Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

ELSEVIER

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 83–87

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algèbre

La forme trace d'une algèbre simple centrale de degré 4

Markus Rost [a,1], Jean-Pierre Serre [b], Jean-Pierre Tignol [c,1,2]

[a] *Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, Postfach 100131, 33501 Bielefeld, Allemagne*
[b] *Collège de France, 3, rue d'Ulm, 75005 Paris, France*
[c] *Département de mathématique, université catholique de Louvain, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgique*

Reçu le 1er novembre 2005 ; accepté le 4 novembre 2005

Disponible sur Internet le 7 décembre 2005

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$ dans lequel -1 est un carré, et soit A une algèbre simple centrale sur k de degré 4. La forme trace de A s'écrit de façon unique comme une somme (au sens de Witt) $q_2 + q_4$, où q_2 (resp. q_4) est une 2-forme de Pfister (resp. une 4-forme de Pfister). On a $q_4 = 0$ si et seulement si A est cyclique, et $q_2 = 0$ si et seulement si $2.[A] = 0$ dans $\mathrm{Br}(k)$. ***Pour citer cet article : M. Rost et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

The trace form of a central simple algebra of degree 4. Let k be a field of characteristic different from 2 containing a primitive 4-th root of unity. We show that the trace quadratic form of any central simple k-algebra A of degree 4 decomposes in the Witt group of k as the sum of a 2-fold Pfister form q_2 and a 4-fold Pfister form q_4 which are uniquely determined by A. The form q_2 is the norm form of the quaternion algebra Brauer-equivalent to $A \otimes_k A$, and q_4 is hyperbolic if and only if A is a symbol algebra. ***To cite this article: M. Rost et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

1. Énoncé des résultats

Dans cette Note, k désigne un corps de caractéristique différente de 2, contenant un élément i tel que $i^2 = -1$.

Une m-forme de Pfister sur k est un produit tensoriel de m formes quadratiques binaires $\langle 1, a_j\rangle$. Nous poserons $\langle\langle a_1, \dots, a_m\rangle\rangle = \langle 1, a_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, a_m\rangle$. En particulier, la forme norme d'une algèbre de quaternions $Q = (a, b)_k$ est une 2-forme de Pfister : on a $n_Q = \langle\langle a, b\rangle\rangle$.

Soit A une algèbre simple centrale de degré 4 sur k. On note $q_A : A \to k$ la forme quadratique définie par

$$q_A(x) = \mathrm{Trd}_A\big(x^2\big) \qquad \text{pour } x \in A.$$

Adresses e-mail : rost@math.uni-bielefeld.de (M. Rost), serre@dma.ens.fr (J.-P. Serre), tignol@math.ucl.ac.be (J.-P. Tignol).

[1] Le premier et le troisième auteur participent au réseau européen HPRN-CT-2002-00287, KTAGS.

[2] Le troisième auteur est subventionné en partie par le FNRS.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.11.002

Théorème 1. *Il existe une* 2*-forme de Pfister* q_2 *et une* 4*-forme de Pfister* q_4 *sur* k *telles que l'on ait* $q_A = q_2 + q_4$ *dans l'anneau de Witt* $W(k)$*. Ces conditions déterminent* q_2 *et* q_4 *de manière unique. De plus* :

(1) q_2 *est la forme norme de l'algèbre de quaternions équivalente au sens de Brauer à* $A \otimes_k A$.
(2) *Les formes* q_2 *et* q_4 *sont toutes deux divisibles par la forme norme de toute extension quadratique de* k *contenue dans* A.
(3) $q_2 q_4 = 0$ *dans* $W(k)$.

La démonstration sera donnée dans les §§2–4. Elle utilise de façon essentielle l'hypothèse $i \in k$.

Remarque. Puisque les classes d'isomorphisme d'algèbres simples centrales de degré 4 sur k sont canoniquement en bijection avec l'ensemble de cohomologie $H^1(k, \mathrm{PGL}_4)$ (voir par exemple [4, §29.B]), les formes q_2 et q_4 définissent des invariants de Witt de PGL_4 au sens de [2]. De plus, les classes de cohomologie $e_2(q_2) \in H^2(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $e_4(q_4) \in H^4(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ donnent des invariants cohomologiques de degré 2 et de degré 4 de PGL_4.

