



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 15–20



<http://france.elsevier.com/direct/CRASSI/>

Équations aux dérivées partielles

Problèmes de Goursat pour des systèmes semi-linéaires hyperboliques

Duplex Elvis Houpa^a, Marcel Dossa^b

^a *Faculté des sciences, université de Ngaoundéré, B.P. 454, Ngaoundéré, Cameroun*

^b *Faculté des sciences, université de Yaoundé I, B.P. 812, Yaoundé, Cameroun*

Reçu le 22 février 2005 ; accepté après révision le 10 mai 2005

Disponible sur Internet le 20 juin 2005

Présenté par Yvonne Choquet-Bruhat

Résumé

Pour des systèmes d'équations semi-linéaires hyperboliques du second ordre à données initiales sur la réunion de deux hypersurfaces caractéristiques sécantes, et sous des hypothèses de structure assez générales sur les termes non linéaires, on montre dans un cadre d'espaces de type Sobolev que la solution du problème de Goursat semi-linéaire ainsi posé est définie non seulement dans un voisinage assez petit de la sécante des deux hypersurfaces mais aussi dans un voisinage de la réunion toute entière de ces deux hypersurfaces. **Pour citer cet article :** *D.E. Houpa, M. Dossa, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Goursat problems for some semilinear hyperbolic systems. For some semilinear hyperbolic systems of the second order with initial data on two intersecting characteristic hypersurfaces, and under a general hypothesis on the structure of the nonlinear terms, we prove that the solution of the so-called semilinear Goursat problem is defined, not only on a small neighbourhood of the intersection of these hypersurfaces, but also in a neighbourhood of the entire union of the hypersurfaces. **To cite this article:** *D.E. Houpa, M. Dossa, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Our aim here is to prove that the characteristic problem (P) with initial data on the union of two intersecting characteristic hypersurfaces has a unique solution which is not only defined on a small neighbourhood of the intersection of these hypersurfaces but is also defined on a neighbourhood of the entire union of both hypersurfaces.

Adresses e-mail : ehoupa@uycdc.uninet.cm (D.E. Houpa), marceldossa@yahoo.fr (M. Dossa).

1631-073X/\$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.05.002

To achieve that goal, we are making use of a general hypothesis on the structure of the nonlinear terms of equations (E_r). This hypothesis is more general than those considered in [1] (in order to obtain a solution defined in a neighbourhood of one of the characteristic hypersurfaces), and is satisfied, for example, for quadratic nonlinearities for which the null condition of Klainerman is verified.

Our method of resolution is similar to that of [2]. Thus, we first of all prove that the integral system of Kirchhoff's formulae which are associated to the problem (P) and the derived equations up to order three of equations (E_r) has a unique solution in a space of continuous and bounded functions and the solution is defined on a neighbourhood of the whole union of the characteristic hypersurfaces on which initial data are given.

The so-called semiglobal existence result thus obtained for the system of Kirchhoff formulae is combined to classical local existence techniques of [5,7] in order to establish, in some weighted Sobolev spaces, a priori estimates for local solutions of (P). We can thus deduce a semiglobal existence result for the problem (P), that is the solution obtained is defined in a neighbourhood of the whole union of the two initial characteristic hypersurfaces.

1. Cadre géométrique, hypothèses et position du problème

On considère le système d'équations semi-linéaires du second ordre suivant :

$$(E_r) : A^{\lambda\mu}(x^\alpha)\partial_{\lambda\mu}^2 u_r + f_r(x^\alpha, u_s, \partial_\nu u_s) = 0, \text{ où } \alpha, \lambda, \mu, \nu = 0, \dots, 3; r, s = 1, \dots, N; \partial_{\lambda\mu}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}; \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}; L = A^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}^2 \text{ est un opérateur } x^0\text{-hyperbolique.}$$

