

Problèmes mathématiques de la mécanique
Contacts et auto-contacts sans frottement

Olivier Pantz

Centre de mathématiques appliquées, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 12 mai 2005 ; accepté le 28 juin 2005

Disponible sur Internet le 26 août 2005

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) considérée comme configuration de référence d'un solide hyperélastique. Une contrainte topologique est imposée aux déformations admissibles $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ du solide afin de satisfaire une condition de non interpénétration. Nous montrons que le problème de minimisation associé possède au moins une solution. A l'exception du cas particulier des solides bidimensionnels évoluant dans l'espace \mathbb{R}^3 , ce problème de minimisation est un modèle mathématique de solide pouvant réaliser des auto-contacts sans frottement. Une application numérique est présentée. **Pour citer cet article :** O. Pantz, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Frictionless contact and self-contact. Let M be a submanifold of \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) considered as the reference configuration of a hyperelastic solid. A topological constraint is imposed on the admissible deformations $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ of the solid in order to satisfy a non penetration condition. We show that the associated minimization problem has at least one solution and, in the case $\dim(M) \neq 2$ or $n \neq 3$, provides a mathematical model of body that allows frictionless self-contact. A numerical application is presented. **To cite this article :** O. Pantz, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

We consider a free hyperelastic body M submitted to dead body forces $f \in L^1(M; \mathbb{R}^n)$, where M is a submanifold of \mathbb{R}^n the dimension of which m could be strictly lower than n . The equilibrium state of the body is described by any deformation $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ that minimizes the total energy

$$I(\psi) = \int_M W(\nabla \psi) \, dx - \int_M f \cdot \psi \, dx,$$

Adresse e-mail : olivier.pantz@polytechnique.org (O. Pantz).

over the space of admissible deformations (here dx denote the m -Hausdorff measure on $M \subset \mathbb{R}^n$). We assume that the stored energy $W : M_{n,m} \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous, polyconvex and that there exists constants $p > m$, C , α and β such that

$$\forall F \in M_{n,m}, \quad |W(F)| \leq C(1 + |u|^p) \tag{1}$$

and

$$\forall F \in M_{n,m}, \quad W(F) \geq \alpha|u|^p + \beta. \tag{2}$$

Moreover we assume that

$$\int_M f \, dx = 0.$$

To avoid transversal self-intersections of M , we impose a topological constraint on the space of admissible deformations. To this end, we introduce the cohomology groups $H_{\mathcal{K}}^*(X)$ as inverse limit of the usual singular cohomology groups $H^*(K)$ over the family of all compacts K of X ordered by inclusion:

$$H_{\mathcal{K}}^*(X) = \varprojlim_K H^*(K).$$

If g is a continuous map from two topological spaces X and Y , we let $g_{\mathcal{K}}^*$ denote the homomorphism from $H_{\mathcal{K}}^*(Y)$ to $H_{\mathcal{K}}^*(X)$ induced by the homomorphisms g^* on the singular cohomology groups. For all $\varphi \in C^0(M; \mathbb{R}^n)$, we introduce the applications

$$d_{\varphi}(\varphi, \varphi) : M \times M - K(\varphi) \rightarrow \mathbb{R}^n - 0, \\ (x, y) \mapsto \varphi(x) - \varphi(y)$$

and

$$d_{\varphi}(j_M, j_M) : M \times M - K(\varphi) \rightarrow \mathbb{R}^n - 0, \\ (x, y) \mapsto j_M(x) - j_M(y),$$

where

$$K(\varphi) = \{(x, y) \in M \times M : \varphi(x) = \varphi(y)\}$$

and j_M is the inclusion of M in \mathbb{R}^n . The set of admissible deformations is defined as

$$\Phi_p(j_M) = \{\varphi \in W^{1,p}(M; \mathbb{R}^n) : d_{\varphi}(j_M, j_M)_{\mathcal{K}}^* = d_{\varphi}(\varphi, \varphi)_{\mathcal{K}}^*\} / \mathbb{R}^n.$$