Le Théorème 1 permet de calculer les puissances extérieures $\lambda^j q_A$ (au sens de [2, p. 63]) :

Corollaire 2. *Pour* $j = 1, \ldots, 15$*, on a dans* $W(k)$:

$$\lambda^j q_A = \begin{cases} 0 & \textit{pour } j \textit{ pair}, \\ q_A & \textit{pour } j \textit{ impair}. \end{cases}$$

La démonstration sera donnée au §5.

Théorème 3. *La forme* q_4 *est hyperbolique* (*i.e. on a* $q_4 = 0$ *dans* $W(k)$) *si et seulement si l'algèbre* A *est cyclique* (*« symbol algebra »*), *c'est-à-dire si elle est engendrée par deux éléments* u, v *tels que* $vu = iuv$.

Si u et v engendrent A et $vu = iuv$, on a u^4, $v^4 \in k$. De plus u^4 est non nul car sinon u engendre un idéal bilatère propre, et de même $v^4 \neq 0$. Si $u^4 = a$ et $v^4 = b$, l'algèbre A est notée $(a, b)_{i,k}$.

Si toute forme quadratique de dimension 9 sur k est isotrope, le Théorème 3 montre que toute algèbre simple centrale de degré 4 sur k est cyclique. Ce résultat a aussi été démontré par Rowen [8, Theorem 1.1].

Exemple. Supposons que A soit un produit tensoriel de deux algèbres de quaternions

$$A = Q_1 \otimes_k Q_2. \tag{1}$$

Alors $q_A = n_{Q_1} \otimes n_{Q_2}$. C'est une 4-forme de Pfister, donc la décomposition du Théorème 1 vaut avec $q_2 = 0$. Le Théorème 3 dit que A est cyclique si et seulement si $n_{Q_1} \otimes n_{Q_2}$ est hyperbolique. Des cas particuliers de ce résultat se trouvent déjà dans [5, p. 122], [7, §7], [9, (3.3)], [6, (7.3)].

De même, lorsque A est la k'/k-norme d'une algèbre de quaternions Q sur une extension quadratique k' de k, alors $q_2 = 0$ et q_4 est la norme de la 2-forme de Pfister n_Q. Si $Q = (a, b)_{k'}$ avec a, $b \in k'^{\times}$, ceci montre que $q_4 = \langle\langle N(a), N(b), T(a), T(b)\rangle\rangle$ où N et T désignent respectivement la norme et la trace de l'extension k'/k (lorsque $T(a)$ ou $T(b)$ est nul, cette formule doit être remplacée par « $q_4 = 0$ »).

2. Réduction au cas où l'algèbre A est un corps

Si A n'est pas un corps, elle admet une factorisation de la forme (1) où Q_2 est une algèbre de quaternions déployée. La forme n_{Q_2} est hyperbolique ; il en est donc de même de q_A. De plus, l'algèbre $A \otimes_k A$ est déployée, et A est cyclique car si $Q_1 = (a_1, b_1)_k$ alors $A = (a_1, b_1^2)_{i,k}$. Dès lors, les théorèmes valent avec $q_2 = q_4 = 0$.

Dans la suite de cette Note, on suppose que A est un corps.

3. Construction de q_4

D'après un théorème d'Albert [1, Theorem 11.9], l'algèbre A contient un sous-corps commutatif maximal K qui est une extension galoisienne de degré 4 de k, de groupe de Galois abélien élémentaire. (Cela résulte aussi du fait que $A \times A^{\mathrm{op}}$ est l'algèbre de Clifford paire d'une forme hermitienne de rang 3 sur une algèbre de quaternions, voir [4, Exercise 4, p. 270].) Soient σ_1, σ_2 et σ_3 les éléments non triviaux du groupe de Galois de K/k. On pose pour $j = 1, 2, 3$,

$$K_j = \bigl\{x \in A \mid xy = \sigma_j(y)x \text{ pour tout } y \in K\bigr\}.$$

Alors $A = K \oplus K_1 \oplus K_2 \oplus K_3$, et cette décomposition est orthogonale pour la forme q_A. On désigne par φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 les restrictions de q_A à K, K_1, K_2, K_3 respectivement, de sorte que

$$q_A = \varphi_0 \oplus \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3. \tag{2}$$

Lemme 4. *Pour $x \in K_1$ et $y \in K_2$, soit*

$$b(x, y) = (1 + i)xy + (1 - i)yx.$$

Alors $b(x, y) \in K_3$ et $\varphi_3(b(x, y)) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$.

