Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 415–420

COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique

Évaluation ponctuelle et espace de Hardy : le cas multi-échelle

Daniel Alpay [a], Aad Dijksma [b], Dan Volok [c]

[a] *Department of Mathematics, Ben-Gurion University of the Negev, P.O. Box 653, 84105 Beer-Sheva, Israel*
[b] *Department of Mathematics, University of Groningen, P.O. Box 800, NL-9700 AV Groningen, The Netherlands*
[c] *Department of Networks and Systems, Delft University of Technology, Mekelweg 4, NL-2628 CD Delft, The Netherlands*

Reçu le 3 janvier 2005 ; accepté le 3 février 2005

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Nous définissons une évaluation ponctuelle pour les fonctions de transfert de systèmes causaux dissipatifs multi-échelle. Nous associons à de tels systèmes un espace de type de Branges Rovnyak, qui sert d'espace d'état pour une réalisation coisométrique de la fonction de transfert. Nous sommes dans un cadre où les « constantes » et les variables non commutatives commutent d'une certaine manière. ***Pour citer cet article : D. Alpay et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Point evaluation and Hardy space: the multiscale case. We define a point evaluation for transfer operators of multiscale causal dissipative systems. We associate to such a system a de Branges Rovnyak space, which serves as the state space of a coisometric realization. ***To cite this article: D. Alpay et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abridged English version

In the classical theory of discrete time-invariant dissipative systems one considers the Hardy space of functions analytic in the open unit disk $\mathbb{D}$ and the operators of multiplication by functions analytic and contractive in $\mathbb{D}$. In the time-varying case, the Hardy space, the Schur class, the complex variable z and the complex constants are replaced by upper-triangular Hilbert–Schmidt operators, upper-triangular contractive operators, the bilateral shift operator Z and diagonal operators, respectively. In particular, an upper-triangular operator S admits the power series representation $S = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n S_n$, where S_n are diagonal. The point evaluation of an upper-triangular operator on a diagonal allows us to extend many function-theoretical results from the setting of the unit disk to that of

Adresses e-mail : dany@math.bgu.ac.il (D. Alpay), dijksma@math.rug.nl (A. Dijksma), danvolok@hotmail.com (D. Volok).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.02.006

upper-triangular operators; see [1,9]. The present Note deals with the case of linear systems, indexed by the nodes of an infinite homogeneous tree $\mathcal{T}$ of order q (the case $q = 1$ is the classical case of systems indexed by integers). An important special case – that of multiscale stationary (or time-invariant) systems – was introduced in [8] and studied in [5,6]. In that case one fixes some choice of a primitive shift $\bar{\gamma}$ acting on the right on the nodes of $\mathcal{T}$ and defines the corresponding shift operator, acting on the left on the space $\ell_2(\mathcal{T})$ by $\bar{\gamma} f(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\sqrt{q}} f(t\bar{\gamma})$ (the factor $\frac{1}{\sqrt{q}}$ ensures that the shift operator $\bar{\gamma}$ is an isometry: $\bar{\gamma}^*\bar{\gamma} = I$). Then one considers power series of the form $s = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\gamma}^n \mathbf{s}_n$ with the coefficients $\mathbf{s}_n$ from the C^*-algebra of 'constants'

$$\mathbb{K} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\gamma}^n \bar{\gamma}^{*n} c_n,\ c_n \in \mathbb{C},\ \sup_n \left| \sum_{i=1}^{n} c_i \right| < \infty \right\}.$$

Thus the multiscale stationary setting is, in a certain sense, analogous to the classical non-stationary one. Note that for every $\mathbf{c} \in \mathbb{K}$ there is a unique $\mathbf{c}^{(1)} \in \mathbb{K}$ such that $\mathbf{c}\bar{\gamma} = \bar{\gamma}\mathbf{c}^{(1)}$. More generally, $\mathbf{c}\bar{\gamma}^n = \bar{\gamma}^n \mathbf{c}^{(n)}$ and $(\bar{\gamma}\mathbf{c})^n = \bar{\gamma}^n \mathbf{c}^{[n]}$ where $\mathbf{c}^{[n]} = \mathbf{c}\mathbf{c}^{(1)} \cdots \mathbf{c}^{(n-1)}$ is called the evaluation of $\bar{\gamma}^n$ at the point $\mathbf{c}$.

In the present Note we consider the multiscale non-stationary case, where now q non-commuting shifts all come into play and the commutation relations between these shifts and the appropriately defined space of constants are more involved.