- \mathcal{T} est une 2-surface de \mathbb{R}^4 définie par : $\{(x^\alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid x^0 = 0, x^1 = 0; (x^2, x^3) \in B\}$, où B est un domaine fermé et borné de \mathbb{R}^2 .
- $\mathcal{Y} = \{(x^\alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid x^0 \geq |x^1|; (x^2, x^3) \in B\}$, $\mathcal{S}^w = \{(x^\alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid x^0 = (-1)^{w-1}x^1; (x^2, x^3) \in B\}$ avec $w = 1, 2$. $\mathcal{S} = \mathcal{S}^1 \cup \mathcal{S}^2$, $\mathcal{T} = \mathcal{S}^1 \cap \mathcal{S}^2$; \mathcal{D}^w est la projection de \mathcal{S}^w dans l'espace des (x^i) , $i = 1, 2, 3$; pour $T \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{Y}_T = \mathcal{Y} \cap \{x^0 \leq T\}$, $\mathcal{S}_T^w = \mathcal{S}^w \cap \{x^0 \leq T\}$, $\Sigma_T^w = \mathcal{S}^w \cap \{x^0 = T\}$.
- Pour toute fonction v définie dans un domaine de \mathcal{Y} , on pose $[v]^w = v|_{\mathcal{S}^w} : [v]^w(x^1, x^2, x^3) = v((-1)^{w-1}x^1, x^1, x^2, x^3)$.
- *Hypothèse (C)* : \mathcal{S}^w est caractéristique pour L i.e. : $[A^{00}]^w + 2(-1)^w[A^{01}]^w + [A^{11}]^w = 0$, $w = 1, 2$.
- Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, \mathcal{P}_σ est l'hyperboloïde parabolique d'équation : $(x^0)^2 - (x^1)^2 = \sigma^2$, $\mathcal{Y}_{T,\sigma} = \mathcal{Y}_T \cap \mathcal{Y}_{(\sigma)}$, $G_{T,\sigma} = \mathcal{Y}_{(\sigma)} \cap \{x^0 = T\}$.
- $\mathcal{Y}^{(g)} = \bigcup_{T \in \mathbb{R}_+^*} \mathcal{Y}_{T,g(T)}$ où $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une application.
- φ_r^w est une fonction définie sur \mathcal{D}^w .

Sous l'hypothèse (C), on considère le problème de Goursat suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} (E_r) : A^{\lambda\mu}(x^\alpha)\partial_{\lambda\mu}^2 u_r + f_r(x^\alpha, u_s, \partial_\nu u_s) = 0 & \text{dans } \mathcal{Y}, \\ (C-I) : u_r = \varphi_r^w & \text{sur } \mathcal{S}^w. \end{cases}$$

Dans un cadre fonctionnel d'espaces de type Sobolev à préciser, et sous l'hypothèse de structure (\mathcal{G}_1) (ci-dessous), on montre que la solution de (P) existe et est définie non seulement dans un voisinage assez petit de \mathcal{T} mais aussi dans un voisinage de \mathcal{S} tout entier.

On fait les hypothèses suivantes : soit $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$:

- *Hypothèse (α_p)* : L est un opérateur x^0 -hyperbolique tel que : $A^{00} > 0$ et $A^{ij}X_iX_j$ est définie négative; $A^{\lambda\mu} \in C^p(\mathbb{R}^2 \times B)$.
- *Hypothèse géométrique (\mathcal{G})* : $\forall \sigma \in \mathbb{R}_+^*$, \mathcal{P}_σ est spatiale pour L .
- *Hypothèse de structure \mathcal{G}_1* : Les f_r sont des fonctions de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2 \times B \times V \times \mathbb{R}^{4N}$, (V ouvert de \mathbb{R}^N) et telles que $\forall r \in [1, n] \cap \mathbb{N}$, $\forall w \in 1, 2$, $f_r(x^\alpha; [u_s]^w; [\partial_\nu u_s]^w)$ est linéaire par rapport aux

dérivées $[\partial_0 u_s]^w$ lorsqu'on y remplace (x^α) par $((-1)^{w-1}x^1, x^1, x^2, x^3)$ et les $[\partial_i u_s]^w$ par leur valeur $\partial_i [u_s]^w - (-1)^{w-1} [\partial_0 u_s]^w$, pour $i = 1, 2, 3$.

– Hypothèse de structure (\mathcal{G}_2) : Les f_r sont des fonctions de classe C^∞ dans $R^2 \times B \times V \times \mathbb{R}^{4N}$ linéaires par rapport aux dérivées $\partial_v u_s$.

