Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 37–42
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse fonctionnelle

Compacité des opérateurs de Dunford–Pettis positifs sur les treillis de Banach

Belmesnaoui Aqzzouz, Redouane Nouira, Larbi Zraoula

Université Ibn Tofail, faculté des sciences, département de mathématiques, équipe d'analyse fonctionnelle, B.P. 133, Kénitra, Maroc

Reçu le 3 novembre 2004 ; accepté le 5 novembre 2004

Disponible sur Internet le 21 décembre 2004

Présenté par Michel Talagrand

Résumé

Nous établissons différentes conditions nécessaires et suffisantes donnant la compacité des opérateurs de Dunford–Pettis positifs sur les treillis de Banach. ***Pour citer cet article : B. Aqzzouz et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Compactness of positive Dunford–Pettis operators on Banach lattices. We establish some sufficient and necessary conditions which give the compactness of positive Dunford–Pettis operators on Banach lattices. ***To cite this article: B. Aqzzouz et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abridged English version

In [3], Aliprantis and Burkinshaw studied the domination problem for positive Dunford–Pettis operators on Banach lattices. They asked whether a result similar to the Dodds and Fremlin theorem [5] is true for this class of operators. Kalton and Saab ([6], Theorem 4.4) answered positively this question and Wickstead ([8], Theorem 2) proved the converse of Kalton and Saab theorem. Also, Aliprantis and Burkinshaw proved in [3] that if E is a Banach lattice such that its norm and the norm of its topological dual E' are order continuous, then each positive Dunford–Pettis operator from E into E is compact ([3], Theorem 2.7). It is natural to study the converse of this last result.

In the first theorem of this Note, we prove that if E and F are Banach lattices such that E' is discrete and has an order continuous norm, then each positive Dunford–Pettis operator from E into F is compact. In the second

Adresse e-mail : baqzzouz@hotmail.com (B. Aqzzouz).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.11.015

theorem, we show that if the Banach lattice E is order σ-complete, then each positive Dunford–Pettis operator from E into E is compact if and only if the norms of E and of its dual E' are order continuous. In the third theorem, we establish that for each positive Dunford–Pettis operator T from E into E, the operator T^2 is compact if and only if the norm of E' is order continuous. We give some consequences and examples.

1. Introduction et principaux résultats

Dans [5], Dodds et Fremlin ont étudié le problème de domination des opérateurs compacts positifs sur les treillis de Banach. Puis, Aliprantis et Burkinshaw ont montré, dans [2], que si E est un treillis de Banach tel que la norme de E ou celle de son dual E' est continue pour l'ordre, et si $S, T : E \to E$ sont deux opérateurs tels que $0 \leqslant S \leqslant T$, avec T compact, alors l'opérateur S^2 est compact. Ils ont aussi traité des questions similaires pour les opérateurs de Dunford–Pettis positifs dans [3]. En particulier, Aliprantis et Burkinshaw ont montré que si E est un treillis de Banach admettant une norme continue pour l'ordre et si $S, T : E \to E$ sont deux opérateurs tels que $0 \leqslant S \leqslant T$, avec T de Dunford–Pettis, alors l'opérateur S^2 est de Dunford–Pettis (Théorème 3.3 de [3]). Par la suite, Kalton et Saab ([6], Théorème 4.4) ont établi, avec les mêmes hypothèses que dans [3], l'opérateur S est de Dunford–Pettis. La réciproque du résultat de Kalton et Saab a été établie par Wickstead dans [8].

Dans [3] un autre résultat généralisant le Théorème 4.5 de Dodds et Fremlin [5] est resté sans suite. En effet, Aliprantis et Burkinshaw ont établi que si E est un treillis de Banach tel que la norme de E et celle de son dual E' sont continues pour l'ordre, et si $S, T : E \to E$ sont deux opérateurs tels que $0 \leqslant S \leqslant T$, avec T de Dunford–Pettis, alors l'opérateur S est compact ([3], Théorème 2.7). En particulier, sous les mêmes hypothèses, si T est un opérateur de Dunford–Pettis positif, alors il est compact. Mais la réciproque de ce dernier résultat n'a pas été étudiée jusqu'a présent.

