Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 593–596
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Logique

Note sur les corps différentiellement clos valués

Nicolas Guzy

Institut de mathématique, Université de Mons-Hainaut, le Pentagone, 6, avenue du Champ de Mars, B-7000 Mons, Belgium

Reçu le 20 juillet 2005 ; accepté le 9 septembre 2005

Présenté par Jean-Yves Girard

Résumé

Dans le papier de Guzy et Point, Differential topological fields, on établit la modèle-complétion $(OVF)^*_D$ de la théorie des corps différentiels ordonnés valués OVF_D. Les modèles de cette théorie sont des corps ordonnés différentiellement clos (la théorie *CODF* fut étudiée par Singer) qui possèdent un sous-anneau non trivial convexe (pour l'ordre) comme anneau de valuation. Nous établissons ici l'analogue valué d'un résultat de Singer : si K est un modèle de $(OVF)^*_D$ alors $K(\mathrm{i})$ ($\mathrm{i}^2 = -1$) est un modèle de la théorie des corps différentiellement clos valués qui est la modèle-complétion de la théorie des corps différentiels non trivialement valués de caractéristique nulle. ***Pour citer cet article : N. Guzy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Note on differentially closed valued fields. In the paper by Guzy and Point, Differential topological fields, the model-completion $(OVF)^*_D$ of the theory of ordered valued differential fields OVF_D is established. Models of this theory are closed ordered differential fields (the theory *CODF* was studied by Singer) which have a non-trivial convex (for the order) subring as valuation ring. Here we prove the valued analogue of a result of Singer: if K is a model of $(OVF)^*_D$ then $K(\mathrm{i})$ ($\mathrm{i}^2 = -1$) is a model of the theory of differentially closed valued fields which is the model-completion of the theory of non-trivially valued differential fields of characteristic zero. ***To cite this article: N. Guzy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

1. Introduction

Soit A un domaine commutatif de caractéristique nulle. Une *relation de divisibilité linéaire* (l.d. relation) sur A est une relation binaire $\mathcal{D}(\cdot,\cdot)$ sur A telle que :

$\mathcal{D}$ est transitive, $\neg\mathcal{D}(0,1)$, compatible avec $+$ et., notamment $\mathcal{D}(a,b)$ et $\mathcal{D}(a,c)$ implique $\mathcal{D}(a,b+c)$, et pour tout $c \neq 0$, on a $\mathcal{D}(a,b)$ implique $\mathcal{D}(a.c,b.c)$, et soit $\mathcal{D}(a,b)$ ou $\mathcal{D}(b,a)$. Une l.d. relation $\mathcal{D}$ sur le domaine A induit un anneau de valuation $\mathcal{O}_A$ du corps de fraction $F := Frac(A)$ de A :

$$\mathcal{O}_A = \left\{\frac{a}{b}\colon a,b \in A,\ b \neq 0,\ \mathcal{D}(b,a)\right\}.$$

Adresse e-mail : nicolas.guzy@umh.ac.be (N. Guzy).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.09.042

La valuation correspondante $v_{\mathcal{D}}$ sur $Frac(A)$ est définie par :

$$\text{pour tout } a, b \in A, \quad v_{\mathcal{D}}(a) \leqslant v_{\mathcal{D}}(b) \iff \mathcal{D}(a, b).$$

On a une bijection entre l'ensemble des l.d. relations et l'ensemble des sous-anneaux de valuation de $Frac(A)$ (voir Section (4.2) dans [3]).

Soit $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ le langage des corps ordonnés valués c'est-à-dire $\mathcal{L}_{\text{corps}} \cup \{<, \mathcal{D}, c\}$ où $<$ est la relation binaire d'ordre pour les corps, $\mathcal{D}$ est une l.d. relation et c est le symbole constant qui témoigne d'un élément de valuation non nulle. Soit $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}^{*}$ le langage $\mathcal{L}_{\mathcal{D}} \cup \{D\}$ où D est le symbole de dérivation. On va s'intéresser aux corps ordonnés valués $\langle K, <, v, c\rangle$ où l'anneau de valuation, qu'on note par $\mathcal{O}_K$, est convexe pour l'ordre c'est-à-dire il y a une relation de compatibilité qui s'exprime de la manière suivante :

$$\forall x, y \quad 0 < |x| < |y| \Rightarrow \mathcal{D}(y, x).$$

Cette $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$-théorie sera notée *OVF*. Nous savons que la $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$-théorie des corps réels-clos valués *RVF* (voir [1]) est la modèle-complétion de la $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$-théorie universelle *OVF*.

