

Probabilités

Invariance des probabilités de retour sur des groupes localement compacts

Driss Gretete

LATP, Centre de mathématiques et informatiques, université de Provence, Aix-Marseille I, 9, rue Frédéric Joliot-Curie,
13453 Marseille cedex 13, France

Reçu le 20 juillet 2005 ; accepté après révision le 18 octobre 2005

Disponible sur Internet le 28 novembre 2005

Présenté par Marc Yor

Résumé

On construit un invariant pour un groupe localement compact séparable, compactement engendré et unimodulaire. Si G est un tel groupe et F une densité de probabilité sur G symétrique bornée et admettant un moment d'ordre 2 (relativement à la métrique des mots) alors la donnée asymptotique de $n \mapsto F^{*(2n)}(e)$ ne dépend pas de F . A titre d'exemple on montre que la probabilité de retour sur $\text{sol}(K)$ où K est un p -corps, se comporte comme $\exp(-t^{1/3})$, ce qui inclut le cas de $\text{sol}(\mathbb{Q}_p)$ conjecturé dans un article par Pittet et Saloff-Coste et publié récemment par Mustapha. *Pour citer cet article : D. Gretete, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Invariance of return probabilities on locally compact groups. We construct an asymptotic invariant for locally compact separable, compactly generated unimodular groups. If G is such a group and if F is a symmetric bounded density on it with second order moment (with respect to a word metric), we show that the asymptotic behavior of $n \mapsto F^{*(2n)}(e)$ does not depend on the choice of the density F . As an example we show that the asymptotic of the return probabilities on $\text{sol}(K)$ where K is a p -field behaves like $\exp(-t^{1/3})$. In the case where $K = \mathbb{Q}_p$ this answers a question of Pittet and Saloff-Coste published recently by Mustapha. *To cite this article : D. Gretete, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction et énoncés des résultats

Soit G un groupe localement compact, compactement engendré unimodulaire et séparable, d'élément neutre e , muni d'une mesure de Haar notée μ . Soit ν une mesure de probabilité sur G à densité F symétrique bornée. On considère $\Omega = G^{\mathbb{N}}$, muni de la structure borelienne produit, $P = \delta_e \otimes \nu^{\otimes \mathbb{N}}$ la probabilité produit sur Ω , où δ_e désigne la mesure de Dirac au point e .

Soit $X_n : \Omega \rightarrow G$ la n -ème projection canonique, X_0 la variable certaine égale à e .

Adresse e-mail : gretete@cmi.univ-mrs.fr (D. Gretete).

En considérant $Z_n = \prod_{i=0}^n X_i$, on définit la marche sur G associée à ν . Si $A \subset G$ est un borelien, $P(Z_n \in A)$ est la probabilité de rejoindre A au temps n , en partant de e à l’instant 0. On considère pour deux fonctions f et g à valeurs réelles définies sur une partie I non majorée de \mathbb{R} , les relations

$$f \leq g \iff \exists a, b > 0, \exists r > 0, \forall t \in I \cap]r, +\infty[; bt \in]r, +\infty[\text{ et } f(t) \leq ag(bt),$$

$$f(t) \asymp g(t) \iff (f(t) \leq g(t) \text{ et } g(t) \leq f(t)).$$

On entend par comportement asymptotique de f , la donnée d’un représentant de la classe de f pour la relation \asymp ainsi définie.

Pour un groupe discret de type fini, Pittet et Saloff-Coste ont démontré dans [7] que le comportement asymptotique de $P(Z_n \in A)$ ne dépend pas de la mesure ν vérifiant certaines hypothèses. Pour des références générales sur les marches aléatoires sur des groupes localement compacts, nous citons [10] et [11].

Dans toute la suite on note pour un voisinage de e relativement compact qui engendre G , $U^0 = \{e\}$ et pour tout entier $n > 0$, $U^n = \{\prod_{k=1}^n x_k \mid x_1, \dots, x_n \in U\}$. On définit pour tout $x \in G$, $|x|_U = \min\{n \mid x \in U^n\}$.

