

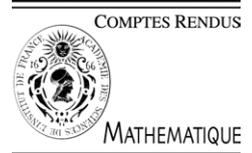


ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 25–28



<http://france.elsevier.com/direct/CRASSI/>

Géométrie différentielle

# Inégalités de Harnack pour les solutions d'équations du type courbure scalaire prescrite

Samy Skander Bahoura

Université Paris VI, 4, place Jussieu, 75005 Paris, France

Reçu le 25 avril 2005 ; accepté le 7 mai 2005

Disponible sur Internet le 23 juin 2005

Présenté par Thierry Aubin

## Résumé

Nous montrons certaines estimations a priori en dimension  $n \geq 2$  pour des équations du type courbure scalaire prescrite. Dans le cas particulier de la sphère  $\mathbb{S}_2$ , nous estimons la constante  $c$  dans l'inégalité  $\sup_{\mathbb{S}_2} u + \inf_{\mathbb{S}_2} u \geq c$ . **Pour citer cet article :** *S. Skander Bahoura, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Harnack inequalities for solutions of prescribed scalar curvature type equations.** We prove some a priori estimates in dimension  $n \geq 2$  for equations of type prescribed scalar curvature. In the particular case of the unit sphere  $\mathbb{S}_2$  we give an estimation of the constant  $c$  in the inequality  $\sup_{\mathbb{S}_2} u + \inf_{\mathbb{S}_2} u \geq c$ . **To cite this article:** *S. Skander Bahoura, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Sur les surfaces de Riemann  $(M, g)$ , considérons des équations du type :

$$\Delta u + f = V e^u \tag{1}$$

où  $f$  et  $V$  sont deux fonctions. On peut écrire  $f = \Delta h + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

On se propose de montrer une minoration du  $\sup u + \inf u$  sous certaines conditions sur  $f$  et  $V$ .

Dans le cas où  $f = R$ , avec  $R$  la courbure scalaire de  $M$ , on trouve l'équation de la courbure scalaire prescrite.

On suppose que les fonctions  $f$  et  $V$  vérifient :

$$f(x) \geq 0, \quad \text{et} \quad 0 \leq V(x) \leq b < +\infty, \quad \forall x \in M.$$

Soit  $u$  une solution de (1) et notons  $v_M$  le volume de  $M$ . On a :

Adresse e-mail : [bahoura@ccr.jussieu.fr](mailto:bahoura@ccr.jussieu.fr) (S. Skander Bahoura).

**Théorème 1.** Si  $0 < kv_M \leq 8\pi$ , alors, il existe une constante  $c = c(b, k, h, M)$  telle que :

$$\sup_M u + \inf_M u \geq c,$$

si  $8\pi < kv_M < 16\pi$ , alors, il existe  $C = C(k, M) \in ]0, 1[$  et  $c = c(b, k, h, M)$  telles que :

$$\sup_M u + C \inf_M u \geq c.$$

Dans le cas particulier de la sphère  $\mathbb{S}_2$  et  $f = R \equiv 2$ , on peut estimer la constante  $c$  :

**Théorème 2.** Pour  $\mathbb{S}_2$  :

$$-2 + 2 \log 2 - 2 \log b \leq c \leq 2 \log 2 - 2 \log b.$$

Toujours en dimension 2, notons que des résultats concernant des majorations du type  $\sup + \inf$  existent (voir [3,7]).

En dimension  $n \geq 3$ , des estimations du type  $\sup \times \inf$  sont obtenues pour les équations de la courbure scalaire prescrite lorsque les variétés sont compactes sans bord avec des conditions minimales sur la courbure scalaire, voir [2].

Sur les variétés à bord, en imposant une condition de saut à l'intérieur (ou concentration en un point), on obtient (dans un travail récent) le même type d'inégalités que dans le cas des variétés compactes sans bord.

On considère ici des équations du type suivant :

$$\Delta u_\epsilon = u_\epsilon^{N-1-\epsilon}, \quad u_\epsilon > 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad u_\epsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (2)$$

et

$$\Delta u = u^{N-1} + \epsilon u, \quad u > 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad \text{et} \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3)$$

Ici, on se place sur des ouverts bornés de  $\mathbb{R}^n$  et on remplace la condition de saut dans le cas des variétés compactes à bord par la condition de Dirichlet.

Pour le problème (2), il n'y a pas de solutions dans le cas  $\epsilon = 0$  lorsque  $\Omega$  est un domaine étoilé, voir Pohozaev [6], mais globalement, il y a des solutions de (2) dans le cas  $\epsilon > 0$ .

On sait qu'en dimension 3, il n'y a pas de solutions radiales positives pour le problème (3) (sur une boule) si  $\epsilon \leq \lambda_*$  avec  $\lambda_* > 0$ ; voir Brezis et Nirenberg [4]. On se place alors dans le cas  $n \geq 4$ .