1. Les constantes

Après avoir introduit un ordre partiel « $\preceq$ » (voir [8] et [5]) sur l'arbre nous pouvons définir q opérateurs de déplacement $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ qui agissent sur $\mathcal{T}$ (à droite), et tels que

$$\forall t \in \mathcal{T}: \quad \left\{ s \in \mathcal{T}\colon\ t \preceq s,\ \operatorname{dist}(t,s) = 1 \right\} = \{t\alpha_1, \ldots, t\alpha_q\}.$$

Les opérateurs correspondants α_ℓ définis sur l'espace $\ell_2(\mathcal{T})$ par $\alpha_\ell f(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} f(t\alpha_\ell)$ satisfont les relations de Cuntz : l'opérateur $\bar{\alpha} \stackrel{\text{déf.}}{=} (\alpha_1^* \cdots \alpha_q^*) : \ell_2(\mathcal{T})^q \mapsto \ell_2(\mathcal{T})$ est unitaire.

Les opérateurs causaux stationnaires sur l'arbre ont pour fonctions de transfert des opérateurs de la forme $s = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\gamma}^n \mathbf{c}_n$ où les $\mathbf{c}_n$ appartiennent à $\mathbb{K}$. Pour décrire une représentation analogue des opérateurs causaux (et donc motiver la notion de constantes dans le cas considéré ici) nous introduisons le semi-groupe libre $\mathcal{A}$ engendré par les α_ℓ et $\mathcal{A}_*^2$ l'ensemble des paires $(w_1, w_2) \in \mathcal{A}^2$ qui ne peuvent pas s'écrire $w_1 = \alpha_\ell w_1',\ w_2 = \alpha_\ell w_2'$ avec $w_1', w_2' \in \mathcal{A}$. Pour $w \in \mathcal{A}$ nous noterons :

$$|w| \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{cases} n, & w = \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_n}, \\ 0, & w = 1. \end{cases}$$

Il est démontré dans [5] que chaque opérateur causal de $\ell_2(\mathcal{T})$ admet une représentation de la forme

$$S = \sum_{\substack{(w_1,w_2) \in \mathcal{A}_*^2 \\ |w_1| \geqslant |w_2|}} w_1^* w_2 S_{w_1,w_2}, \tag{1}$$

où S_{w_1,w_2} sont des opérateurs diagonaux (par rapport à la base canonique $\{\chi_t\}$ de $\ell_2(\mathcal{T})$). Les coefficients S_{w_1,w_2} dans (1) sont uniquement déterminés par la condition

$$S_{w_1,w_2} \chi_t = \begin{cases} \langle S\chi_t, \chi_{sw_1} \rangle \chi_t, & t \text{ est de la forme } t = sw_2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

Chaque opérateur causal peut donc s'écrire $S = \sum_{w \in \mathcal{A}} w^* \mathbf{s}_{[w]}$, avec les $\mathbf{s}_w$ de la forme

$$\mathbf{s}_{[w]} = \sum_{\substack{(w_1,w_2) \in \mathcal{A}_*^2 \\ |w_1| = |w_2|}} w_1^* w_2 S_{w_1,w_2}.$$

Ces opérateurs forment l'espace $\mathcal{C}$ des constantes (la contrepartie dans le cas non stationnaire de l'algèbre $\mathbb{K}$ définie dans la version anglaise abrégée de la Note). Nous dénotons par $\mathcal{C}_2$ l'espace des constantes qui sont des opérateurs de Hilbert–Schmidt. Puisque $\bar{\alpha}$ est unitaire, nous remarquons que

$$\sum_{\substack{w\in\mathcal{A}\\|w|=n}} w^*w = 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

et donc pour $\mathbf{d} \in \mathcal{C}$ et $w \in \mathcal{A}$ nous avons

$$\mathbf{d}w^* = \sum_{\substack{w'\in\mathcal{A}\\|w'|=|w|}} w'^*\mathbf{d}^{(w)}_{[w']}, \quad \text{avec } \mathbf{d}^{(w)}_{[w']} \stackrel{\text{déf.}}{=} w'\mathbf{d}w^* \in \mathcal{C}. \tag{3}$$

2. Évaluation ponctuelle et espace de Hardy

L'espace de Hardy classique est maintenant remplacé par l'espace $\mathbf{H}_2$ des opérateurs de Hilbert–Schmidt causaux.