L'objectif de cette Note est de donner d'abord une condition suffisante, différente de celle du Théorème 2.7 de [3], pour qu'un opérateur de Dunford–Pettis positif soit compact. Ensuite, nous établisons une réciproque du Théorème 2.7 de [3]. Si le treillis de Banach est σ-complet pour l'ordre, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que tout opérateur de Dunford–Pettis positif soit compact. Nous établisons aussi que pour tout opérateur de Dunford–Pettis positif T, l'opérateur T^2 est compact si et seulement si, la norme de E' est continue pour l'ordre. Enfin, nous donnons quelques remarques et exemples.

Avant d'énoncer les principaux résultats de cette Note, nous rappelons ci-dessous quelques définitions. Un treillis de Banach est un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ avec E un treillis vectoriel et la norme de E vérifie : pour tout $x, y \in E$ tels que $|x| \leqslant |y|$, on a $\|x\| \leqslant \|y\|$. La norme $\|\cdot\|$ d'un treillis de Banach E est dite continue pour l'ordre si pour toute suite généralisée (x_α) telle que $x_\alpha \downarrow 0$ dans E, la suite (x_α) converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|$, où la notation $x_\alpha \downarrow 0$ signifie que la suite (x_α) est décroissante et $\inf(x_\alpha) = 0$. Notons que le dual E' de E, muni de la norme duale, est aussi un treillis de Banach. Pour plus d'informations sur les treillis de Banach, voir Schaefer [7].

Nous énonçons maintenant les principaux résultats de cette Note.

Théorème 1.1. *Soient E et F des treillis de Banach. Si E' est discret et de norme continue pour l'ordre, alors tout opérateur de Dunford–Pettis positif de E vers F est compact.*

Théorème 1.2. *Soit E un treillis de Banach σ-complet pour l'ordre. Alors les assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) *Tout opérateur de Dunford–Pettis positif de E dans lui même est compact.*
(2) *La norme de E et celle de E' sont continues pour l'ordre.*
(3) *Pour des opérateurs S et T de E dans E tels que $0 \leqslant S \leqslant T$ et T de Dunford–Pettis, alors l'opérateur S est compact.*

Théorème 1.3. *Soit E un treillis de Banach, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Pour tout opérateur de Dunford–Pettis positif T de E dans E, l'opérateur T^2 est compact.*
(2) *La norme de E' est continue pour l'ordre.*
(3) *Pour des opérateurs S et T de E dans E tels que $0 \leqslant S \leqslant T$ et T de Dunford–Pettis, alors l'opérateur S^2 est compact.*

2. Méthode de démonstration

Un opérateur $T : E \to F$ entre des treillis de Banach est une application linéaire continue ; il est dit positif si, pour $x \geqslant 0$, $T(x) \geqslant 0$. Notons que toute application linéaire positive définie sur un treillis de Banach est nécessairement continue.

Un opérateur $T : E \to F$ entre des treillis de Banach est dit de Dunford–Pettis si l'image de toute partie faiblement compacte de E est une partie compacte dans F. Il est clair que tout opérateur compact est de Dunford–Pettis, cependant l'opérateur identité $\mathrm{Id}_{l^1} : l^1 \to l^1$ est de Dunford–Pettis mais n'est pas compact. Enfin, si le treillis de Banach E est réflexif, alors la classe des opérateurs de Dunford–Pettis coïncide avec celle des opérateurs compacts.

Pour établir les Théorèmes 1.1 et 1.3, nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Soient E, F des treillis de Banach et S, T deux opérateurs de E dans F tels que $0 \leqslant S \leqslant T$ avec T de Dunford–Pettis. Si la norme du dual E' de E est continue pour l'ordre, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $y \in E^+$ tel que $S(B_E \cap E^+) \subset \varepsilon B_F + S([0, y])$, où B_H est la boule unité de $H = E, F$ et $E^+ = \{x \in E\colon\ 0 \leqslant x\}$.*

Démonstration. La démonstration résulte du Théorème 2.7 et du Théorème 2.8 de [3]. □

Rappelons qu'un élément non nul d'un treillis vectoriel E est dit discret si l'idéal d'ordre engendré par u coïncide avec le sous-treillis vectoriel engendré par u. Le treillis vectoriel E est dit discret, s'il admet un système disjoint complet d'éléments discrets.