Démonstration. Pour $x \in K_1$, $y \in K_2$ et $z \in K$ on a $xz = \sigma_1(z)x$ et $yz = \sigma_2(z)y$, donc $(xy)z = \sigma_3(z)(xy)$ et $(yx)z = \sigma_3(z)(yx)$. Par conséquent, $xy \in K_3$ et $yx \in K_3$, donc $b(x, y) \in K_3$.

Comme $(1+i)^2 + (1-i)^2 = 0$ et $(1+i)(1-i) = 2$, on a $\operatorname{Trd}(b(x, y)^2) = 4\operatorname{Trd}(x^2y^2)$ car $\operatorname{Trd}(xyxy) = \operatorname{Trd}(yxyx)$ et $\operatorname{Trd}(xy^2x) = \operatorname{Trd}(x^2y^2) = \operatorname{Trd}(yx^2y)$. Il suffit dès lors de prouver que $4\operatorname{Trd}(x^2y^2) = \operatorname{Trd}(x^2)\operatorname{Trd}(y^2)$. Or, $x^2, y^2 \in K$ et $\sigma_1(x^2) = x^2$, $\sigma_2(y^2) = y^2$, donc

$$\operatorname{Trd}\bigl(x^2y^2\bigr) = x^2y^2 + \sigma_1\bigl(x^2y^2\bigr) + \sigma_2\bigl(x^2y^2\bigr) + \sigma_3\bigl(x^2y^2\bigr) = \bigl(x^2 + \sigma_2\bigl(x^2\bigr)\bigr)\bigl(y^2 + \sigma_1\bigl(y^2\bigr)\bigr)$$

tandis que $\operatorname{Trd}(x^2) = x^2 + \sigma_1(x^2) + \sigma_2(x^2) + \sigma_3(x^2) = 2(x^2 + \sigma_2(x^2))$ et $\operatorname{Trd}(y^2) = 2(y^2 + \sigma_1(y^2))$. □

Ce lemme montre que les formes φ_1, φ_2, φ_3 de rang 4 « permettent la composition ». D'après [3, Theorem 2.10], il existe une 2-forme de Pfister φ et des éléments $r_1, r_2 \in k^\times$ tels que

$$\varphi_1 = \langle r_1\rangle \otimes \varphi, \qquad \varphi_2 = \langle r_2\rangle \otimes \varphi, \qquad \varphi_3 = \langle r_1r_2\rangle \otimes \varphi.$$

La forme $q_4 = \langle 1, r_1, r_2, r_1r_2\rangle \otimes \varphi$ est une 4-forme de Pfister et l'Éq. (2) donne

$$q_A = (\varphi_0 - \varphi) + q_4 \qquad \text{dans } W(k). \tag{3}$$

On montre dans la section suivante que $\varphi_0 - \varphi$ est équivalente au sens de Witt à une 2-forme de Pfister.

4. Calcul de φ

Soient L_1, L_2 les sous-corps de K fixés respectivement par σ_1 et σ_2. On choisit $a_1, a_2 \in k$ tels que $L_1 \simeq k(\sqrt{a_1})$ et $L_2 \simeq k(\sqrt{a_2})$. Alors $K = L_1 \otimes_k L_2$ et

$$\varphi_0 = \langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle. \tag{4}$$

Soit A_1 le centralisateur de L_1 dans A. C'est une algèbre de quaternions sur L_1 contenant L_2, donc

$$A_1 = (a_2, \ell)_{L_1} \qquad \text{pour un certain } \ell \in L_1^\times.$$

Quitte à multiplier ℓ par un carré de L_1, on peut supposer que sa trace $T_{L_1/k}(\ell)$ est non nulle. Par ailleurs, la restriction de q_A à A_1 est le transfert pour la trace de L_1 à k de la forme trace de A_1. Comme $A_1 = K \oplus K_1$, on en déduit $\varphi_0 \oplus \varphi_1 = (T_{L_1/k})_*(\langle 2\rangle\langle\langle a_2, \ell\rangle\rangle)$. Or, $\varphi_0 = (T_{L_1/k})_*(\langle 2\rangle\langle\langle a_2\rangle\rangle)$, donc

$$\varphi_1 = (T_{L_1/k})_*\bigl(\langle 2\ell\rangle\langle\langle a_2\rangle\rangle\bigr) = \langle 2T_{L_1/k}(\ell)\rangle\langle\langle a_2, a_1N_{L_1/k}(\ell)\rangle\rangle.$$

Il en résulte $\varphi = \langle\langle a_2, a_1N_{L_1/k}(\ell)\rangle\rangle$, donc, par (4), $\varphi_0 - \varphi = \langle a_1\rangle\langle\langle a_2, N_{L_1/k}(\ell)\rangle\rangle$ dans $W(k)$. Comme $\langle\langle a_1, N_{L_1/k}(\ell)\rangle\rangle = 0$, on a aussi $\varphi_0 - \varphi = \langle\langle a_2, N_{L_1/k}(\ell)\rangle\rangle$ dans $W(k)$. Dès lors, si l'on pose $q_2 = \langle\langle a_2, N_{L_1/k}(\ell)\rangle\rangle$, l'Éq. (3) donne $q_A = q_2 + q_4$.

