Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 439–443
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Systèmes dynamiques

Sur le degré dynamique des transformations de Cremona du plan qui stabilisent une courbe irrationnelle non-elliptique

Ivan Pan

Instituto de Matemática, UFRGS, av. Bento Gonçalves 9500, 91540-000 Porto Alegre, RS, Brasil

Reçu le 11 mai 2005 ; accepté après révision le 18 juillet 2005

Disponible sur Internet le 15 septembre 2005

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

On montre que le premier degré dynamique d'une transformation de Cremona du plan qui stabilise une courbe irrationnelle non elliptique est égal à 1. De plus, parmi ces transformations, on caractérise celles qui sont d'ordre fini. ***Pour citer cet article : I. Pan, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

On the dynamic degree of plane Cremona transformations which stabilise an irrational non elliptic curve. We show that the first dynamical degree of a Cremona transformation stabilizing an irrational non elliptic curve is 1. Moreover, among these transformations, we characterize those which have finite order. ***To cite this article: I. Pan, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abridged English version

Fix a birational map $F:\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$. We define the *First Dynamical Degree* of F as (see [9] and [6])

$$\lambda(F) := \lim_{n\to\infty} \deg(F^n)^{1/n},$$

where $\deg F^n$ denote the *Algebraic Degree* of $F^n := F \circ \cdots \circ F$. It is invariant under conjugation by birational maps and we have $\lambda(F) = \lambda(F^\ell)$ for all ℓ.

Adresse e-mail : pan@mat.ufrgs.br (I. Pan).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.07.014

Let $C \subset \mathbb{P}^2$ be an irreducible curve whose geometric genus $g(C)$ is greater than 1. We say that F stabilizes C when F maps a point in general position on C into a point of C. The restriction of F to C is of finite order, ℓ, since $g(C) > 1$.

From a theorem of Castelnuovo (see [3]) it follows that if F^ℓ has no finite order then it is conjugated to a de Jonquières (birational) transformation: e.g., it preserves a pencil of lines. As it is shown in [1] or [6], a de Jonquières transformation has $\lambda = 1$: more precisely, from [6, Theorem 0.2] it follows that

(i) the sequence $\{\deg F^n\}$ grows at most linearly.

On the other hand, we remark that a de Jonquières transformation of infinite order stabilizing C, forces the normalization of C to be hyperelliptic. In fact, a power of F fixes all point of C and a line of the pencil (associated to F) intersects C in two 'variable' points. Then

(ii) If the normalization of C is no hyperelliptic ($g(C) > 1$) then $\operatorname{ord}(F) < \infty$.

Finally, considering [6, Theorem 0.2] and [8, Theorem 3.2] together, we can show:

(iii) F is of finite order if and only if $\lambda(F) = 1$ and F is conjugated to an automorphism of a smooth surface. In fact, when F is conjugated to an automorphism and $\lambda(F) = 1$ from [6, Theorem 0.2] (see also [11]) we obtain that F^m is conjugated to an automorphism isotopic to the identity for some m. Such an automorphism can be conjugated to a product automorphism of $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Since $F^\ell|_C = \mathrm{Id}_C$ and C is not rational we conclude $F^\ell = \mathrm{id}$ by the Lüroth Theorem. The converse sentence follows directly from [8, Theorem 3.2].

Here, (i), (ii) and (iii) are essentially Theorem 1.1 and Corollary 1.2 below.

1. Introduction

On désigne par $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ le plan projectif sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Fixons $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe irréductible ; on note $g(C)$ le genre de sa normalisation. Soit $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ une transformation de Cremona du plan projectif ; observons que C n'est collapsée par F que lorsque $g(C) = 0$. On dira que F *stabilise* C si elle induit, par restriction, une application birationnelle de C dans C. Une telle transformation appartient au *Groupe de décomposition de* C d'après Gizatullin [10].

Finalement, on note

$$\lambda(F) := \lim_{n\to\infty} \deg(F^n)^{1/n}, \tag{1}$$

où $\deg(F^n)$ dénote le degré (algébrique) de F^n : c'est un invariant par conjugaison qui coïncide avec le *premier degré dynamique* de F qui est défini dans [9] et [15] ou [6] (voir §2 plus loin).