Hypothèse (γ_p) : $\forall r, \forall w, \varphi_r^w \in C^p(\mathcal{D}^w)$ et $\varphi_r^1 = \varphi_r^2$ sur \mathcal{T} ; $\varphi_r^w(\mathcal{D}^w) \subset V$

Remarque 1. (i) L'hypothèse géométrique (\mathcal{G}) est vérifiée dans le cas où : $A^{00} + A^{11} \geq 2|A^{01}|$.

(ii) L'hypothèse (\mathcal{G}_2) est une condition suffisante pour que l'hypothèse (\mathcal{G}_1) soit vérifiée.

(iii) L'hypothèse (\mathcal{G}_1) entraîne que les restrictions à S^w des équations (E_r) se réduisent à des équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre d'inconnues $[\partial_0 u_s]^w$ qu'on peut résoudre globalement dans S^w .

(iv) Si les fonctions f_r sont de la forme $L_r + Q_r$ avec les L_r vérifiant l'hypothèse (\mathcal{G}_2) et les Q_r étant des fonctions de classe C^∞ quadratiques en les $\partial_v u_s$ et vérifiant la condition de nullité de Klainerman alors les f_r vérifient l'hypothèse de structure (\mathcal{G}_1).

(v) L'hypothèse de structure sur les f_r mentionnée dans (iv) est plus générale que celles faites dans [1].

2. Cadre fonctionnel

On notera : pour $k \in \mathbb{N}$, $\partial_0^k = \frac{\partial^k}{(\partial x^0)^k}$; pour $\alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{N}^3$, $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x^1)^{\alpha_1} (\partial x^2)^{\alpha_2} (\partial x^3)^{\alpha_3}}$ et pour $\alpha = (\alpha_v) \in \mathbb{N}^4$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x^0)^{\alpha_0} (\partial x^1)^{\alpha_1} (\partial x^2)^{\alpha_2} (\partial x^3)^{\alpha_3}}$.

– Pour toute fonction vectorielle $v = (v_r)$ définie dans un domaine de \mathcal{S}^w et pour tout $p \in \mathbb{N}$ on pose :

$$\|v\|_{HP(\Sigma_t^w, \mathcal{S}^w)} = \left(\sum_r \sum_{|\alpha| \leq p} \int_{\Sigma_t^w} |\partial^\alpha v_r|^2 d\sigma(\Sigma_t^w) \right)^{1/2}$$

où $d\sigma(\Sigma_t^w)$ est la mesure induite sur Σ_t^w par $dx' = dx^1 dx^2 dx^3$;

$$\|v\|_{HP(\mathcal{S}_t^w)} = \left(\sum_r \sum_{|\alpha| \leq p} \int_{\mathcal{S}_t^w} |\partial^\alpha v_r|^2 dx' \right)^{1/2} ; \quad \|v\|_{EP(\mathcal{S}_t^w)} = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in]0, t]} \|v\|_{HP(\Sigma_\tau^w, \mathcal{S}^w)} ;$$

(si les seconds membres existent), les dérivées étant prises au sens des distributions.

– Pour toute fonction vectorielle $v = (v_r)$ définie dans un domaine de \mathcal{Y} et pour tout $p \in \mathbb{N}$ on pose :

$$\|v\|_{HP(G_{t,\sigma}, \mathcal{Y})} = \left(\sum_r \sum_{|\alpha| \leq p} \int_{G_{t,\sigma}} |D^\alpha v_r|^2 dx' \right)^{1/2} ;$$

$$\|v\|_{KP(\mathcal{Y}_{t,\sigma})} = \left(\sum_r \sum_{|\alpha| \leq p} \int_0^t \tau^{-1} \|v\|_{HP(G_{\tau,\sigma}, \mathcal{Y})}^2 d\tau \right)^{1/2} ; \quad \|v\|_{EP(\mathcal{Y}_{t,\sigma})} = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in]0, t]} \tau^{-1/2} \|v\|_{HP(G_{\tau,\sigma}, \mathcal{Y})} ;$$

