Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

ELSEVIER

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 329–331

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Physique mathématique/Probabilités

Champs aléatoires intermittents. Partie II : champs à accroissements dissymétriques

Jean Duchon, Raoul Robert

Institut Fourier, université Grenoble 1, UMR CNRS 5582, 100, rue des Mathématiques, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France

Reçu le 2 juin 2005 ; accepté le 20 juin 2005

Disponible sur Internet le 15 août 2005

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Dans une Note précédente (partie I) nous avons présenté une famille de champs aléatoires multifractals dont les accroissements ont une loi symétrique. Nous construisons dans cette seconde partie une autre famille de champs intermittents, à accroissements dissymétriques. ***Pour citer cet article : J. Duchon, R. Robert, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Intermittent random fields. Part II: fields with asymmetric increments. In a previous Note (part I) we presented a family of multifractal random fields, the increments of which have a symmetrical distribution. In this second part we construct another family of intermittent fields, with asymmetric increments. ***To cite this article: J. Duchon, R. Robert, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

1. Introduction

Nous renvoyons à l'introduction de la partie I pour une présentation plus générale de la problématique, et pour les notations.

Pour résumer la situation dans un langage heuristique commode, la construction précédente consiste à appliquer l'opérateur de noyau $R^{d-\alpha}\varphi^R(x-y)/|x-y|^{d-\alpha}$ au champ $\mathrm{e}^{\gamma X_1}\,\mathrm{d}W_0$, où $\mathrm{d}W_0$ et $\mathrm{d}W_1$ sont deux bruits blancs indépendants, X_1 le champ gaussien associé à $\mathrm{d}W_1$ via le noyau k^R et γ est le paramètre d'intermittence. Mais l'hypothèse que X_1 et $\mathrm{d}W_0$ sont indépendants est brutale, et il est naturel d'introduire une certaine dépendance entre le bruit blanc et le champ. Pour cela on va introduire le modèle $\mathrm{e}^{\gamma_0 X_0+\gamma_1 X_1}\,\mathrm{d}W_0$ où X_0 est le champ gaussien

Adresses e-mail : Jean.Duchon@ujf-grenoble.fr (J. Duchon), Raoul.Robert@ujf-grenoble.fr (R. Robert).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.06.021

associé à $\mathrm{d}W_0$ via k^R, et γ_0, γ_1 sont deux paramètres d'intermittence. On va voir que définir un tel modèle nécessite une normalisation différente et que ceci va impliquer des propriétés différentes de celles du modèle précedent, et notamment introduire une dissymétrie dans la loi de $\mathcal{X}_{x+h} - \mathcal{X}_x$, dûe à la corrélation entre le champ X et W_0. Cette dissymétrie a un sens profond : elle est liée à la dissipation d'énergie dans le cas des champs de vitesse turbulents, et pour les marchés financiers à l'aversion au risque (dissymétrie de comportement des acteurs à la hausse ou à la baisse).

L'étude de ce modèle comprend les mêmes étapes que le cas précédent.

2. Construction du champ à accroissements dissymétriques

Commençons par définir $\mathcal{X}^\varepsilon_x = R^{d-\alpha} \int \varphi^R(x-y)|x-y|_\varepsilon^{-d+\alpha} \mathrm{e}^{X^\varepsilon(y)-C_\varepsilon}\, \mathrm{d}W_0(y)$ (on rappelle que $|\cdot|_\varepsilon = \theta^\varepsilon \star |\cdot|$) avec $X^\varepsilon = \gamma_0 X_0^\varepsilon + \gamma_1 X_1^\varepsilon$, $X_i^\varepsilon(y) = \int k_\varepsilon^R(y-\sigma)\, \mathrm{d}W_i(\sigma)$, $i = 1, 2$. Il est clair que presque sûrement $\mathcal{X}^\varepsilon$ est un champ scalaire C^∞ sur $\mathbf{R}^d$.