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Supposons que* $g(C) > 1$. *Soit* $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ *une transformation de Cremona qui stabilise* C. *On a* :

(a) $\lambda(F) = 1$ *et la suite* $\{\deg F^n\}$ *croît au plus linéairement* ;
(b) *si* F *est conjuguée à un automorphisme d'une surface rationnelle* (*lisse*), *alors* F *est d'ordre fini* ;
(c) *si la normalisation de* C *n'est pas hyperelliptique, alors* F *est d'ordre fini.*

L'Exemple 1 montre que l'hypothèse portant sur la normalisation de C est nécessaire dans l'assertion (c). Pour un exemple de transformation avec $\lambda > 1$ qui stabilise une courbe rationnelle voir l'Exemple 2.

Exemple 1. Considérons la courbe plane hyperelliptique C d'équation affine $y^2 = h(x)$, où h est un polynôme sans racine multiple de degré $2g + 2$ pour $g = 1, 2, \ldots$. Une application birationnelle de $\mathbb{C}^2$ qui préserve les droites verticales et fixe les points de C s'écrit sous la forme

$$(x, y) \mapsto \left(x, \frac{a(x)y + h(x)}{y + a(x)}\right),$$

avec $a(x)^2 - h(x) \not\equiv 0$ pour $a \in \mathbb{C}(x)$. Observons que pour a générique une telle transformation est d'ordre infini ; néanmoins son premier degré dynamique est 1 (voir par exemple [1] ou [6, Lemme 4.2]). Cette transformation appartient au *Groupe d'inertie* de C d'après [10].

Dans [5] on exhibe une écriture pour une transformation qui stabilise une courbe C en termes de l'équation de la courbe (la référence à ce travail, dont le titre apparaît incomplet, a été prise de [12, Chapitre VIII, §2, No. 465]).

Du théorème suivent les corollaires suivants :

Corollaire 1.2. *Soit $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ une transformation de Cremona. On a* :

(a) *Si $\lambda(F) > 1$ la transformation F ne stabilise pas de courbe irréductible de genre > 1.*
(b) *Si F stabilise une courbe irréductible non hyperelliptique* (*donc de genre $\geqslant 3$*), *alors elle est d'ordre fini et conjuguée à un automorphisme d'une surface rationnelle.*
(c) *Si F stabilise une courbe irréductible hyperelliptique de genre $\geqslant 2$, alors la suite $\{\deg F^n\}$ croît au plus linéairement.*

Remarque 1. Si F est d'ordre fini, alors $\lambda(F) = 1$ et d'après [8, Théorème 3.2] elle est conjuguée à un automorphisme.

Corollaire 1.3. *Si F stabilise C avec $g(C) > 1$, alors F est d'ordre fini si et seulement si $\lambda(F) = 1$ et F est conjuguée à un automorphisme d'une surface rationnelle.*

2. Le résultat principal

Soit $\varphi : X \dashrightarrow X$ une application birationnelle d'une surface projective lisse.

On dira que φ est *conjuguée* à une application birationnelle $\psi : \widetilde{X} \dashrightarrow \widetilde{X}$ s'il existe une application birationnelle $\tau : \widetilde{X} \dashrightarrow X$ telle que $\varphi = \tau \circ \psi \circ \tau^{-1}$.

Comme dans [6], on peut définir le *premier degré dynamique* $\lambda(\varphi) = \lambda_1(\varphi)$: c'est un invariant de la classe de conjugaison de φ, qui dans le cas où $X = \mathbb{P}^2$ coïncide avec celui de l'Éq. (1) (voir [6, Proposition 1.18, Corollaire 1.19, Corollaire 2.1]).

Un automorphisme d'une surface projective lisse $\sigma : X \to X$ est *isotope à l'identité* s'il est le flot au temps 1 d'un champ de vecteurs holomorphe.

Pour démontrer le Théorème 1.1 on a besoin des deux résultats ci-dessous ; ici $\operatorname{ord} F$ désigne l'*ordre* de l'application F.

Proposition 2.1. *Soient C une courbe irréductible et $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ une transformation de Cremona qui stabilise C. Supposons que $g(C) > 1$ et $\lambda(F) = 1$. Alors, on a, ou moins, l'une des situations* (*non exclusives*) *suivantes* :

(a) *F est d'ordre fini* ;
(b) *F préserve un pinceau de courbes rationnelles. Dans ce cas, si* $\operatorname{ord} F > \operatorname{ord}(F|_C)$, *alors* (*la normalisation de*) *C est hyperelliptique et la suite $\{\deg F^n\}$ croît au plus linéairement.*

En plus, si F n'est pas d'ordre fini, F n'est pas conjuguée à un automorphisme.

Démonstration. Notons $m := \operatorname{ord} F|_C$, l'ordre de la restriction de F à C.