Dans [2], nous avons établi la modèle-complétion $(OVF)_D^{*}$ de la $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}^{*}$-théorie des corps différentiels ordonnés valués, notée OVF_D. Cette modèle-complétion consiste en la $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}^{*}$-théorie *CODF* (voir [5]) et les axiomes de la $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$-théorie *OVF*.

Rappelons brièvement l'axiomatisation de la $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}^{*}$-théorie $(OVF)_D^{*}$:

– la $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$-théorie *RVF*,
– le schéma d'axiomes (DL) pour les corps ordonnés différentiels.
  Pour un corps différentiel ordonné valué $\langle K, D, <, c\rangle$, le schéma (DL) dit que : pour tout polynôme différentiel $f(X) = f^{*}(X, X', \ldots, X^{(n)})$ d'ordre n dans $K\{X\}$, pour tout ϵ in $K^{>0}$, $(\exists \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in K)(f^{*}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = 0 \wedge s_f^{*}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \neq 0) \Rightarrow ((\exists z)(f(z) = 0 \wedge s_f(z) \neq 0 \wedge \bigwedge_{i=0}^{n}(|z^{(i)} - \alpha_i| > \epsilon)))$ où f^{*} est le polynôme f vu comme polynôme ordinaire en les variables $X, X', \ldots, X^{(n)}$ et s_f^{*} est la dérivée partielle du polynôme f^{*} en la variable non différentielle $X^{(n)}$.

Soit K un modèle de $(OVF)_D^{*}$. Nous allons montrer que le corps différentiel valué $K(\mathrm{i})$ où $\mathrm{i}^2 = -1$ $(D(\mathrm{i}) = 0)$ est un modèle de la théorie des corps différentiels algébriquement clos valués satisfaisant le schéma d'axiomes (DL) (voir Définition 2.1). Ce schéma (DL) a été introduit dans un formalisme purement topologique dans [2] afin d'obtenir en particulier la modèle-complétion de la théorie des corps non trivialement valués munis d'une dérivation (voir [2, Corollaire 5.2]).

2. Le schéma d'axiomes (DL)

Dans la suite, nous utilisons la terminologie usuelle en ce qui concerne l'algèbre différentielle et la théorie de la valuation. Nous désignerons en particulier par s_f le séparant du polynôme différentiel non nul f en une indéterminée différentielle et f^{*} sera le polynôme f vu comme un polynôme ordinaire en les variables $X, X^{(1)}, \ldots, X^{(N)}$ où N est l'ordre en la variable différentielle X du polynôme différentiel f.

Rappelons le schéma d'axiomes (DL) dans le cadre des corps différentiels valués.

Définition 2.1. Un corps différentiel valué $\langle L, D, v\rangle$ satisfait le schéma (DL) si pour tout polynôme différentiel $f(X) = f^{*}(X, X', \ldots, X^{(n)}) \in \mathcal{O}_L\{X\}$ d'ordre n, pour tout $\epsilon \in \mathcal{O}_L \setminus \{0\}$,

$$(\exists \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{O}_K)\big(f^{*}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = 0 \wedge s_f^{*}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \neq 0\big) \Rightarrow$$
$$\left((\exists z)\left(f(z) = 0 \wedge s_f(z) \neq 0 \wedge \bigwedge_{i=0}^{n}\big(v(z^{(i)} - \alpha_i) > v(\epsilon)\big)\right)\right).$$

Définition 2.2. Soient $\langle L, v\rangle$ un corps valué et $\langle \hat{L}, w\rangle$ une extension de corps valué de $\langle L, v\rangle$. Considérons un élément $\hat{l}$ de $\hat{L}$. On dit que $\hat{l}$ est infinitésimal par rapport à L si $v(\hat{l}) > v(L^{\times})$ où $v(L^{\times})$ est le groupe des valeurs de L.

Rappelons d'abord un résultat classique d'extension des dérivations qui sera utile dans la preuve de notre théorème.

Lemme 2.3 (voir Corollaire 1.7 dans [4]). *Si V est une variété et W est une sous-variété du torseur de V, noté $\tau(V)$, toutes deux définies sur le corps différentiel K, et W se projettant de façon dominante sur K. Si $(\bar{a},\bar{b})$ est un point générique de la variété W alors la dérivation de K s'étend en une dérivation de $K(\bar{a},\bar{b})$ satisfaisant $D(\bar{a})=\bar{b}$.*

Prouvons maintenant le théorème précédemment annoncé qui est l'analogue valué du Théorème de Singer (voir [6]).