2.1. Calcul des moments, normalisation

On calcule $\mathbf{E}(\int f_\varepsilon(y)\, \mathrm{e}^{X^\varepsilon(y)-C_\varepsilon}\, \mathrm{d}W_0(y))^q$, $q = 1, 2, \ldots$, avec $f_\varepsilon(y) = R^{d-\alpha} \frac{\varphi^R(y)}{|y|_\varepsilon^{d-\alpha}}$ puis avec

$$f_\varepsilon(y) = R^{d-\alpha}\left(\frac{\varphi^R(y-h)}{|y-h|_\varepsilon^{d-\alpha}} - \frac{\varphi^R(y)}{|y|_\varepsilon^{d-\alpha}}\right).$$

Ce calcul se fait de manière directe au moyen du

Lemme 2.1. *Soit $(Z_1, \ldots, Z_n, Z)$ un vecteur gaussien centré, alors*

$$\mathbf{E}(Z_1 \cdots Z_n\, \mathrm{e}^Z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\langle Z^2\rangle}(\Sigma_0 + \cdots + \Sigma_{[n/2]}),$$

avec

$$\begin{aligned}
&\Sigma_0 = \langle ZZ_1\rangle \ldots \langle ZZ_n\rangle,\\
&\Sigma_1 = \textit{somme de termes de la forme } \langle ZZ_1\rangle \cdots \langle ZZ_{n-2}\rangle\langle Z_{n-1}Z_n\rangle,\\
&\Sigma_2 = \textit{somme de termes de la forme } \langle ZZ_1\rangle \cdots \langle Z_{n-3}Z_{n-2}\rangle\langle Z_{n-1}Z_n\rangle, \quad \textit{etc.}
\end{aligned}$$

Le moment ci-dessus va ainsi se présenter comme une somme de termes : $\mathbf{E}()^q = \Sigma_0^\varepsilon + \Sigma_1^\varepsilon + \cdots$. Ecrivons Σ_0^ε qui va en fait donner la contribution dominante lorsque $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}
\Sigma_0^\varepsilon = {}& \gamma_0^q k_\varepsilon^R(0)^q \exp\left[\frac{q}{2}\left(\gamma_0^2 + \gamma_1^2\right)\rho_{\varepsilon/R}(0) - qC_\varepsilon\right]\\
&\times \int \cdots \int \exp\left[\left(\gamma_0^2 + \gamma_1^2\right) \sum_{i<j} \rho_{\varepsilon/R}\left(\frac{y_i - y_j}{R}\right)\right] \prod_{k=1}^q \left(1 + Q_k^\varepsilon\right) f_\varepsilon(y_k)\, \mathrm{d}y_k
\end{aligned}$$

où on note $Q_i^\varepsilon = k_\varepsilon^R(0)^{-1} \sum_{i \neq j} k_\varepsilon^R(y_j - y_i)$. Ceci amène à choisir la constante de normalisation C_ε telle que $k_\varepsilon^R(0) \exp[-C_\varepsilon + \frac{1}{2}(\gamma_0^2 + \gamma_1^2)\rho_{\varepsilon/R}(0)] = 1$. Ensuite, par application du théorème de Lebesgue, on voit que

$$\Sigma_0^\varepsilon \to \gamma_0^q \int \cdots \int \exp\left[\left(\gamma_0^2 + \gamma_1^2\right) \sum_{i<j} \rho\left(\frac{y_i - y_j}{R}\right)\right] \prod_{k=1}^q f(y_k)\, \mathrm{d}y_k$$

à condition que cette intégrale converge. L'application de la méthode de [1] donne la condition suffisante $2(q-1)(\gamma_0^2+\gamma_1^2)\omega_d < \alpha$. On vérifie ensuite qu'avec cette condition tous les autres termes Σ_i^ε tendent vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$.

2.2. Estimations uniformes en ε et convergence vers un champ $\mathcal{X}$

En utilisant pour l'essentiel les mêmes techniques que précédemment, et en traitant successivement tous les termes $\Sigma_0^\varepsilon, \Sigma_1^\varepsilon, \ldots$ on montre que pour $\delta = (\gamma_0^2+\gamma_1^2)\omega_d$ assez petit ($\delta < \frac{1}{2d}$ et $\alpha > 2\sqrt{2\delta d} - 2\delta$) on peut choisir p de manière à avoir l'estimation uniforme en ε : $\mathbf{E}(\mathcal{X}_{x+h}^\varepsilon - \mathcal{X}_x^\varepsilon)^{2p} \leqslant c(|h|/R)^{d+\zeta}$, pour un $\zeta > 0$. On peut alors appliquer le critère de compacité de Kolmogorov.

On peut donc, modulo l'extraction d'une sous-suite, supposer que $\mathcal{X}^\varepsilon$ converge en loi vers un champ continu $\mathcal{X}$. Pour montrer que toute la suite converge il faut de nouveau montrer que $\mathcal{X}$ est uniquement déterminé.