Supposons d'abord que F préserve un pinceau de courbes rationnelles. Quitte à résoudre les points d'indétermination du pinceau, on peut remplacer $\mathbb{P}^2$ par une fibration rationnelle $X \to \mathbb{P}^1$ et F par une application birationnelle $\varphi : X \dashrightarrow X$ qui commute avec celle-ci ; puisque C n'est pas une fibre de la fibration, φ^m stabilise chaque fibre et y fixe k points (comptés avec multiplicités) avec $k \geqslant 2$. Si $\varphi^m \neq \mathrm{id}$, c'est-à-dire $\operatorname{ord} F > \operatorname{ord}(F|_C)$, alors $k = 2$ et la normalisation de C est hyperelliptique ; si $k > 2$ l'application est d'ordre m.

Par ailleurs, d'après le théorème de Diller et Favre [6, Théorème 0.2] on a exactement l'une des situations suivantes (voir aussi [11] où le cas (iii) est démontré) :

(i) la suite $\{\deg F^n\}$ est bornée et F^ℓ est conjuguée à un automorphisme isotope à l'identité pour un $\ell \in \mathbb{N}$;

(ii) la suite $\{\deg F^n\}$ croît linéairement et F préserve un pinceau de courbes rationnelles ; dans ce cas F n'est pas conjuguée à un automorphisme ;

(iii) la suite $\{\deg F^n\}$ croît quadratiquement et F est conjuguée à un automorphisme qui préserve une fibration elliptique.

Si F ne préserve pas de pinceau de courbes rationnelles, elle satisfait donc (i) ou (iii).

Supposons qu'on est dans la situation (i) ; notons $\sigma : X \to X$ un automorphisme isotope à l'identité qui est conjugué à F^ℓ pour un $\ell \in \mathbb{N}$. Soit v le champ de vecteurs sur X dont le flot au temps 1 est σ. Il existe une application birationnelle $\psi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ qui conjugue v avec un champ de vecteurs de la forme $v_1 \oplus v_2$ avec v_i des champs de vecteurs sur $\mathbb{P}^1$, $i = 1, 2$: c'est un résultat classique dont une preuve peut être trouvée, par exemple, dans [2, Chapitre 6, Proposition 6(iii)]. Le flot d'un tel champ est un flot produit, d'où suit que ψ conjugue σ à un automorphisme produit dans $\mathrm{PGL}(2) \times \mathrm{PGL}(2)$. On peut donc supposer $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2$, avec $\sigma_i \in \mathrm{PGL}(2)$.

Puisque σ préserve les deux fibrations de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, sa puissance m-ième stabilise chaque fibre de celles-ci. Donc $\sigma^m = \mathrm{id}$, car $\{(x, y)\} = (\mathbb{P}^1 \times \{y\}) \cap (\{x\} \times \mathbb{P}^1)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Pour finir on montre qu'un automorphisme $\psi : X \to X$ qui préserve une fibration elliptique $f : X \to B$ et stabilise une courbe C_0 de genre > 1 est d'ordre fini ; ceci empêche que F soit comme dans (iii) d'où la fin de la démonstration.

De la classification de Kodaira des fibrations elliptiques suit que C_0 n'est pas contenue dans une fibre de f. On en conclut qu'une puissance de ψ induit un automorphisme sur chaque fibre lisse de f avec des points fixes, d'où l'assertion. □

Pour démontrer que $\lambda(F) = 1$ dans le Théorème 1.1 on va se servir du résultat ci-dessous dû à Calstelnuovo [3] qui se trouve aussi dans [12, Chapitre VIII, §2, No. 467] et [4, Book IV, Chapitre VII, §3, Théorème 14]). On rappelle qu'une transformation de Cremona est dite de de Jonquières si elle préserve un pinceau de droites ; dans [14] nous faisons un exposé de ce travail.

Théorème 2.2 (G. Castelnuovo). *Supposons que $g(C) > 1$. Soit $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ une transformation de Cremona qui fixe les points de C. Alors F est d'ordre fini ou elle est conjuguée à une transformation de de Jonquières.*

En fait l'énoncé de Castelnuovo donne plus de précisions sur l'ordre de F dans le cas où elle n'est pas conjuguée à une transformation de de Jonquières, mais nous n'avons pas besoin de cela.