$$\|v\|_{\mathcal{K}^p(\mathcal{S}_t^w, \mathcal{Y})} = \left(\sum_{k=0}^{p-1} \|[\partial_0^k v]^w\|_{H^{2(p-k)-1}(\mathcal{S}_t^w)}^2 \right)^{1/2} ; \quad \|v\|_{\mathcal{E}^p(\mathcal{S}_t^w, \mathcal{Y})} = \left(\sum_{k=0}^{p-1} \|[\partial_0^k v]^w\|_{E^{2(p-k)-1}(\mathcal{S}_t^w)}^2 \right)^{1/2} ;$$

$$\|v\|_{\mathcal{K}^p(\mathcal{Y}_{t,\sigma})} = \left(\|v\|_{KP(\mathcal{Y}_{t,\sigma})}^2 + \sum_{w=1}^2 \|v\|_{\mathcal{K}^p(\mathcal{S}_t^w, \mathcal{Y})}^2 \right)^{1/2} ; \quad \|v\|_{\mathcal{E}^p(\mathcal{Y}_{t,\sigma})} = \left(\|v\|_{EP(\mathcal{Y}_{t,\sigma})}^2 + \sum_{w=1}^2 \|v\|_{\mathcal{E}^p(\mathcal{S}_t^w, \mathcal{Y})}^2 \right)^{1/2} .$$

(si les seconds membres existent), les dérivées étant prises au sens des distributions.

On considère les espaces fonctionnels suivants :

- $C^\infty(\mathcal{Y}_{t,\sigma})$ est l'espace des restrictions à $\mathcal{Y}_{t,\sigma}$ de fonctions de classe C^∞ sur \mathbb{R}^4 .
- $E^P(\mathcal{S}_t^w)$ est le sous-espace de $H^P(\mathcal{S}_t^w)$ formé de fonctions vectorielles $v = (v_r)$ pour lesquelles $\|v\|_{E^P(\mathcal{S}_t^w)} < +\infty$.
- $\mathcal{K}^P(\mathcal{Y}_{t,\sigma})$ (resp. $\mathcal{E}^P(\mathcal{Y}_{t,\sigma})$) est le sous-espace de $H^P(\mathcal{Y}_{t,\sigma})$ formé de fonctions vectorielles $v = (v_r)$ pour lesquelles $\|v\|_{\mathcal{K}^P(\mathcal{Y}_{t,\sigma})} < +\infty$ (resp. $\|v\|_{\mathcal{E}^P(\mathcal{Y}_{t,\sigma})} < +\infty$).
- $\widehat{E}^P(\mathcal{Y}_{t,\sigma})$ est la fermeture dans $\mathcal{E}^P(\mathcal{Y}_{t,\sigma})$ de $C^\infty(\mathcal{Y}_{t,\sigma})$.
- $\widehat{E}^P(\mathcal{S}_t^w)$ est la fermeture dans $E^P(\mathcal{S}_t^w)$ de l'espace $C^\infty(\mathcal{S}_t^w)$ des restrictions à \mathcal{S}_t^w de fonctions de classe C^∞ sur \mathbb{R}^4 .
- $\widehat{E}_{loc}^P(\mathcal{S}^w)$ est l'espace des fonctions vectorielles v définies dans \mathcal{S}^w et telles que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $v|_{\mathcal{S}_t^w} \in \widehat{E}^P(\mathcal{S}_t^w)$.
- $\widehat{\mathcal{E}}_{loc}^P(\mathcal{Y}^{(g)})$ est l'espace des fonctions vectorielles v définies dans $\mathcal{Y}^{(g)}$ et telles que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $v|_{\mathcal{Y}_{t,g(t)}} \in \widehat{\mathcal{E}}^P(\mathcal{Y}_{t,g(t)})$.

3. Formulations et preuve des résultats

Théorème 3.1. (1) Soit $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 5$. Si les f_r vérifient l'hypothèse de structure (\mathcal{G}_1) , si les hypothèses (α_∞) , (C) et (\mathcal{G}) sont vérifiées, et si les données initiales $\varphi^w = (\varphi_r^w)$ sont telles que :

- (i) $\varphi^w \in \widehat{E}_{loc}^{2s-1}(\mathcal{S}^w)$;
- (ii) $\varphi^1 = \varphi^2$ sur $\mathcal{T} = \mathcal{S}^1 \cap \mathcal{S}^2$.