Le résultat principal de cette Note s’énonce comme suit :

Théorème 1.1. *Soit G un groupe localement compact unimodulaire séparable, compactement engendré. Soient F_1, F_2 deux densités de probabilité symétriques bornées, telles que :*

- (1) *Il existe des voisinages ouverts U_1, U_2 de e relativement compacts, symétriques qui engendrent G , sur lesquels $\inf_{U_i} F_i > 0, i \in \{1, 2\}$.*
- (2) *F_i admet un moment d’ordre 2, i.e. : $\int_G |s|_{U_i}^2 F_i(s) d\mu(s)$ est finie.*

Alors on a : $F_1^{*(2t)}(e) \asymp F_2^{*(2t)}(e)$.

D’après les résultats de [2,3,6] on obtient de manière élémentaire $F^{*(2t)}(e) \asymp P(Z_{2t} \in U)$. Ce qui permet de conclure de ce théorème que les probabilités de retour fournissent un invariant du groupe. Dans la suite nous considérons l’exemple d’un groupe résoluble sur un corps local noté $\text{sol}(K)$. Notre référence principale sur les notations et les résultats concernant les corps locaux est [12]. Soit K un p -corps, on note $\text{mod}_K(a)$ la fonction modulaire associée à $x \rightarrow ax$.

On définit le groupe $\text{sol}(K)$ comme étant le produit semi direct de K^* par K^2 , où K^* agit sur K^2 par les automorphismes $a \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. On peut écrire

$$\text{sol}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & x \\ 0 & a^{-1} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in K^*, x, y \in K \right\}.$$

Le résultat sur $\text{sol}(K)$ s’énonce comme suit :

Théorème 1.2. *La probabilité de retour de la marche aléatoire sur $\text{sol}(K)$ a le comportement asymptotique de $\exp(-t^{1/3})$.*

2. Méthode de démonstration du Théorème 1.1

Soit $R(G)$ l’algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs de convolution à droite R_F où F est un élément borné de $L^2(G)$. On note $\Delta_i = \text{Id} - R_{F_i}$ le laplacien associé à F_i et ε_i la forme de Dirichlet qui est la forme quadratique associée à Δ_i . On démontre par des arguments analogues à ceux de [7] le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Sous les hypothèses du Théorème 1.1, a lors il existe une constante $C > 1$ telle que $\varepsilon_{\nu_1} \leq C\varepsilon_{\nu_2}$.*

Le lemme suivant est obtenu avec quelques modifications, à partir de [4].

Lemme 2.2. Soit \mathcal{A} une algèbre de von Neumann, τ une trace sur \mathcal{A} normale fidèle semi finie. Soient x et y deux éléments de \mathcal{A} , autoadjoints positifs, tels que $x \leq y$ et $\text{sp}(x), \text{sp}(y)$ inclus dans $[0, 1]$, g une fonction continue croissante sur $[0, 1]$, et positive sur $[r, 1]$ où $r \in]0, 1[$. Si $1_{[r,1]}$ désigne la fonction indicatrice de $[r, 1]$ et $h = g1_{[r,1]}$, alors on a : $\tau(h(x)) \leq \tau(h(y))$.

Nous donnons maintenant une esquisse de la démonstration du Théorème 1.1.

En remplaçant pour $i \in 1, 2$, F_i par $F_i^{*(2p)}$ où p est assez grand, on se ramène aux hypothèses du Lemme 2.1. On conserve les notations du Lemme 2.1 et on prend $c = C^{-1}$, $r = 1 - c$. On considère h définie sur $[0, 1]$ par $h(\lambda) = 1_{[r,1]}(\lambda)(e^{(\lambda-1)^t} - e^{-ct})$.

On définit comme dans [5] une trace sur $R(G)$ en posant pour tout élément positif $T \in R(G)$, $\tau(T) = \|F\|_2^2$ si $T^{1/2} = R_F$ et $\tau(T) = +\infty$ sinon. D’après le Lemme 2.1, on a $R_{F_2} \leq I - cI + cR_{F_1}$; donc par application du Lemme 2.2 on obtient $F_2^{*(2t)}(e) \leq F_1^{*(2t)}(e)$, et en échangeant les rôles de F_1 et F_2 on obtient donc l’équivalence souhaitée.