$$\mathbf{H}_2 \stackrel{\text{déf.}}{=} \left\{F = \sum_{w\in\mathcal{A}} w^*\mathbf{f}_{[w]},\ \|F\|_2^2 \stackrel{\text{déf.}}{=} \operatorname{Tr}(F^*F) = \sum_{w\in\mathcal{A}} \operatorname{Tr}(\mathbf{f}^*_{[w]}\mathbf{f}_{[w]}) < \infty\right\}.$$

Le résultat suivant est une conséquence directe des relations de commutation (3) entre les opérateurs de déplacement et les constantes. Il est la clef de ce que nous pensons être une nouvelle approche à l'étude des systèmes multi-échelle, et que nous esquissons dans cette Note.

Théorème 2.1. *Soit* $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_1 \cdots \mathbf{d}_q) \in \mathcal{C}^q$ *tel que* $\limsup_{n\to\infty} \|(\bar{\alpha}\mathbf{d}^*)^n\|^{1/n} < 1$ (*nous noterons* : $\mathbf{d} \in \mathbb{B}$). *Il existe des constantes notées* $\mathbf{d}^{[w]} \stackrel{\text{déf.}}{=} (\mathbf{d}\alpha)^{|w|}w^*$, $\alpha \stackrel{\text{déf.}}{=} \bar{\alpha}^*$, $0^{[1]} \stackrel{\text{déf.}}{=} I$ *et telles que*

$$K_{\mathbf{d}} \stackrel{\text{déf.}}{=} (I - \bar{\alpha}\mathbf{d}^*)^{-1} = \left(I - \sum_{j=1}^{q} \alpha_j^*\mathbf{d}_j^*\right)^{-1} = \sum_{w\in\mathcal{A}} w^*\mathbf{d}^{[w]*}. \tag{4}$$

Soit $S = \sum_{w\in\mathcal{A}} w^*\mathbf{s}_{[w]}$ et $\mathbf{d} \in \mathbb{B}$. Nous définissons l'évaluation ponctuelle :

$$S^\wedge(\mathbf{d}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{w\in\mathcal{A}} \mathbf{d}^{[w]}\mathbf{s}_{[w]} = \sum_{w\in\mathcal{A}} (\mathbf{d}\alpha)^{|w|}w^*\mathbf{s}_{[w]}, \quad \mathbf{d} \in \mathbb{B}. \tag{5}$$

L'Éq. (5) implique que pour $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ et F un opérateur causal

$$(S\mathbf{c})^\wedge(\mathbf{d}) = S^\wedge(\mathbf{d})\mathbf{c} \quad \text{et} \quad (SF)^\wedge(\mathbf{d}) = \big(S^\wedge(\mathbf{d})F\big)^\wedge(\mathbf{d}). \tag{6}$$

En effet, l'Éq. (3) nous permet d'écrire pour $w_1, w_2 \in \mathcal{A}$ et $\mathbf{d} \in \mathbb{B}$,

$$\begin{aligned}(w_1^*w_2^*)^\wedge(\mathbf{d}) &= \mathbf{d}^{[w_2w_1]} = (\mathbf{d}\alpha)^{|w_1|+|w_2|}w_1^*w_2^* = (\mathbf{d}\alpha)^{|w_2|}\mathbf{d}^{[w_1]}w_2^* = \sum_{|w|=|w_2|} (\mathbf{d}\alpha)^{|w_2|}w^*(\mathbf{d}^{[w_1]})^{(w_2)}_{[w]}\\ &= \sum_{|w|=|w_2|} \mathbf{d}^{[w]}(\mathbf{d}^{[w_1]})^{(w_2)}_{[w]} = \left(\sum_{|w|=|w_2|} w^*(\mathbf{d}^{[w_1]})^{(w_2)}_{[w]}\right)^\wedge(\mathbf{d}) = (\mathbf{d}^{[w_1]}w_2^*)^\wedge(\mathbf{d}),\end{aligned}$$

et (6) est obtenue par linéarité.

Notons que la fonction $K_{\mathbf{e}}{}^\wedge(\mathbf{d}) = \sum_{w\in\mathcal{A}} \mathbf{d}^{[w]}\mathbf{e}^{[w]*}$ est positive pour $\mathbf{d}, \mathbf{e} \in \mathbb{B}$.