Théorème 2.4. *Soit K un modèle de $(OVF)^*_D$. Alors $K(\mathrm{i})$ est un corps algébriquement clos valué qui satisfait le schéma d'axiomes (DL) ($K(\mathrm{i})$ sera donc différentiellement clos valué).*

Démonstration. Puisque K est en particulier un corps réel-clos, on obtient que $K(\mathrm{i})$ est un corps algébriquement clos valué (puisqu'on peut étendre la valuation à toute extension algébrique d'un corps valué).

Pour que $K(\mathrm{i})$ soit un modèle du schéma d'axiomes (DL), on doit montrer que si $f(Z)$ est un polynôme différentiel d'ordre N à coefficients dans $\mathcal{O}_{K(\mathrm{i})}$ et $(a_0,\ldots,a_N)$ est un N-uplet d'éléments de $\mathcal{O}_{K(\mathrm{i})}$ tel que $f^*(a_0,\ldots,a_N)=0$ et $\frac{\partial f^*}{\partial Z^{(N)}}(a_0,\ldots,a_N)\neq 0$ alors pour tout ϵ dans $\mathcal{O}_{K(\mathrm{i})}\setminus\{0\}$ il existe un élément z dans $K(\mathrm{i})$ tel que $f(z)=0$ et $\bigwedge_{j=0}^N v(z^{(j)}-a_j)>v(\epsilon)$.

Substituons $Z_1+\mathrm{i}\cdot Z_2$ à Z (où Z_1 et Z_2 sont de nouvelles indéterminées différentielles) et on écrit $f(Z)$ comme $f_1(Z_1,Z_2)+\mathrm{i}\cdot f_2(Z_1,Z_2)$ où $f_1(Z_1,Z_2)$ et $f_2(Z_1,Z_2)$ sont des polynômes différentiels en les indéterminées différentielles Z_1,Z_2. De même, pour tout $j\in\{0,\ldots,N\}$, on peut écrire a_j comme $b_j+\mathrm{i}\cdot c_j$ pour certains éléments b_j,c_j dans K. Considérons un élément ϵ dans $\mathcal{O}_K\setminus\{0\}$.

Nous prouvons maintenant que la théorie suivante est consistante :

$OVF_D\cup\mathcal{D}(K)$ où $\mathcal{D}(K)$ est le diagramme de K, et il existe des éléments z_1,z_2 tels que $f_1(z_1,z_2)=f_2(z_1,z_2)=0$ et $\bigwedge_{j=0}^N v(z_1^{(j)}-b_j)>v(\epsilon)\wedge\bigwedge_{j=0}^N v(z_2^{(j)}-c_j)>v(\epsilon)$.

Dès lors la preuve sera terminée. En effet, considérons un modèle K' de cette théorie. Une copie de K sera contenue dans K'. En utilisant le fait que $(OVF)^*_D$ est la modèle-complétion de la OVF_D, on pourra plonger K' dans un modèle $\widehat{K}$ de $(OVF)^*_D$. Puisque $K\prec_{\mathcal{L}^*_{\mathcal{D}}}\widehat{K}$, il existe donc des éléments u_1,u_2 dans K tel que $f_1(u_1,u_2)=f_2(u_1,u_2)=0$ et $\bigwedge_{j=0}^N v(u_1^{(j)}-b_j)>v(\epsilon)\wedge\bigwedge_{j=0}^N v(u_2^{(j)}-c_j)>v(\epsilon)$. En posant $u=u_1+\mathrm{i}\cdot u_2\in K(\mathrm{i})$, on en déduit aisément que $f(u)=0\wedge s_f(u)\neq 0\wedge\bigwedge_{i=0}^n v(u^{(i)}-a_i)>v(\epsilon)$.

En effet, cela découle directement de la définition de f_1,f_2 et du fait que $v(u^{(i)}-a_i)\geqslant\min\{v(u_1^{(j)}-b_j),v(u_2^{(j)}-c_j)\}>v(\epsilon)$.

Prouvons donc la consistance de cette théorie.