The set of admissible deformations is closed for the weak topology of $W^{1,p}(M; \mathbb{R}^n)$. It contains the embeddings of M that are isotopic to j_M and no deformation with transverse self-intersections. From the weak closedness, we deduce that there exists $\varphi \in \Phi_p(j_M)$ such that

$$J(\varphi) = \inf_{\psi \in \Phi_p(j_M)} J(\psi).$$

Furthermore, if $\dim(M) \neq 2$ or $n \neq 3$, this minimisation problem provides a mathematical model for a hyperelastic body with frictionless self-contact, without self-intersection. In the case $\dim(M) = n = 3$, our constraint is stronger than that introduced by Ciarlet and Nečas in [1]. Hence, our model inherits the properties of theirs.

In the case $\dim(M) = 1$ and $n = 2$, we introduced a penalization strategy to solve this problem numerically. To this end, we introduce a functional $J : W^{1,p}(M; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ which is equal to zero on the set of admissible deformations. Let $\Delta(M)$ be the diagonal of $M \times M$, that is

$$\Delta(M) = \{(x, y) \in M \times M : x = y\}.$$

If a deformation ψ has only transversal self-intersections, then $K(\psi) - \Delta(M)$ is a finite family of oriented points and $J(\psi) < +\infty$. Moreover,

$$J(\psi) = \inf_{\gamma} L_{\psi}(\gamma),$$

where γ is a finite union of paths γ_i such that $\partial\gamma = K(\psi) - \Delta(M)$ and $L_{\psi}(\gamma) = \sum_i L_{\psi}(\gamma_i)$ is the total length of γ , where $M \times M$ is endowed with the metric for which the length dl of the infinitesimal vector (dx, dy) at $(x, y) \in M \times M$ is defined by (7). The solutions of the penalized problem of minimization of $I(\psi) + J(\psi)/\alpha$ over $W^{1,p}(M; \mathbb{R}^2)$ converge towards the solutions of the initial one as α goes to zero. We have applied this strategy to the study of two elastic balloons. The chosen density W is convex and such that $W(u) = 0$ if $|u| \leq 1$. Each balloon is inflated by the application of an internal pressure, which is larger in the top balloon, and is fixed at its ends. Fig. 1 represents the result obtained. The left picture was obtained without taking into account contacts between balloons. The right one is the solution of our model.

1. Introduction

Considérons un solide hyperélastique, de densité d'énergie W , dont la configuration de référence est décrite par une sous variété $M \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3), soumis à des forces mortes $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. L'état d'équilibre du solide est décrit par une déformation $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ minimisant l'énergie totale $I(\varphi) = \int_M W(\nabla\varphi) dx - \int_M f \cdot \varphi dx$, sur un espace de déformations admissibles.

Remarque 1. Le comportement hyper-élastique du solide n'est pas essentiel. Notre analyse pourrait se transposer, par exemple, au cadre de la plasticité. De plus, il est tout à fait possible de considérer une famille de solides M_i . Il suffit de poser $M = \bigcup M_i$.

Le choix de l'ensemble des déformations admissibles n'est pas anodin. Pour être physiquement réaliste, il doit exclure certaines déformations. Dans le cas $\dim(M) = n$, deux domaines distincts de M ne peuvent occuper la même portion d'espace et l'orientation du solide ne peut être renversée. Une réponse a été proposée par Ciarlet et Nečas [1] (voir aussi Tang Qi [3]). Ils imposent aux déformations admissibles ψ d'être telles que $\det(\psi(x)) > 0$ presque partout et de vérifier l'égalité

$$\int_M \det(\psi(x)) dx = \text{Vol}(\psi(M)). \quad (3)$$

Sous certaines hypothèses sur la densité d'énergie W , ils montrent que la fonctionnelle énergie admet un minimum φ sur l'espace des déformations admissibles. Enfin, si φ est suffisamment régulière et telle que $\det(\nabla\varphi) > \alpha > 0$, la déformation φ vérifie les équations d'Euler–Lagrange.