3. Méthode de démonstration du Théorème 1.2

L’ensemble $V = V_1^{-1} \cup V_1$ où

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \pi^r u & 0 & R \\ 0 & \pi^{-r} u^{-1} & R \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; r = 0, 1, -1; u \in K^* \right\}$$

est un système de générateurs de $\text{sol}(K)$. On considère pour tout entier $n > 0$,

$$\Omega_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & x \\ 0 & a^{-1} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in K^*, \text{mod}_K(a) \in [q^{-n}, q^n], x, y \in \pi^{-n} R \right\}.$$

Soit μ une mesure de Haar sur $\text{sol}(K)$, normalisée de sorte que $\mu(\Omega_n) = (2n + 1)q^{2n}$.

En appliquant des arguments analogues à ceux de [9] on obtient le comportement de la marche sur $\text{sol}(K)$. On considère les flèches

$$d : \text{sol}(K) \rightarrow K^*, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & x \\ 0 & a^{-1} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto a, \quad w : K^* \rightarrow \mathbb{Z}, \quad a \mapsto -\log_q(\text{mod}_K(a)).$$

La démonstration du Théorème 1.2 repose sur le lemme suivant :

Lemme 3.1. Si s_1, \dots, s_t sont des éléments de V tels que pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, $\text{mod}_K(d(s_1 \cdots s_i)) \in [q^{-n}, q^n]$ alors $s_1 \cdots s_t \in \Omega_n$.

Esquisse de la démonstration du théorème (comparer avec [1]).

Soient S_1, S_2, \dots, S_t les variables aléatoires obtenues en projetant Z_1, \dots, Z_t sur \mathbb{Z} . En utilisant le Lemme 3.1 et [8] on obtient

$$\begin{aligned} F^{*(2t)}(e) &\geq P(Z_{2t} \in \Omega_n) / \mu(\Omega_n) \geq P(Z_1 \in \Omega_n, Z_2 \in \Omega_n, \dots, Z_{2t} \in \Omega_n) / \mu(\Omega_n) \\ &\geq P(S_1 \in [-n, n], \dots, S_{2t} \in [-n, n]) / \mu(\Omega_n) \geq \exp\left(-\frac{t}{n^2} - n\right), \end{aligned}$$

et en choisissant n tel que $n^3 \asymp t$ on obtient $F^{*(2t)}(e) \geq \exp(-t^{1/3})$. Or d’après [6], on a l’inégalité $F^{*(2t)}(e) \leq \exp(-t^{1/3})$, d’où le résultat.

Références

[1] G. Alexopoulos, A lower estimate for central probabilities on polycyclic groups, *Canad. J. Math.* 44 (1992) 897–910.

- [2] C. Berg, J.P.R. Christensen, On the relation between amenability of locally compact groups and the norms of convolution operators, *Math. Ann.* 208 (1974) 149–153.
- [3] C. Berg, J.P.R. Christensen, Sur la norme des opérateurs de convolution, *Invent. Math.* 23 (1974) 173–178.
- [4] L. Brown, H. Kosaki, Jensen’s inequality in semi-finite von Neumann algebras, *J. Operator Theory* 23 (2005) 3–19.
- [5] J. Dixmier, *Les Algèbres d’opérateurs dans l’espace Hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [6] W. Hebisch, L. Saloff-Coste, Gaussian estimates for Markov chains and random walks on groups, *Ann. Probab.* 21 (1993) 673–709.
- [7] C. Pittet, L. Saloff-Coste, On the stability of the behavior of random walks on groups, *J. Geometric Anal.* 10 (2000) 713–737.
- [8] C. Pittet, L. Saloff-Coste, On random walks on wreath products, *Ann. Probab.* 30 (2) (2002) 948–977.
- [9] C. Pittet, L. Saloff-Coste, Random walks on finite rank solvable groups, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 5 (4) (2003) 313–342.
- [10] N. Varopoulos, Convolution powers on locally compact groups, *Bull. Sci. Math.* 111 (1987) 333–342.
- [11] N. Varopoulos, L. Saloff-Coste, X. Coulhon, *Analysis and Geometry on Groups*, Cambridge University Press, 1992.
- [12] A. Weil, *Basic Number Theory*, Springer-Verlag, 1967.

Further reading

- [13] S. Mustapha, Marches aléatoires sur certains groupes unimodulaires p -adiques, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 340 (5) (2005) 369–372.