Soit  $G$  la fonction de Green du laplacien relative à  $\Omega$  avec condition de Dirichlet. Pour  $0 < \alpha < 1$ , on pose :

$$\beta = \frac{\alpha}{\sup_{\Omega} \int_{\Omega} G(x, y) dy}.$$

**Théorème 3.** Pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ , il existe une constante positive  $c = c(K, \Omega, n) > 0$ , telle que pour toute solutions  $u_\epsilon$  du problème (2) avec  $\epsilon \in ]0, 2/(n-2)[$ , on ait :

$$\sup_{\Omega} u_\epsilon \times \inf_K u_\epsilon \geq c.$$

**Théorème 4.** Pour tout compact  $K$  de  $\Omega$  et tout  $0 < \alpha < 1$  il existe une constante  $c = c(\alpha, K, \Omega, n) > 0$ , telle que pour tout  $0 < \epsilon \leq \beta$  et pour toute fonction  $u_\epsilon$  vérifiant (3), on a :

$$\sup_{\Omega} u_\epsilon \times \inf_K u_\epsilon \geq c.$$

Nous pouvons donner ici la preuve du Théorème 2.

**Démonstration du Théorème 2.** D’après la proposition de [2],

$$c \geq -2 \int_{\mathbb{S}_2} G(x, y) dV_{g_0}(y) - 2 \log K + 2 \log \left( \frac{8\pi}{b} \right)$$

avec  $g_0$  la métrique standard de  $\mathbb{S}_2$ ,  $G$  une fonction de Green du laplacien de  $\mathbb{S}_2$  vérifiant,  $G(x, y) \geq 0$  et  $\int_{\mathbb{S}_2} G(x, y) dV_{g_0} \equiv k$  et  $K$  la meilleure constante dans l’inégalité de Sobolev (voir Aubin [1]),

$$\int_{\mathbb{S}_2} e^v dV_{g_0} \leq K e^{\frac{1}{16\pi} \int_{\mathbb{S}_2} |\nabla v|^2 dV_{g_0} + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_2} v dV_{g_0}}.$$

D’après Onofri (voir [5]), on peut prendre  $K \equiv 4\pi$ .

D’autre part, on a,

$$\Delta_{y, \text{distribution}} [\log [1 - \cos [d(x, y)]]] = 1 - 4\pi \delta_x$$

avec  $\Delta = -\nabla^i (\nabla_i)$ .

Ainsi, on peut choisir :

$$G(x, y) = \frac{\log 2}{4\pi} - \frac{\log [1 - \cos [d(x, y)]]}{4\pi},$$

avec  $0 \leq d(x, y) \leq \pi$ .

En se plaçant en coordonnées polaires  $(r, \phi)$ , on a :

$$g_0 = dr^2 + (\sin r)^2 d\phi^2, \quad \text{et} \quad dV_{g_0} = \sin r dr d\phi, \quad r \in ]0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi[.$$

Tout cela aboutit à :

$$\int_{\mathbb{S}_2} \log [1 - \cos [d(x, y)]] dV_{g_0} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \log (1 - \cos r) \sin r dr d\phi = 4\pi \log 2 - 4\pi,$$

d’où,

$$\int_{\mathbb{S}_2} G(x, y) dV_{g_0} \equiv 1.$$

Ce qui implique :

$$c \geq -2 + 2 \log 2 - 2 \log b.$$

Il reste à majorer  $c$  ; pour cela, on considère les fonctions suivantes :

$$v_\beta = \log \frac{\beta^2 - 1}{[\beta - \cos [d(x, y)]]^2}$$

avec  $\beta > 1$ . Ici sur la sphère  $M = \mathbb{S}_2$ ,  $k = 2$  et  $h \equiv 0$ , d’où  $c = c(b)$ . Comme

$$\Delta v_\beta + 2 = 2e^{v_\beta}.$$

En posant,  $w_\beta = \log 2 - \log b + v_\beta$ , on obtient :

$$\Delta w_\beta + 2 = b e^{w_\beta}.$$

Il est clair qu’en se plaçant en 0 puis en  $\pi$ , on a :

$$\sup_{\mathbb{S}_2} w_\beta + \inf_{\mathbb{S}_2} w_\beta = 2 \log 2 - 2 \log b,$$

et par conséquent,

$$c \leq 2 \log 2 - 2 \log b.$$

On pouvait prendre aussi les fonctions constantes,  $z \equiv \log 2 - \log b$ .  $\square$

## Références

- [1] T. Aubin, *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, 1998.
- [2] S.S. Bahoura, Différentes estimations du  $\sup u \times \inf u$  pour l'équation de la courbure scalaire prescrite en dimension  $n \geq 3$ , *J. Math. Pures Appl.* (9) 82 (1) (2003) 43–66.
- [3] H. Brezis, Y.Y. Li, I. Shafrir, A  $\sup + \inf$  inequality for some nonlinear elliptic equations involving exponential nonlinearities, *J. Funct. Anal.* 115 (2) (1993) 344–358.
- [4] H. Brezis, L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Comm. Pure Appl. Math.* 36 (4) (1983) 437–477.
- [5] E. Onofri, On the positivity of the effective action in a theory of random surfaces, *Commun. Math. Phys.* 86 (1982) 321–326.
- [6] S.I. Pohozaev, On the eigenfunctions of the equation  $\Delta u + f(u) = 0$ , *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 165 (1965) 36–39.
- [7] I. Shafrir, A  $\sup + \inf$  inequality for the equation  $-\Delta u = V e^u$ , *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 315 (2) (1992) 159–164.