Ici le calcul explicite de la fonction caractéristique n'est plus possible et la méthode consiste à montrer que pour tout ensemble fini de points $\{x_1, \ldots, x_n\}$ la suite des vecteurs aléatoires $(\mathcal{X}_{x_1}^\varepsilon, \ldots, \mathcal{X}_{x_n}^\varepsilon)$ est une suite de Cauchy dans L^{2p}, i.e. $\mathbf{E}(\mathcal{X}_{x_i}^\varepsilon - \mathcal{X}_{x_i}^{\varepsilon'})^{2p} \to 0$ lorsque $\varepsilon, \varepsilon' \to 0$, pour $\alpha > 2(2p-1)\delta$. Pour ce faire on développe et on calcule la limite de chaque terme. Il en découle l'unicité de la limite $\mathcal{X}$ et le passage à la limite pour les moments pour $\alpha > 2(q-1)\delta$. D'où $\mathbf{E}(\mathcal{X}_{x+h} - \mathcal{X}_x)^q = \gamma_0^q \int\cdots\int f(y_1)\ldots f(y_q)\exp[(\gamma_0^2+\gamma_1^2)\sum_{i<j}\rho(\frac{y_i-y_j}{R})]\,\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_q$ avec $f(y) = R^{d-\alpha}(|y-h|^{-d+\alpha}\varphi^R(y-h) - |y|^{-d+\alpha}\varphi^R(y))$.

Fixons un vecteur unitaire e et prenons $h = \lambda e$. L'application du théorème de Lebesgue montre alors que $\mathbf{E}(\mathcal{X}_{x+\lambda e} - \mathcal{X}_x)^q \sim (\lambda/R)^{\zeta_q} C_q$ $(\lambda \to 0)$ avec $\zeta_q = q\alpha - \frac{1}{2}q(q-1)(\gamma_0^2+\gamma_1^2)\omega_d$, à condition que l'intégrale

$$\int\cdots\int \prod_k \left|\frac{1}{|z_k - e|^{d-\alpha}} - \frac{1}{|z_k|^{d-\alpha}}\right| \frac{\mathrm{d}z_1\ldots\mathrm{d}z_q}{\prod_{i<j}|(z_i-z_j)/R|_\star^{(\gamma_1^2+\gamma_1^2)\omega_d}}$$

soit finie. L'application de la méthode de [1] donne la condition : $2(q-1)(\gamma_0^2+\gamma_1^2)\omega_d < \alpha < 1$.

2.3. Dissymétrie des accroissements $\mathcal{X}_{x+h} - \mathcal{X}_x$

Le calcul ci-dessus fournit en fait les valeurs $C_q = c\int\cdots\int \prod_{i<j}|z_i - z_j|^{-(\gamma_0^2+\gamma_1^2)\omega_d}\prod_{k=1}^q F(z_k)\,\mathrm{d}z_k$ avec $F(z) = |z-e|^{-d+\alpha} - |z|^{-d+\alpha}$. On vérifie facilement par un argument de symétrie que pour q impair on a $C_q = 0$. Les calculs précédents fonctionnent tout aussi bien si on construit un nouveau champ en remplaçant dans la définition de $\mathcal{X}^\varepsilon$ le noyau $\varphi^R(x-y)/|x-y|^{d-\alpha}$ par $\varphi^R(x-y)(x^i-y^i)/|x-y|^{d-\alpha+1}$ (pour $i = 1, \ldots, d$ x^i désigne la i-ème coordonnée de x). Mais alors l'argument de symétrie du noyau tombe. De fait on vérifie qu'on a toujours $\mathbf{E}(\mathcal{X}_{x+h} - \mathcal{X}_x) = 0$ mais que $C_3 \neq 0$ (ce n'est pas évident et peut se faire par un calcul numérique). Ce qui implique bien sûr que la loi de $\mathcal{X}_{x+h} - \mathcal{X}_x$ n'est pas symétrique.

Remarques.

1. Ce qui précède est bien sûr valide pour $d = 1$. Mais les besoins de la modélisation financière amènent à des spécifications particulières qui seront examinées séparément.
2. Un modèle de champ de vitesse aléatoire incompressible, multifractal et dissipant l'énergie cinétique, se déduit aisément des considérations précédentes. Ceci sera développé ailleurs dans le cadre de la problématique turbulente.

Références

[1] J.-P. Kahane, Sur le chaos multiplicatif, Ann. Sci. Math. Quebec 9 (1985) 435–444.