Nous proposons une nouvelle définition de l'ensemble des déformations admissibles, applicable quelle que soit la dimension de M . Nous montrons que le problème de minimisation admet au moins une solution. De plus, sauf dans le cas $n = 3$ et $\dim(M) = 2$, toute immersion φ solution du problème de minimisation vérifie les équations d'Euler–Lagrange. Dans le cas $n = 2$ et $\dim(M) = 1$, nous proposons une application numérique basée sur une pénalisation.

2. Ensemble des déformations admissibles

2.1. Groupes de cohomologie

Soit X un espace topologique. On définit le groupe $H_{\mathcal{K}}^k(X)$ comme limite inverse des groupes de cohomologie singulière $H^*(K)$ où K parcourt les compacts de X :

$$H_{\mathcal{K}}^k(X) = \varinjlim_K H^k(X).$$

Pour être plus précis, l'ensemble des compacts de X est partiellement ordonné par la relation d'inclusion $K \subset L$. De plus, pour tout couple de compacts K et L tel que $K \subset L$, l'injection j_K^L de K dans L induit un homomorphisme de $H^k(L)$ dans $H^k(K)$. Le groupe de cohomologie $H_{\mathcal{K}}^k(X)$ est l'ensemble des applications u , qui à chaque compact K de X associe un élément u_K de $H^k(K)$, telles que, si $K \subset L$, $j_K^L(u_L) = u_K$.

Soit $g : X \rightarrow Y$. On note $g_{\mathcal{K}}^*$ l'application de $H^k(Y)$ dans $H_{\mathcal{K}}^k(X)$ qui à tout élément v de $H^k(Y)$, associe l'élément $u = g_{\mathcal{K}}^*(v)$ de $H_{\mathcal{K}}^k(X)$ défini par $u_K = (g \circ j_K^X)^*(v)$.

Remarque 2. Dans le cas particulier $k = 1$, on a $H_{\mathcal{K}}^1(X) = H^1(X)$.

2.2. Définition de l'ensemble des déformations admissibles

On note $\Delta(\mathbb{R}^n) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x = y\}$ et j_M l'injection de M dans \mathbb{R}^n . Soit K un compact de $M \times M$, pour toutes applications φ et ψ de M dans \mathbb{R}^n , telles que $(\varphi \times \psi)^{-1}(\Delta(\mathbb{R}^n)) \subset K$, on définit $d_K(\varphi, \psi) : \mathcal{C}K \rightarrow \mathbb{R}^n - 0$ par

$$d_K(\varphi, \psi)(x, y) = (\varphi(x) - \psi(y)).$$

Si φ est une application de $M \rightarrow \mathbb{R}^n$. On pose

$$K(\varphi) = (\varphi \times \varphi)^{-1}(\Delta(\mathbb{R}^n)),$$

$$d_\varphi = d_{K(\varphi)}.$$

On définit l'ensemble des déformations admissibles par

$$\mathcal{A}(j_M) = \{\varphi : C^0(M, \mathbb{R}^n) / d_\varphi(j_M, j_M)_{\mathcal{K}}^* = d_\varphi(\varphi, \varphi)_{\mathcal{K}}^*\}.$$

L'ensemble $\mathcal{A}(j_M)$ est fermé pour la topologie C^0 et contient les plongements isotopes à j_M . Par contre, s'il existe $(x, y) \in K(\psi)$ tel que ψ soit de classe C^1 au voisinage de x et y , et $D\psi(T_x M) + D\psi(T_y M) = \mathbb{R}^n$, alors $\psi \notin \mathcal{A}(j_M)$ ($D\psi$ désigne la différentielle de ψ et $T_x M$ l'espace tangent à M au point x). En d'autres termes, toute déformation possédant une auto-intersection transverse n'appartient pas à $\mathcal{A}(j_M)$.