Théorème 2.2. *Soit* $F \in \mathbf{H}_2$, $\mathbf{e} \in \mathcal{C}_2$ *et* $\mathbf{d} \in \mathbb{B}$. *Nous avons* : $\langle F, K_{\mathbf{d}}\mathbf{e}\rangle_2 = \langle F^{\wedge}(\mathbf{d}), \mathbf{e}\rangle_2$.

Cette égalité nous permet de considérer $\mathbf{H}_2$ comme un espace de fonctions $\mathbf{d} \mapsto F^{\wedge}(\mathbf{d})$ de noyau reproduisant $K_{\mathbf{e}}{}^{\wedge}(\mathbf{d})$. Il existe de même une évaluation à gauche. Définissons

$$\alpha^{\dagger} \stackrel{\text{déf.}}{=} (\alpha_1 \cdots \alpha_q) \quad \text{et} \quad \bar{\alpha}^{\dagger} \stackrel{\text{déf.}}{=} (\alpha^{\dagger})^*,$$

et, de manière analogue à (5)

$$S^{\triangle}(\mathbf{d}^*) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{w \in \mathcal{A}} w^* S_{[w]}(\alpha^{\dagger}\mathbf{d}^*)^{|w|}, \quad \mathbf{d} \in \mathbb{B}. \tag{7}$$

Nous avons pour $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ et F un opérateur causal

$$(\mathbf{c}S)^{\triangle}(\mathbf{d}^*) = \mathbf{c}\big(S^{\triangle}(\mathbf{d}^*)\big) \quad \text{et} \quad (SF)^{\triangle}(\mathbf{d}^*) = \big(S\big(F^{\triangle}(\mathbf{d}^*)\big)\big)^{\triangle}(\mathbf{d}^*), \tag{8}$$

et la formule de noyau reproduisant est maintenant :

$$\langle F, \mathbf{e}\widehat{K}_{\mathbf{d}}\rangle_2 = \langle F^{\triangle}(\mathbf{d}^*), \mathbf{e}\rangle_2, \quad \text{avec } \widehat{K}_{\mathbf{d}} = (I - \mathbf{d}\bar{\alpha}^{\dagger})^{-1}.$$

3. Relations de Gleason

Théorème 3.1. *Soit* $A_j : \mathbf{H}_2 \mapsto \mathbf{H}_2$ *l'opérateur défini par*

$$A_j F \stackrel{\text{déf.}}{=} \big(F - F^{\wedge}(0)\big)\alpha_j, \quad j = 1, \ldots, q. \tag{9}$$

On a :

$$A_j^* F = F\alpha_j^*, \quad A_i^* A_j = \delta_j^i (I - C^*C), \quad \sum_{j=1}^{q} A_j A_j^* = I, \tag{10}$$

avec $CF \stackrel{\text{déf.}}{=} F^{\wedge}(0)$.

Introduisons $A \stackrel{\text{déf.}}{=} (\, A_1 \cdots A_q \,)$. Les Éqs. (10) deviennent :

$$A^*A = (I - C^*C) \otimes I_q, \quad AA^* = I.$$

4. Multiplicateurs de Schur

Étant donné un opérateur causal borné $S : \ell_2(\mathcal{T}) \mapsto \ell_2(\mathcal{T})$, nous définissons : $M_S F : \mathbf{H}_2 \mapsto \mathbf{H}_2$, $M_S F \stackrel{\text{déf.}}{=} SF$. On a alors : $\|M_S\| = \|S\|$.

Définition 4.1. On appelle multiplicateur de Schur un élément un opérateur causal contractif. Soit π la projection orthogonale d'image le noyau de $I - M_S M_S^*$. L'espace $\mathcal{H}(S) \stackrel{\text{déf.}}{=} \operatorname{ran} \sqrt{I - M_S M_S^*}$ muni de la norme $\|\sqrt{I - M_S M_S^*}u\| = \|(I - \pi)u\|$ sera appelé espace de de Branges Rovnyak associé.

Notons la formule

$$M_S^*(K_{\mathbf{d}}\mathbf{e}) = S^{\wedge}(\mathbf{d})^* K_{\mathbf{d}}\mathbf{e}$$

à partir de laquelle nous obtenons :

Théorème 4.1. *L'opérateur S est un multiplicateur de Schur si et seulement si la fonction*

$$(K_{\mathbf{e}}^{S})^{\wedge}(\mathbf{d}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \big(\big(I - SS^{\wedge}(\mathbf{e})^{*}\big)(1-\bar{\alpha}\mathbf{e}^{*})^{-1}\big)^{\wedge}(\mathbf{d}) = \sum_{w\in\mathcal{A}} \mathbf{d}^{[w]}\mathbf{d}^{[w]*} - \sum_{\substack{w',w''\in\mathcal{A}\\ |w'|=|w''|}} \mathbf{d}^{[w']}\big(S^{\wedge}(\mathbf{d})S^{\wedge}(\mathbf{e})^{*}\big)_{[w']}^{(w'')}\mathbf{e}^{[w'']*}$$

est positive pour $\mathbf{d}, \mathbf{e} \in \mathbb{B}$.

