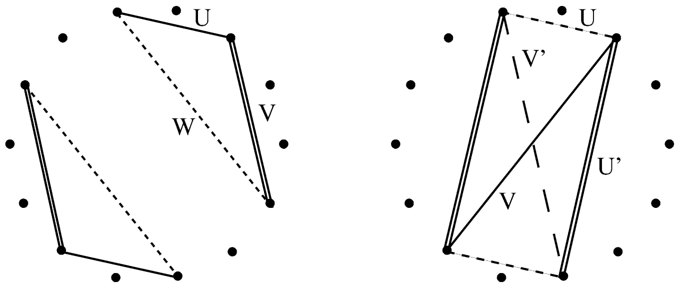

Fig. 1. Triplet et quadruplet admissibles.

Définition 2.1.

(i) Les partitions $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}$ sont parallèles si $U \cap V = \emptyset$;
(ii) un triplet $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{R}^3$ de partitions minimales courtes est admissible si U, V, W forment les côtés de deux triangles directs, symétriques l'un de l'autre et sans intersection ;
(iii) un quadruplet de partitions $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}', \mathbf{v}')$ est admissible si $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$ sont courtes, $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ longues, si la réunion des couples de segments $U \cup U'$ forme un rectangle de diagonales V et V' et si le triangle formé par l'un des segments de U, V, et l'un des segments de U' est direct (les choix de l'un ou l'autre des segments de U sont équivalents).

On définit alors le monoïde de tresses dual BB_n^+ comme le monoïde engendré par $\mathbf{R}$, et soumis aux relations $\mathbf{uv} = \mathbf{vu}$ si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont parallèles, $\mathbf{uv} = \mathbf{vw}$ si $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est admissible, et $\mathbf{uv} = \mathbf{vu}' = \mathbf{u}'\mathbf{v}'$ si $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}', \mathbf{v}')$ est admissible. Comme le groupe des fractions de BB_n^+ est isomorphe au groupe d'Artin associé à HB_n ([1], Section 2), on a un morphisme de monoïdes BB_n^+ vers TLB_n. On note R l'image de $\mathbf{R}$ par ce morphisme.

Théorème 2.2. *L'algèbre TLB_n est l'algèbre engendrée par R avec comme relations* :

(i) $uv = vu$ *si u et v sont parallèles* ;
(ii) $uv = vw$ *si (u, v, w) est admissible* ;
(iii) $uv = vu' = u'v'$ *si (u, v, u', v') est admissible* ;
(iv) $u^2 = (q-1)u + q$, *si $u \in R$ est une réflexion courte* ;
(v) $u^2 = (Q-1)u + Q$, *si $u \in R$ est une réflexion longue* ;
(vi) $u'v = Q - 1 + (Q-1)u' - v - qv' - quv$ *si (u, v, u', v') admissible.*

Démonstration. Les relations (i) à (iii) proviennent du morphisme précité. Les relations (i) à (v) correspondent aux relations de définition de l'algèbre de Hecke HB_n. La relation (vi) est la traduction sous la forme duale de la relation $x = 0$.

Lemme 2.3. *Pour tout triplet (u, v, w) admissible, on a* :

(vii) $vu = -quv - qw - u - v - 1$.

Pour tout quadruplet (u, v, u', v') admissible, on a :

(viii) $vu = Q - 1 + (Q-1)u - v - qv' - quv$;
(ix) $vv' = -q^{-1}Q - q^{-1}Qu - Qu' + q^{-1}(1-Q)uv$;
(x) $uu' = -1 - u' - u + q(Q^{-1} - 1)v + q(Q^{-1} - 1)uv$.

Remarque 2. Les relations (vi) et (viii) ne peuvent pas être obtenues l'une de l'autre par permutation circulaire dans le quadruplet (u, v, u', v') ; cela implique que la distinction entre partitions courtes et longues est nécessaire.

3. Une base

La démonstration du Théorème 3.2 s'effectue suivant le même principe que celle de [4] pour le type A, et s'appuie sur le résultat suivant, qui se démontre facilement au cas par cas, de manière analogue à [4], Proposition 4.

Lemme 3.1. *Le sous-espace de TLB_n linéairement engendré par les images des éléments simples est stable par multiplication par les images des éléments courts de* **R**.

Théorème 3.2. *Les images par le morphisme canonique des éléments simples du monoïde de tresses dual forment une base du $\mathcal{K}$-espace vectoriel TLB_n.*

Démonstration. Le nombre d'éléments simples étant connu [1] et égal à la dimension de l'algèbre, il suffit de montrer que la partie linéairement engendrée par leurs images est une algèbre. D'après le Lemme 3.1, il suffit de vérifier qu'elle est stable par produit par l'image u d'un élément long de **R**. Soit donc $p \in TLB_n$ l'image d'un élément simple **p**. Si **p** n'est divisible que par des éléments courts de **R**, on a le résultat par le Lemme 3.1. Sinon, on décompose $\mathbf{p} = \mathbf{v}\mathbf{p}'$, avec **v** un élément long de **R** ; le diviseur à droite $\mathbf{p}'$ de **p** n'est alors divisible par aucun élément long de **R**. Le Lemme 3.1 implique qu'il suffit de montrer le résultat pour le produit de u avec l'image de **v**, ce qui est une conséquence de la relation (ix).

Remarque 3. L'application $\mathbf{R} \to R$ est par conséquent une bijection, ce qui justifie a posteriori notre notation. D'autre part, la sous-algèbre de *TLB* engendrée par l'image de $\{s_1 \dots s_{n-1}\}$ est une algèbre de Temperley–Lieb de type A_{n-1}. En effet, les relations (i) à (iv) et (vi) impliquent que les relations de définition de l'algèbre de type A_{n-1} (voir [4]) sont vérifiées. Le Théorème 3.2 implique l'égalité des dimensions et permet d'obtenir une base de cette sous-algèbre. On retrouve ainsi l'analogue du Théorème 3.2 pour le type A, connu par [6] et [4].

Références

[1] D. Bessis, The dual braid monoid, Ann. Sci. École. Norm. Sup. (4) 36 (5) (2003) 647–683.
[2] D. Bessis, F. Digne, J. Michel, Springer theory in braid groups and the Birman–Ko–Lee monoid, Pacific J. Math. 205 (2) (2002) 287–309.
[3] J.J. Graham, G.I. Lehrer, Diagram algebras and decomposition numbers at roots of unity, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 36 (4) (2003) 479–524.
[4] S.J. Lee, Dual presentation and linear basis of Temperley–Lieb algebras, math.GR/0403429.
[5] A.V. Zelevinsky, Representations of Finite Classical Groups, a Hopf Algebra Approach, Lecture Notes in Math., vol. 869, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
[6] M.G. Zinno, A Temperley–Lieb algebra coming from the braid group, J. Knot Theory Ramifications 11 (4) (2002) 575–599.