Démonstration du Théorème 1.1. Soit $T : E \to F$ un opérateur de Dunford–Pettis positif, il résulte du Lemme 2.1 que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $y \in E^+$ tel que

$$T(B_E \cap E^+) \subset \varepsilon B_F + T\big([0, y]\big). \tag{1}$$

Or $T([0, y])$ est relativement compact pour la topologie faible $\sigma(F, F')$ (Théorème 1.2 de [3]), il s'ensuit que $S = T_{|E_y} : E_y \to F$ est faiblement compact, où E_y est l'idéal engendré par y muni de la norme $\|x\|_\infty = \inf\{\lambda > 0\colon\ |x| \leqslant \lambda y\}$.

Si on désigne par A l'enveloppe solide de $S'(B_{F'})$, où $B_{F'}$ est la boule unité de F', il résulte du Théorème 21.10 de [1] que toute suite disjointe de A est convergente pour la norme de E'_y.

D'autre part, le treillis de Banach E' est discret, A est alors contenu dans la bande engendrée par ses éléments discrets (Théorème 5.6 de [1]). Par conséquent, A est relativement compact pour la norme de E'_y (Théorème 21.15(ii) de [1]) et donc $S'(B_{F'})$ l'est aussi. Ce qui montre que l'opérateur $S : E_y \to F$ est compact ; alors $T([0, y])$ est relativement compact dans F. Le résultat se déduit donc de l'inclusion (1). □

Remarque 1. Il existe un treillis de Banach E dont la norme n'est pas continue pour l'ordre et dont le dual E' n'est pas discret alors que tout opérateur de Dunford–Pettis positif de E dans E est compact, comme le montrent les exemples suivants :

Exemple 1. Considérons le treillis de Banach $E = c \oplus L^2$ et soit $S = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{smallmatrix}\right)$ un opérateur de Dunford–Pettis positif de E dans E, où c est le treillis de Banach de toutes les suites convergentes.

Comme la norme de L^2 est continue pour l'ordre, il résulte du Théorème 2.8 de [3], que les opérateurs de Dunford–Pettis positifs $a_2 : L^2 \to c$ et $a_4 : L^2 \to L^2$ sont compacts.

D'autre part, comme le dual c' de c, est discret et de norme continue pour l'ordre, alors il découle du Théorème 1.1 que les opérateurs $a_1 : c \to c$ et $a_3 : c \to L^2$ sont compacts. Donc l'opérateur de Dunford–Pettis positif $S : E \to E$ est compact. Cependant la norme de E n'est pas continue pour l'ordre et E' n'est pas discret.

Exemple 2. Plus généralement, soit E_1 un treillis de Banach de norme non continue pour l'ordre dont le dual $(E_1)'$ est discret et de norme continue pour l'ordre (par exemple $E_1 = c$). Soit E_2 un treillis de Banach de norme continue pour l'ordre dont le dual $(E_2)'$ n'est pas discret mais de norme continue pour l'ordre. Considérons le treillis de Banach $E = E_1 \oplus E_2$, alors la norme de E n'est pas continue pour l'ordre et E' n'est pas discret, mais tout opérateur de Dunford–Pettis positif de E vers lui même est compact.

Maintenant, nous donnons une condition suffisante, pour que la norme du dual d'un treillis de Banach soit continue pour l'ordre.

Proposition 2.2. *Soit E un treillis de Banach. Si tout opérateur de Dunford–Pettis positif de E vers E est compact, alors la norme du dual E' de E est continue pour l'ordre.*

Démonstration. Sinon, il résulte de la preuve du Théorème 1 de [8], qu'ils existent un sous-treillis vectoriel H de E isomorphe à l^1 et une projection positive P de E sur H qui est un opérateur de Dunford–Pettis positif, mais n'est pas compact. □

On dit que les opérations de treillis d'un treillis de Banach E sont séquentiellement faiblement continues si la suite $(|x_n|)$ converge vers 0 pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ lorsque (x_n) est une suite qui converge vers 0 pour $\sigma(E, E')$.

Maintenant, nous établissons un résultat donnant une réciproque du Théorème 1.1 ci-dessus.

Théorème 2.3. *Soit E un treillis de Banach dans lequel les opérations de treillis sont séquentiellement faiblement continues. Alors les assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) *Tout opérateur de Dunford–Pettis positif T de E dans E est compact.*
(2) *L'une des conditions suivantes est vérifiée* :
  (i) *Le treillis de Banach E' est discret et de norme continue pour l'ordre.*
  (ii) *La norme de E et celle de E' sont continues pour l'ordre.*

Démonstration. Pour l'implication (ii) ⇒ (1) c'est le Théorème 2.7 d'Aliprantis et Burkinshaw [3]. Pour (i) ⇒ (1) c'est le Théorème 1.1 ci-dessus.