Cette formule se vérifie de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\big(\big(I - SS^{\wedge}(\mathbf{e})^{*}\big)(1-\bar{\alpha}\mathbf{e}^{*})^{-1}\big)^{\wedge}(\mathbf{d}) &= \Big(\big(I - SS^{\wedge}(\mathbf{e})^{*}\big)\sum_{w\in\mathcal{A}} w^{*}\mathbf{e}^{[w]*}\Big)^{\wedge}(\mathbf{d})\\ &= \sum_{w\in\mathcal{A}} \mathbf{d}^{[w]}\mathbf{e}^{[w]*} - \sum_{w''\in\mathcal{A}} \big(SS^{\wedge}(\mathbf{e})^{*}w''^{*}\mathbf{e}^{[w'']*}\big)^{\wedge}(\mathbf{d})\\ &= \sum_{w\in\mathcal{A}} \mathbf{d}^{[w]}\mathbf{e}^{[w]*} - \sum_{w''\in\mathcal{A}} \big(S^{\wedge}(\mathbf{d})S^{\wedge}(\mathbf{e})^{*}w''^{*}\mathbf{e}^{[w'']*}\big)^{\wedge}(\mathbf{d})\\ &= \sum_{w\in\mathcal{A}} \mathbf{d}^{[w]}\mathbf{e}^{[w]*} - \sum_{\substack{w',w''\in\mathcal{A}\\ |w'|=|w''|}} \mathbf{d}^{[w']}\big(S^{\wedge}(\mathbf{d})S^{\wedge}(\mathbf{e})^{*}\big)_{[w']}^{(w'')}\mathbf{e}^{[w'']*}.\end{aligned}$$

L'évaluation ponctuelle nous permet d'étudier les problèmes d'interpolation considérés dans [3]. C'est avec une autre direction de recherche, le problème de la réalisation, que nous concluons cette Note.

5. Réalisation co-isométrique

Nous utilisons la méthode présentée dans [2] et [4] pour démontrer le résultat suivant :

Théorème 5.1. *Soit S un multiplicateur de Schur. La matrice d'opérateurs*

$$V = \begin{pmatrix} A & B\\ C\otimes I_q & D\otimes I_q\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}\mathcal{H}(S)^q\\ \mathcal{C}_2^q\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\mathcal{H}(S)\\ \mathcal{C}_2^q\end{pmatrix},$$

où A est défini par (9), $CF = F^{\wedge}(0)$ *et*

$$B = (B_1 \cdots B_q), \quad B_j\mathbf{d} = A_j(S\mathbf{d}), \quad D\mathbf{d} = C(S\mathbf{d}),$$

est co-isométrique.

Esquisse de la preuve. Nous remarquons que les opérateurs M_S^* et A_j commutent. Comme dans [4], on peut alors utiliser les égalités (10) pour définir une relation dans $((\mathcal{H}(S))\oplus\mathcal{C}_2^q)\times((\mathcal{H}(S)^q)\oplus\mathcal{C}_2^q)$ engendrée par les éléments de la forme

$$\left\{\begin{pmatrix} K_{\mathbf{e}}^{S}\mathbf{f}\\ \mathbf{g}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}(I - M_S M_S^*)A^*K_{\mathbf{e}}\mathbf{f} + K_0^S\mathbf{g}\\ CM_S^*(A^*K_{\mathbf{e}}\mathbf{f} + C^*\mathbf{g})\end{pmatrix}\right\}, \quad \mathbf{e}\in\mathbb{D},\ \mathbf{f}\in\mathcal{C}_2, \mathbf{g}\in\mathcal{C}_2^q.$$

Cette relation restreinte à son domaine est le graphe d'une isométrie, dont l'adjoint est V. Il en résulte en particulier que l'espace $\mathcal{H}(S)$ est A_j-invariant, et que :

$$S\mathbf{d} = D\mathbf{d} + \sum_{n=0}^{\infty}(CA_j^nB_j\mathbf{d})(\alpha_j^*)^{n+1}, \quad \mathbf{d}\in\mathcal{C}_2,\ j = 1,\ldots,q.$$