Démonstration du Théorème 1.1. (a) Puisque $\lambda(F^\ell) = \lambda(F)^\ell$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et $g(C) > 1$ on peut supposer que F fixe les points de C. Par le théorème de Castelnuovo et la Proposition 2.1(b) il suffit de montrer que si F préserve un pinceau de droites, alors $\lambda(F) = 1$. Quitte à éclater le point base du pinceau de droites F est conjuguée à une application birationnelle $\varphi : \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_1$, où $\mathbb{F}_1$ désigne la première surface de Hirzebruch, qui préserve la fibration rationnelle. En coordonnées affines on peut écrire φ comme une application birationnelle de $\mathbb{C}^2$ de la forme

$$(x, y) \mapsto \left(x, \frac{a(x)y + b(x)}{c(x)y + d(x)}\right), \tag{2}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}(x)$ d'où suit que $\lambda(F) = 1$ (de nouveau) par ([1] ou [6, Lemme 4.2]).

Les assertions (b) et (c) suivent directement de la Proposition 2.1. □

Remarque 2. Qu'une transformation de de Jonquières soit conjuguée à une application comme dans l'Éq. (2) est un fait bien connu des géomètres classiques : voir par exemple [13, Chapitre VI, §I.3].

Exemple 2. Pour donner un exemple de transformation de Cremona $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ avec $\lambda(F) > 1$ il suffit de considérer des transformations monomiales (voir [7]). On définit $F : \mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ par $F = (xy, xy^2)$; on constate sans effort que $F^{-1} = (x^2y^{-1}, x^{-1}y)$. Par ailleurs F preserve le tore réel d'équation $|x| = |y| = 1$. Puisque la matrice des exposants $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ de F possède des valeurs propres dont le module est plus grand que 1 nous concluons que l'*Entropie Topologique* de celle-ci est positive et donc $\lambda(F) > 1$ (voir [9]).

Observons que cette transformation possède un point fixe en $(1, 1)$; quitte à conjuguer avec une transformation quadratique qui collapse une droite sur ce point fixe on obtient un exemple de transformation avec $\lambda > 1$ qui stabilise une courbe rationnelle ; une telle transformation quadratique peut s'obtenir à partir de la transformation quadratique *Standard* $S : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, définie par $S = (yz : xz : xy)$, par un changement (linéaire) de variables adéquat.

Question. Existe-t-il des transformations de Cremona stabilisant une courbe elliptique avec degré dynamique plus grand que 1 ?

Remerciements

J'aimerais remercier Charles Favre d'abord pour ses précisions sur la dynamique des applications birationnelles (notamment celles sur le degré dynamique) et puis pour ses précieuses suggestions par rapport à la rédaction de ce travail.

Références

[1] M.P. Bellon, Algebraic entropy of birational maps with invariant curves, Lett. Math. Phys. 50 (1999) 79–90.
[2] M. Brunella, Birational geometry of foliations, in: First Latin American Congress of Mathematics, 2000.
[3] G. Castelnuovo, Sulle transformazioni cremoniane del piano che ammetono una curva fisse, Rend. Accad. Lincei (1892); Memoire scelte, Bologne, Zanichelli (1937).
[4] J.L. Coolidge, A Treatise on Algebraic Curves, Dover Publications, 1959.
[5] X. Doehlemann, Ueber Cremona-Transformationen in der Ebene…, Math. Ann. XXXIX (1890).
[6] J. Diller, C. Favre, Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces, Amer. Math. J. 123 (2001) 1135–1169.
[7] C. Favre, Les applications monomiales en deux dimensions, Prépublication.
[8] T. de Fernex, L. Ein, Resolution of indeterminacy of pairs, in: Algebraic Geometry, de Grutier, 2002, pp. 165–177.
[9] X. Friedland, Entropy of algebraic maps, in: Proceedings of the Conference in honor of Jean-Pierre Kohane, Orsay, 1993, J. Fourier Anal. Appl. (1995) 215–228.
[10] M.H. Gizatullin, The decomposition, inertia and ramification groups in birational geometry, in: Algebraic Geometry and its Applications, in: Aspects of Mathematics, E, vol. 25, 1994, pp. 39–45.
[11] M.H. Gizatullin, Rational G-surfaces.
[12] L. Godeaux, Géométrie algébrique II, géométrie sur une courbe algébrique, géométrie algébrique du plan, Masson & Cie, Paris, 1950.
[13] H. Hudson, Cremona Transformations in the Plan and the Space, Cambridge University Press, 1927.
[14] I. Pan, Sur un théorème de Castelnuovo, Prépublication, 2005.
[15] A. Russakovskii, B. Shiffman, Value distribution for sequence of rational mappings and Complex dynamics, Indiana Univ. Math. J. 46 (1997) 897–932.