Alors il existe une application g de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* , et une unique solution $u = (u_r)$ du problème de Goursat semi-linéaire (P) définie dans le domaine $\mathcal{Y}^{(g)}$ et telle que $u \in \widehat{\mathcal{E}}_{loc}^s(\mathcal{Y}^{(g)})$.

(2) Si en outre l'hypothèse de structure (\mathcal{G}_2) est vérifiée, on peut supposer $s \geq 4$ et avoir les mêmes conclusions que ci-dessus.

(3) Si outre les hypothèses de (1) ou (2) on suppose que les données initiales $\varphi^w = (\varphi_r^w)$ sont des restrictions à \mathcal{S}^w de fonctions de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2 \times B$, alors la solution $u \in C^\infty(\mathcal{Y}^{(g)})$.

Pour établir ce théorème, on a besoin du résultat suivant portant sur le système intégral des formules de Kirchoff associées au problème (P) , il sera formulé avec les notations de [3], en particulier :

- $C_{M_0}^-$ est le demi-conoïde caractéristique pour L issu de M_0 et dirigé vers le passé; $(C_{M_0}^-)$ est la partie de $C_{M_0}^-$ qui se trouve au-dessus de S ; $S_0(M_0)$ désigne la 2-surface $C_{M_0}^- \cap S$;
- Une partie D de \mathbb{R}^4 dont la frontière contient S est dite causale si : $\forall M_0 \in D$, $(C_{M_0}^-) \subset D$ et M_0 est l'unique point singulier de $(C_{M_0}^-)$.

Théorème 3.2. Sous les hypothèses (α_7) , ((cf. définition page 2) (γ_7) ((cf. définition page 3) et (\mathcal{G}_1) on a :

(1) Toute solution $u = (u_r)$ de (P) cinq fois différentiable et admettant des dérivées jusqu'à l'ordre quatre bornées dans \mathcal{Y} , vérifie ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre trois le système intégral des formules de Kirchoff généralisées suivant : pour tout point $M_0(x_0^\alpha)$ de \mathcal{Y} ,

$$(\mathcal{F}_S) \quad \begin{cases} 4\pi U_S(x_0^\alpha) = \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^\pi \sin \lambda_2 d\lambda_2 \int_0^{\psi(x_0^\alpha; \lambda_h)} \mathcal{H}_S(U_T, \Omega_T^R, \widehat{\Omega}_T^R) d\lambda_1 + \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^\pi \mathcal{J}_S([U_T], \Omega_T^R) d\lambda_2, \\ \Omega_S^R(x_0^\alpha; \lambda_h) = \Omega_{0S}^R + \int_0^{\lambda_1} H_T^R(U_Q) \Omega_S^T d\lambda_1, \end{cases}$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_R = (u_r, \partial_\alpha u_r, \partial_{\alpha\beta}^2 u_r, \partial_{\alpha\beta\gamma}^3 u_r), \\ \mathcal{H}_S(U_T, \Omega_T^R, \widehat{\Omega}_T^R) = \square([U_R]L_S^R(U_T, \Omega_T^R, \widehat{\Omega}_T^R) + \sigma \omega_S^R[f_R(U_T)]), \\ \mathcal{J}_S([U_T], \Omega_T^R) = E_S^i([U_T], \Omega_T^R) \left(\Delta_i^1 - \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_h} \Delta_i^h \right), \\ \Omega_S^R = (\omega_S^R; \omega_{S,i}^R; \omega_{S,ij}^R), \quad \widehat{\Omega}_S^R = \left(\frac{\omega_S^R - \delta_S^R}{\lambda_1}; \frac{\omega_{S,i}^R}{\lambda_1}; \frac{\omega_{S,ij}^R}{\lambda_1} \right), \\ \Omega_{0S}^R = (\delta_S^R; 0; 0), \quad \omega_{S,i}^R = \frac{\partial \omega_S^R}{\partial p_i^0}, \quad \omega_{S,ij}^R = \frac{\partial^2 \omega_S^R}{\partial p_i^0 \partial p_j^0}, \\ \Delta = \left| \frac{D(x^i)}{D(\lambda_j)} \right|, \quad \square = \frac{\Delta}{\sin \lambda_2}, \quad \Delta_i^j \equiv \text{mineur associé à } \Delta, \quad \sigma = -|\square|^{-1/2}, \\ p_1^0 = \sin \lambda_2 \cos \lambda_3, \quad p_2^0 = \sin \lambda_2 \sin \lambda_3, \quad p_3^0 = \cos \lambda_2 \\ \text{sur } S_0(M_0) \text{ on a } \lambda_1 = \psi(x_0^\alpha; \lambda_h); \quad i, j = 1, 2, 3; \quad h = 2, 3; \quad \alpha, \beta, \gamma = 0, \dots, 3, \\ H_T^R \text{ est une matrice triangulaire dépendant des fonctions } A^{\lambda\mu}, f_r \text{ et} \\ \text{de leurs dérivées jusqu'à l'ordre trois et deux respectivement.} \end{array} \right.$$