De plus, utilisant (9) avec $F \in \mathcal{H}(S)$ et $\mathbf{c} \in \mathbb{B}$ nous obtenons $(I - C)F = (A_j F)\alpha_j^*$, et donc

$$\big(F - (A_j F)\big(\alpha_j^{*\triangle}(\mathbf{c}^*)\big)\big)^{\triangle}(\mathbf{c}^*) = CF.$$

Soit $\widehat{M}_{\mathbf{c},j} F \overset{\text{déf.}}{=} F(\alpha_j^{*\triangle}(\mathbf{c}^*))$ et prenons F de la forme $F = (I - \widehat{M}_{\mathbf{c},j} A_j)^{-1} G$. On a alors

$$C(I - \widehat{M}_{\mathbf{c},j} A_j)^{-1} G = G^{\triangle}(\mathbf{c}^*).$$

En particulier, nous obtenons de $(S\mathbf{d})^{\triangle}(\mathbf{c}^*) = D\mathbf{d} + ((B_j\mathbf{d})\alpha_j^*)^{\triangle}(\mathbf{c}^*) = D\mathbf{d}(\widehat{M}_{\mathbf{c},j} B_j \mathbf{d})^{\triangle}(\mathbf{c}^*)$, la réalisation

$$(S\mathbf{d})^{\triangle}(\mathbf{c}^*) = D\mathbf{d} + C(I - \widehat{M}_{\mathbf{c},j} A_j)^{-1} \widehat{M}_{\mathbf{c},j} B_j \mathbf{d}.$$

Nous remarquons des différences importantes avec le cas de la boule de $\mathbb{C}^n$. Dans ce cas (voir [2]), les espaces de de Branges Rovnyak ne sont pas en général invariants sous l'action des opérateurs de déplacement à gauche, mais le problème de Gleason est résoluble, et il y a une seule formule de réalisation. Dans le cas présent, les espaces sont invariants sous l'action des opérateurs de déplacement à gauche, mais il y a q formules de réalisation.

Remerciements

La notion de multiplicateur de Schur dans le cadre non commutatif général (c'est-à-dire lorsque les variables se sont pas liées par des relations et lorsque les variables et les constantes commutent) a été étudiée dans [7]. La Note présente et les travaux précédents [1,6], suggèrent la définition et l'étude de structures où les générateurs et les constantes, sans commuter, n'obéissent pas moins à certaines relations.

Références

[1] D. Alpay, P. Dewilde, H. Dym, Lossless inverse scattering and reproducing kernels for upper triangular operators, in: I. Gohberg (Ed.), Extension and Interpolation of Linear Operators and Matrix Functions, in: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 47, Birkhäuser, Basel, 1990, pp. 61–135.

[2] D. Alpay, A. Dijksma, J. Rovnyak, Un théorème de type Beurling–Lax dans la boule unité, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (5) (2002) 349–354.

[3] D. Alpay, H.T. Kaptanoğlu, Some finite-dimensional backward shift-invariant subspaces in the ball and a related interpolation problem, Integral Equations Operator Theory 42 (2002) 1–21.

[4] D. Alpay, M. Shapiro, D. Volok, Espaces de de Branges Rovnyak : le cas hyper-analytique, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 437–442.

[5] D. Alpay, D. Volok, Point evaluation and Hardy space on a homogeneous tree, Integral Equations Operator Theory, in press. Available at http://arxiv.org/pdf/math.OA/0309262.

[6] D. Alpay, D. Volok, Interpolation et espace de Hardy sur l'arbre dyadique: le cas stationnaire, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 293–298.

[7] J. Ball, V. Vinnikov, Formal reproducing kernel Hilbert spaces: the commutative and noncommutative settings, in: D. Alpay (Ed.), Reproducing Kernel Spaces and Applications, in: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 143, Birkhäuser, Basel, 2003, pp. 77–134.

[8] A. Benveniste, R. Nikoukhah, A. Willsky, Multiscale system theory, Rapport de Recherche 1194, INRIA, Mars 1990.

[9] P. Dewilde, H. Dym, Interpolation for upper triangular operators, in: I. Gohberg (Ed.), Time-Variant Systems and Interpolation, in: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 56, Birkhäuser, Basel, 1992, pp. 153–260.