3. Résultat d'existence

Considérons un solide libre. Pour tout $p > m$, on note

$$\Phi_p(j_M) = \{\varphi \in W^{1,p}(M; \mathbb{R}^n) : \varphi \in \mathcal{A}(j_M)\} / \mathbb{R}^n.$$

Théorème 3.1. Soit $f \in L^1(M; \mathbb{R})$ tel que $\int_M f(x) dx = 0$. Soit W une application continue polyconvexe de $\mathbb{R}^{n \times m}$ à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose qu'il existe $p > m$ tel que W vérifie les conditions de croissance et de coercivité suivantes :

$$\forall u \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad |W(u)| \leq C(1 + |u|^p), \quad (4)$$

$$\forall u \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad W(u) \geq \alpha|u|^p + \beta \quad (5)$$

où C, α, β sont des constantes.

Alors, le problème (P) consistant à trouver φ tel que

$$\varphi \in \Phi_p(j_M) \quad \text{et} \quad I(\varphi) = \inf_{\psi \in \Phi_p(j_M)} I(\psi)$$

admet au moins une solution.

Ce théorème reste valable si on contraint la déformation sur une partie du solide M , pourvu que l'ensemble des déformations admissibles considéré ne soit pas vide.

4. Équations d'Euler–Lagrange

4.1. Cas des solides de volume non nul

Notre critère est plus contraignant que celui de Ciarlet et Nečas. Si on considère un solide M tel que $\dim(M) = n$ et telle que la densité d'énergie W soit telle que $W(F) = +\infty$ dès que $\det(F) \leq 0$ et $W(F) \rightarrow +\infty$ lorsque $\det(F) \rightarrow 0^+$, l'ensemble des déformations admissibles $\mathcal{A}(j_M) \cap W^{1,p}(M; \mathbb{R}^n)$ est inclus dans l'ensemble des déformations admissibles défini par Ciarlet et Nečas. Dans [1], ces auteurs montrent que les solutions régulières du problème de minimisation qu'ils ont introduit vérifient les équations d'Euler–Lagrange décrivant le comportement d'un solide pouvant présenter des auto-contacts sans frottement. Leurs résultats et raisonnement se transposent mot pour mot à notre cas.

4.2. Cas d'un cercle inclus dans un plan

Théorème 4.1. Soit $W \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ une fonction convexe vérifiant les conditions de croissance et de coercivité (4) et (5). S'il existe une constante C' telle que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,

$$|DW(u)| \leq C'(1 + |u|^{p-1}) \tag{6}$$

et si φ est une immersion de classe $C^2(M; \mathbb{R}^n)$ solution du problème (P) (avec $M = S^1$ et $n = 2$), alors pour tout $z \in \varphi(M)$, si n est une normale unitaire à $\varphi(M)$ en z , il existe une famille (x_0, \dots, x_N) d'éléments de S^1 et une famille $(\lambda_k)_{k=-1, \dots, N}$ de réels positifs telles que

$$\varphi^{-1}(z) = \{x_k : k = 0, \dots, N\},$$

$$\lambda_{-1} = \lambda_N = 0,$$

et pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$,

$$-\frac{d(DW(\dot{\varphi}))}{dx}(x_k) = f(x_k) + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)|\dot{\varphi}(x_k)|n.$$

En particulier, pour tout $x \in S^1$ tel que $\varphi^{-1}(x) = \{x, y\}$, et n_x désigne la normale en x ,

$$\begin{cases} -\frac{d(DW(\dot{\varphi}))}{dx}(x) = f(x) - \lambda|\dot{\varphi}(x)|n_x, \\ -\frac{d(DW(\dot{\varphi}))}{dx}(y) = f(y) + \lambda|\dot{\varphi}(y)|n_x. \end{cases}$$

5. Application numérique, cas 1D–2D

5.1. Pénalisation

Dans [2], on introduit une fonctionnelle J sur $C^0(M; \mathbb{R}^2)$, s.c.i pour la topologie C^0 , telle que $J(\varphi) = 0$ si et seulement si $\varphi \in \mathcal{A}(j_M)$. Pour une définition précise de J , on renvoie à [2]. On note $\Delta(M)$ la diagonale de $M \times M$

$$\Delta(M) = \{(x, y) \in M \times M : x = y\}.$$

On dit qu'une déformation ψ est d'auto-intersection transverse s'il existe V , voisinage de $\Delta(M)$, tel que $K(\psi) \cap V = \Delta(M)$ et tel que pour tout $(x, y) \in K(\psi) - \Delta(M)$, $\psi \times \psi$ est transverse à $\Delta(\mathbb{R}^2)$ en (x, y) . Dans le cas où