Les L_S^R, ω_S^R, E_S^i sont les fonctions auxiliaires introduites dans [3]; les p_i^0 sont des paramètres permettant de repérer les bicaractéristiques issues de M_0 , qui engendrent $C_{M_0}^-$, λ_1 est un paramètre permettant de repérer les points d'une bicaractéristique donnée de $C_{M_0}^-$.

(2) Il existe une constante positive h et des constantes positives $C(h), M(h), B(h)$ telles que pour tout domaine causal \mathcal{Y}_0 dont la frontière contient \mathcal{S} et qui est contenu dans le domaine $\mathcal{D}(C(h), M(h), B(h))$ défini par :

$$\{(x^\alpha) \in \mathcal{Y} \mid (0 < a < M(h) \text{ et } a \leq C(h)|x^1|) \text{ ou } (0 < a < M(h) \text{ et } a > C(h)|x^1| \text{ et } x^0 < B(h))\}$$

avec $a = x^0 - |x^1|$, le système intégral (\mathcal{F}_S) admet une unique solution $((U_S), (\Omega_S^R))$ dans l'espace des fonctions continues et bornées et on a : (i) sur S^w les fonctions U_R prennent les valeurs $\Phi_R = ([u_r]^w, [\partial_\alpha u_r]^w, [\partial_{\alpha\beta}^2 u_r]^w, [\partial_{\alpha\beta\gamma}^3 u_r]^w)$; (ii) $\forall (x^\alpha) \in \mathcal{Y}_0, |U_R(x^0, x^i) - \Phi_R(x^i)| \leq h$.

Idee de la démonstration du Théorème 3.2.

(1) D'après la Remarque 1(iii), les restrictions à \mathcal{S} des dérivées jusqu'à l'ordre 3 de la solution éventuelle u du problème (P) , notées (Φ_S) , sont déterminées de manière unique sur \mathcal{S} tout entier. La preuve de (1) est alors similaire à celle faite dans [3] dans le cas du problème de Cauchy ordinaire.

(2) La solution du système intégral (\mathcal{F}_S) est construite, dans l'espace des fonctions continues et bornées définies sur un domaine causal \mathcal{Y}_1 , voisinage de \mathcal{S} dans \mathcal{Y} (muni de la métrique de la convergence uniforme), comme point fixe d'une application contractante Θ envoyant une boule centrée en (Φ_S) dans elle-même. Θ est définie de la manière suivante : $(V_S) \mapsto (U_S)$ avec :

$$4\pi U_S(x_0^\alpha) = \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^\pi d\lambda_2 \sin \lambda_2 \int_0^{\psi(x_0^\alpha; \lambda_h)} \mathcal{H}_S(V_T, \Omega) d\lambda_1 + \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^\pi \mathcal{J}_S(\Omega) d\lambda_2.$$

Les $(\Omega_S^R) = \Omega$ étant solution du système intégral linéaire : $\Omega(x_0^\alpha; \lambda_h) = \Omega_0 + \int_0^{\lambda_1} F(V_S, \Omega) d\lambda_1$.

Pour montrer que Θ est contractante, on utilise une étude complète de la 2-surface $S_0(M_0)$ pour l'intégrale double; en ce qui concerne l'intégrale triple, on montre que lorsque $M_0(x_0^\alpha)$ tend vers un point de \mathcal{S} , on a la fonction $V(x_0^\alpha) = \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^\pi d\lambda_2 \sin \lambda_2 \int_{\psi(x_0^\alpha; \lambda_h)}^0 d\lambda_1$ qui tend vers zéro (cf. [4]). \square

Démonstration du Théorème 3.1.