L'unicité des formes q_2 et q_4 résulte de [2, p. 49, Lemma 22.2].

Pour voir que q_2 est la forme norme de l'algèbre de quaternions équivalente au sens de Brauer à $A \otimes_k A$, on utilise $A \otimes_k L_1 = A_1 = (a_2, \ell)_{L_1}$ dans $\mathrm{Br}(L_1)$. En prenant la corestriction de L_1 à k et en utilisant la formule de projection, on en déduit $A \otimes_k A = (a_2, N_{L_1/k}(\ell))_k$ dans $\mathrm{Br}(k)$, ce qui établit l'assertion. [Variante : utiliser le fait que $w_2(q_A)$, vu comme élément de $\mathrm{Br}_2(k)$, est égal à la classe de $A \otimes A$, cf. e.g. [4, p. 142].]

Si L est une extension quadratique de k contenue dans A, alors $A \otimes_k L$ n'est pas un corps, donc le calcul du §2 montre que l'extension des scalaires à L rend q_2 et q_4 hyperboliques. Cela entraîne que q_2 et q_4 sont toutes deux divisibles par la forme norme de L. Il en résulte que $q_2 q_4 = 0$ dans $W(k)$, ce qui termine la preuve du Théorème 1.

5. Démonstration du Corollaire 2

À toute forme quadratique q, la formule

$$\lambda_t(q) = \sum t^j \lambda^j(q)$$

associe une série à coefficients dans $W(k)$, voir [2, p. 63]. Si q est une m-forme de Pfister avec $m \geqslant 2$ on montre (par récurrence sur m) que l'on a :

$$\lambda_t(q) = 1 + t\left(\frac{1 - t^{2^m}}{1 - t^2}\right) q + t^{2^m}.$$

Par ailleurs, l'isométrie $q_A \oplus \langle 1, 1, 1, 1\rangle \simeq q_2 \oplus q_4$ donne, par la propriété multiplicative des séries λ_t,

$$\lambda_t(q_A) \cdot \lambda_t\big(\langle 1, 1, 1, 1\rangle\big) = \lambda_t(q_2) \cdot \lambda_t(q_4).$$

Comme $q_2 q_4 = 0$ dans $W(k)$ et $\lambda_t(\langle 1, 1, 1, 1\rangle) = (1+t)^4 = 1 + t^4$, on en déduit $\lambda_t(q_A) = 1 + t\frac{1-t^{16}}{1-t^2}(q_2 + q_4) + t^{16}$, ce qui établit le corollaire.

6. Démonstration du Théorème 3

Si A est engendrée par deux éléments u, v tels que $vu = iuv$, la restriction de q_A au sous-espace vectoriel engendré par 1, u^2, v^2 et u^2v^2 est une 2-forme de Pfister q. L'orthogonal de ce sous-espace contient les éléments u, v, uv, uv^2, uv^3, u^2v, qui engendrent un sous-espace totalement isotrope de dimension 6, donc $q_A = q$ dans $W(k)$, ce qui montre à la fois que $q_4 = 0$ et que $q_2 = q$. Pour établir la réciproque, on utilise la description de q_4 donnée au §3,

$$q_4 = \varphi \oplus \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3,$$

et la formule du §4,

$$\varphi = \langle\langle a_2, a_1 N_{L_1/k}(\ell)\rangle\rangle.$$

La forme q_4 contient donc $\langle a_2\rangle \oplus \varphi_1 \oplus \varphi_3$ comme sous-forme de dimension 9. Si q_4 est hyperbolique, cette sous-forme est isotrope donc on peut trouver un élément $z \in K_1 \oplus K_3$ tel que