Nous allons considérer une extension élémentaire suffisamment saturée de corps ordonnés valués non différentiels $\langle\widehat{K},<,\hat{v}\rangle$ de $\langle K,<,v\rangle$. On va d'abord construire un corps ordonné valué L étendant K puis on étendra les dérivations de K à L. Par la saturation de $\widehat{K}$, il existe $2N$ éléments algébriquement indépendants sur K et infinitésimaux par rapport à K qui appartiennent à l'anneau de valuation $\mathcal{O}_{\widehat{K}}$, disons $u_0,v_0,\ldots,u_{N-1},v_{N-1}$.

On définit de nouveaux éléments d_j et e_j dans $\mathcal{O}_{\widehat{K}}$ pour tout $j\in\{0,\ldots,N-1\}$ de la manière suivante : $d_j:=b_j+u_j$ et $e_j:=c_j+v_j$. Dès lors, les éléments d_i,e_i ($i\in\{0,\ldots,N-1\}$) sont algébriquement indépendants sur K. Maintenant, on considère les polynômes $\tilde{f}(Z)=f^*(a_0,\ldots,a_{N-1},Z)$ et $\tilde{g}(Z)=f^*(d_0+\mathrm{i}e_0,d_1+\mathrm{i}e_1,\ldots,d_{N-1}+\mathrm{i}e_{N-1},Z)$ qui sont à coefficients dans $\mathcal{O}_{\widehat{K}(\mathrm{i})}$. Alors a_n est une racine simple de $\tilde{f}(Z)$. Puisque les d_i et e_i sont infinitésimaux par rapport à K, cela entraine que, dans $\widehat{K}(\mathrm{i})$, $\tilde{g}(a_N)>v(K^\times)$ et $v(\tilde{g}'(a_N))=v(\tilde{f}'(a_N)\in v(K(\mathrm{i})^\times)=v(K^\times)$ (qui est le groupe de valeurs de K). Comme $\widehat{K}$ est réel clos, $\widehat{K}(\mathrm{i})$ est algébriquement clos et ceci implique que $\widehat{K}(\mathrm{i})$ est hensélien. On en conclut donc qu'il existe une unique racine $\alpha\in\widehat{K}(\mathrm{i})$ de $\tilde{f}(Z)$ satisfaisant $v(\alpha-a_N)>v(K^\times)$ (par le lemme de Hensel). Soient $d_N,e_N\in\widehat{K}$ tels que $\alpha=d_N+ie_N$. On obtient aussi que $v(b_N-d_N)$ et $v(c_N-e_N)$ sont infinitésimaux par rapport à K.

Maintenant on va étendre la dérivation de K au corps ordonné valué engendré par les solutions de nos polynômes f_1 et f_2 afin d'obtenir les solutions différentielles requises. Pour cela nous utilisons le Lemme 2.3. Considérons la variété $V=A^{2N}$ qui est le locus du point $(d_0,e_0,\ldots,d_{N-1},e_{N-1})$ sur K (puisque ces points sont algébriquement indépendants sur K) et la variété W qui est le locus du point $(d_0,e_0,\ldots,d_{N-1},e_{N-1},d_1,e_1,\ldots,d_N,e_N)$ sur K. Dès lors, la variété W est une sous-variété du torseur de V, qui se projette de façon dominante sur V. Par le Lemme 2.3, on peut étendre la dérivation D de K à $K(\bar{d}, \bar{e})$ de telle manière que $D(d_i) = d_{i+1}$ et $D(e_i) = e_{i+1}$ pour $0 \leqslant i < N$. $\square$

Remerciements

Je tiens aussi à remercier vivement Françoise Point qui m'encadre régulièrement dans tous mes travaux.

Références

[1] G. Cherlin, M. Dickmann, Real-closed rings. II. Model theory, Ann. Pure Appl. Logic 25 (3) (1983) 213–231.
[2] N. Guzy, F. Point, Topological differential structures, soumis, version électronique : http://www.logique.jussieu.fr/www.point/papiers/tfields_rev5.pdf.
[3] A. Macintyre, K. McKenna, L. van den Dries, Elimination of quantifiers in algebraic structures, Adv. in Math. 47 (1) (1983) 74–87.
[4] A. Pierce, D. Pillay, A Note on the axioms for differentially closed fields of characteristic zero, J. Algebra 204 (1) (1997) 108–115.
[5] M.F. Singer, The model theory of ordered differential fields, J. Symbolic Logic 43 (1) (1978) 82–91.
[6] M.F. Singer, A class of differential fields with minimal differential closures, Proc. Amer. Math. Soc. 69 (2) (1978) 82–91.