(1) Pour établir ce résultat, il suffit de montrer que $\forall T \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $g(T) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que le problème (P) admet dans $\mathcal{Y}_{T,g(T)}$ une unique solution $u \in \widehat{\mathcal{E}}^s(\mathcal{Y}_{T,g(T)})$. \square

3.1. Idée de la démonstration du Théorème 3.1

Pour des raisons de densité et de complétude des espaces de type Sobolev considérés, on peut supposer que toutes les données sont C^∞ .

On déduit du Théorème 3.2 partie (2) qu'il existe, vu l'hypothèse (G), $g(T) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que le système intégral (\mathcal{F}_S) des formules de Kirchhoff admet une unique solution $(\bar{v}_r, \bar{v}_{r\alpha}, \bar{v}_{r\alpha\beta}, \bar{v}_{r\alpha\beta\gamma})$ dans l'espace des fonctions continues et bornées dans $\mathcal{Y}_{T,g(T)}$.

D'après [7], il existe $T_0 \in]0, T]$ tel que dans le domaine $\mathcal{Y}_{T_0,f(T)}$ le problème (P) admet une solution unique $u = (u_r) \in C^\infty(\mathcal{Y}_{T_0,f(T)})$. Du Théorème 3.2 partie (1) on déduit que les fonctions u_r et leurs dérivées jusqu'à l'ordre trois vérifient le système intégral (\mathcal{F}_S). Par unicité de la solution de ce système intégral on a donc : $u_r = \bar{v}_r$, $\partial_\alpha u_r = \bar{v}_{r\alpha}$, $\partial_{\alpha\beta}^2 u_r = \bar{v}_{r\alpha\beta}$, $\partial_{\alpha\beta\gamma}^3 u_r = \bar{v}_{r\alpha\beta\gamma}$. On déduit de ce qui précède que $\forall T_1 \in]0, T]$, toute solution u de (P) définie dans $\mathcal{Y}_{T_1,f(T)}$ vérifie l'estimation a priori :

$$\|u\|_{\mathcal{E}^s(\mathcal{Y}_{T_1,g(T)})} \leq K \quad (*)$$

où la constante K ne dépend que de $K_0 = \max_r \max_{\mathcal{Y}_{T,g(T)}} \{|\bar{v}_r|, |\bar{v}_{r\alpha}|, |\bar{v}_{r\alpha\beta}|, |\bar{v}_{r\alpha\beta\gamma}|\}$ et de $\sum_{w=1}^2 \|\varphi^w\|_{E^{2s-1}(\mathcal{S}_T^w)}$.

On en déduit, vu les résultats de [6,7], l'existence et l'unicité de solution pour le problème (P) dans $\mathcal{Y}_{T,g(T)}$ tout entier.

Remarque 2. Le Théorème 3.1 s'étend facilement au cas où $B = \mathbb{R}^2$; il est comparable aux résultats de [1] ; il s'applique aux équations de Yang–Mills–Higgs, ainsi qu'aux applications harmoniques hyperboliques.

Références

- [1] A. Cabet, Thèse de Doctorat, Université de Tours, 2003.
- [2] M. Dossa, S. Bah, Solutions de problèmes de Cauchy semi-linéaires hyperboliques sur un cône caractéristique, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 333 (2001) 179–184.
- [3] Y. Fournes-Bruhat, Théorèmes d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, Acta Math. 88 (1952) 141–225.
- [4] D.D.E. Houpa, Thèse de Doctorat/Ph.D. en cours, Université de Yaoundé 1.
- [5] H. Müller zum Hagen, Characteristic initial value problems for hyperbolic systems of second order differential equations, Ann. Inst. H. Poincaré 53 (2) (1990) 159–215.
- [6] H. Müller zum Hagen, H.J. Seifert, On characteristic initial value and mixed problems, Gen. Rel. Gravit. 8 (1977) 259–301.
- [7] A.D. Rendall, Reduction of the characteristic initial value problem to the Cauchy problem and applications to Einstein equations, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 427 (1990) 221–239.