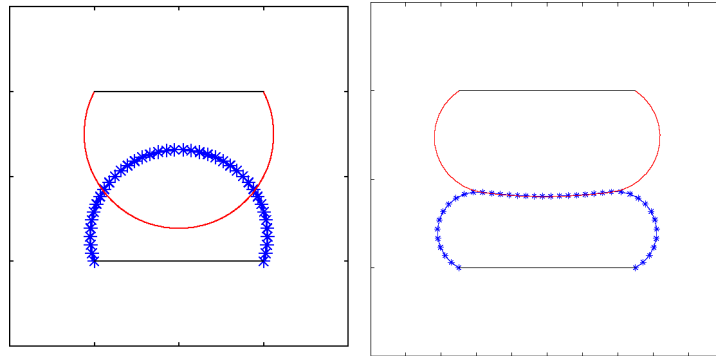


Fig. 1. Equilibre de deux ballons en contact.

Fig. 1. Equilibrium between 2 balloons in contact.

$M = [0, 1]$, si $\psi \in W^{1,p}(M; \mathbb{R}^2)$ est une déformation d'auto-intersection transverse, l'ensemble $K(\psi) - \Delta(M)$ est une famille finie de points orientés.

La fonction de pénalisation J est alors simplement définie par

$$J(\psi) = \inf_{\gamma} L_{\psi}(\gamma),$$

où γ est une union finie d'arcs γ_i tel que $\partial\gamma = K(\psi)$ et $L_{\psi}(\gamma) = \sum_i L_{\psi}(\gamma_i)$ est la somme des longueurs des arcs γ_i , où $M \times M$ est muni de la métrique pour laquelle la longueur dl d'un vecteur infinitésimal (dx, dy) en $(x, y) \in M \times M$ est défini par

$$dl = |\psi(x) - \psi(y)|^2 (|\dot{\psi}(x) dx|^2 + |\dot{\psi}(y) dy|^2)^{1/2}. \quad (7)$$

Soit $\alpha > 0$, on note (P_{α}) le problème consistant à minimiser $I_{\alpha} = I + J/\alpha$ sur $W^{1,p}(M; \mathbb{R}^2)$. Comme J est semi-continue inférieure, on déduit aisément que le problème (P_{α}) possède au moins une solution. De plus, toute famille φ_{α} de solutions de (P_{α}) est compacte pour la topologie $W^{1,p}(M; \mathbb{R}^2)$ faible, et toutes valeurs d'adhérence est solution du problème initial (P) .

5.2. Exemple numérique

Nous avons appliqué notre stratégie de pénalisation à l'étude de deux ballons élastiques. La densité d'énergie W choisie est convexe, telle que $W(u) = 0$ dès que $|u| \leq 1$. Chacun des deux ballons subit des forces de pression afin d'être « gonflé ». Elles sont légèrement plus importantes pour le ballon supérieur. Enfin, chacun des ballons est fixé à ses extrémités. Le problème pénalisé a été résolu par une méthode de gradient à pas fixe. La Fig. 1 (de gauche) représente le résultat obtenu sans prendre en compte les phénomènes de contacts. Celle de droite, est la solution issue de notre modélisation.

Références

- [1] P.G. Ciarlet, J. Nečas, Injectivity and self-contact in nonlinear elasticity, Arch. Rational Mech. Anal. 97 (3) (1987) 171–188.
- [2] O. Pantz, Quelques problèmes de modélisation en élasticité non linéaire, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, 2001.
- [3] Q. Tang, Almost-everywhere injectivity in nonlinear elasticity, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 109 (1–2) (1988) 79–95.