$$\mathrm{Trd}_A\big(z^2\big) = -4a_2. \tag{5}$$

Soit $s \in K$ tel que $s^2 = a_2$. Alors $\sigma_1(s) = \sigma_3(s) = -s$, donc s anticommute avec z et commute avec z^2. Il en résulte $(s+z)^2 = a_2 + z^2 \in k(z^2) \subsetneq k(z)$. Par ailleurs, (5) entraîne $\mathrm{Trd}_A((s+z)^2) = 0$, donc

$$T_{k(z^2)/k}\big((s+z)^2\big) = 0. \tag{6}$$

Par conséquent, $k(z^2) \neq k$. Comme le degré de l'extension $k(z)/k$ divise 4, le degré de $k(z^2)/k$ est 2, et (6) entraîne $(s+z)^4 \in k$. D'après le théorème de Skolem–Noether, il existe un élément $v \in A^\times$ tel que $v(s+z) = i(s+z)v$. Cela montre que l'algèbre A est cyclique. Le Théorème 3 est ainsi démontré.

7. Involutions unitaires

Conservons les hypothèses et notations du Théorème 1, et supposons de plus que A admette un anti-automorphisme involutif τ tel que $\tau(i) = -i$. Choisissons une telle involution τ, et posons $S = \{x \in A \mid \tau(x) = x\}$ et $k_0 = k \cap S$. Si $x \in S$, on a $q_A(x) \in k_0$. La restriction de q_A à S est une k_0-forme quadratique sur S, que nous noterons q_τ :

$$q_\tau(x) = \mathrm{Trd}_A\bigl(x^2\bigr) \in k_0 \qquad \text{pour } x \in S.$$

La forme q_τ est une « k_0-forme » de q_A : son image par l'application $W(k_0) \to W(k)$ est égale à q_A.

Des méthodes semblables à celles utilisées ci-dessus établissent le résultat suivant :

Théorème 5. *Il existe une* 2*-forme de Pfister* $q_{2,\tau}$ *et une* 4*-forme de Pfister* $q_{4,\tau}$ *sur* k_0 *telles que* $q_\tau = q_{2,\tau} + q_{4,\tau}$ *dans* $W(k_0)$. *Ces conditions déterminent* $q_{2,\tau}$ *et* $q_{4,\tau}$ *de manière unique. De plus* :

(1) $q_{2,\tau}$ *est la forme norme de l'algèbre de quaternions équivalente au sens de Brauer à l'algèbre discriminante de* (A, τ) (voir [4, §10] pour la définition de cette algèbre) ;

(2) $q_{4,\tau} = 0$ *si et seulement si* A *est engendrée par deux éléments* u, v *tels que* $\tau(u) = u$, $\tau(v) = v$ *et* $vu = iuv$.

Remarque. Par extension des scalaires à k, les formes de Pfister $q_{2,\tau}$ et $q_{4,\tau}$ donnent les formes q_2 et q_4 du Théorème 1 ; cela résulte de l'unicité de la décomposition $q_A = q_2 + q_4$.

Références

[1] A.A. Albert, Structure of Algebras, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1961. MR0123587 (23 #A912) Zbl 0023.19901.

[2] S. Garibaldi, et al., Cohomological Invariants in Galois Cohomology, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003. MR1999383 (2004f:11034) Zbl pre01959122.

[3] M. Kneser, et al., Composition of quaternary quadratic forms, Compositio Math. 60 (1986) 133–150. MR0868134 (88a:11037) Zbl 0612.10015.

[4] M.-A. Knus, et al., The Book of Involutions, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998. MR1632779 (2000a:16031) Zbl 0955.16001.

[5] W. Kuyk, Generic construction of non-cyclic division algebras, J. Pure Appl. Algebra 2 (1972) 121–130. MR0302688 (46#1832) Zbl 0239.16008.

[6] P.J. Morandi, B.A. Sethuraman, Kummer subfields of tame division algebras, J. Algebra 172 (1995) 554–583. MR1322417 (96e:16020) Zbl 0840.16013.

[7] L. Risman, Non-cyclic division algebras, J. Pure Appl. Algebra 11 (1977/1978) 199–215. MR0491809 (58#11007) Zbl 0369.16017.

[8] L.H. Rowen, Division algebras over C_2- and C_3-fields, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002) 1607–1610. MR1887005 (2002m:16020) Zbl 1010.11065.

[9] J.-P. Tignol, Cyclic and elementary Abelian subfields of Malcev–Neumann division algebras, J. Pure Appl. Algebra 42 (1986) 199–220. MR0857567 (87m:16041) Zbl 0602.16020.