Enfin, pour l'implication (1) ⇒ (2), soient S et T des opérateurs de E dans E tels que $0 \leqslant S \leqslant T$ et T compact. Comme T est de Dunford–Pettis, il découle du Théorème 2 de Wickstead [8] que l'opérateur S est de Dunford–Pettis. Donc, il est compact et le résultat découle du Théorème 1 de Wickstead [8] et de la Proposition 2.2. □

Le résultat suivant donne la réciproque du Théorème 2.7 d'Aliprantis et Burkinshaw [3].

Théorème 2.4. *Soit E un treillis de Banach. Alors les assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) *Pour des opérateurs S et T de E vers E vérifiant $0 \leqslant S \leqslant T$ et tel que T soit de Dunford–Pettis, l'opérateur S est compact.*
(2) *L'une des conditions suivantes est vérifiée* :

(i) *Le treillis de Banach E' est discret et de norme continue pour l'ordre.*
(ii) *La norme de E et celle de E' sont continues pour l'ordre.*

Démonstration. (2) $\Rightarrow$ (1). Soient S et T des opérateurs de E vers E tels que $0 \leqslant S \leqslant T$ et T de Dunford–Pettis. D'après le Théorème 1.1 de cette Note ou le Théorème 2.7 d'Aliprantis et Burkinshaw [3], l'opérateur T est compact. Le résultat découle alors du théorème de Dodds et Fremlin [5].

(1) $\Rightarrow$ (2). Si la condition 1 est vraie, alors elle l'est en particulier lorsque T est compact. Comme dans le Théorème 2.3, le résultat découle du Théorème 1 de Wickstead [8] et de la Proposition 2.2. □

La démonstration du Théorème 1.2 utilise le lemme suivant :

Lemme 2.5. *Soit E un treillis de Banach dont la norme n'est pas continue pour l'ordre. Alors il existe un opérateur de Dunford–Pettis positif S de l^∞ vers E qui n'est pas compact.*

Démonstration. Le lemme résulte du Corollaire 3.5 de [4], du Théorème 1 de [8], de la Proposition 7.6 de [7] ainsi que du Théorème 2 de [8]. □

Rappelons qu'un treillis vectoriel E est dit σ-complet pour l'ordre si toute partie dénombrable non vide et majorée de E admet une borne supérieure.

Démonstration du Théorème 1.2. Pour (1) $\Rightarrow$ (2), la continuité en ordre de la norme de E' a été établie dans la Proposition 2.2.

D'autre part, la norme de E est continue pour l'ordre. Sinon, comme le treillis vectoriel E est σ-complet pour l'ordre, E contient un sous-treillis vectoriel fermé isomorphe à l^∞. Le résultat découle alors du Lemme 2.5.

L'implication (2) $\Rightarrow$ (3) est l'objet du Théorème 2.7 de [3].

Enfin, l'implication (3) $\Rightarrow$ (1) est évidente. □

Remarque 2. Dans le Théorème 1.2, l'hypothèse de σ-complétion pour l'ordre sur le treillis de Banach E est nécessaire pour que sa norme soit continue pour l'ordre, comme le montre l'Exemple 2.

Avant de démontrer le Théorème 1.3, notons que l'opérateur identité $T = \mathrm{Id}_{l^1} : l^1 \to l^1$ est de Dunford–Pettis et positif mais que T^2 n'est évidemment pas compact.

Démonstration du Théorème 1.3. Pour (1) $\Rightarrow$ (2), si la norme de E' n'est pas continue pour l'ordre, alors il existe une projection positive $P : E \to l^1$ qui est de Dunford–Pettis mais $P^2 = P$ n'est pas compact. D'où la contradiction.

Pour (2) $\Rightarrow$ (3), soient S et T des opérateurs de E vers E tels que $0 \leqslant S \leqslant T$ et T de Dunford–Pettis. Comme la norme de E' est continue pour l'ordre, il résulte alors du Lemme 2.1 que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $y \in E^+$ tel que

$$S(B_E \cap E^+) \subset \varepsilon B_E + S\big([0, y]\big),$$

où B_E est la boule unité ouverte de E.

Comme $S([0, y])$ est relativement compact pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ (Théorème 1.2 de [3]), il résulte que $S^2([0, y])$ est relativement compact pour la norme de E. La compacité de l'opérateur S^2 résulte de l'inclusion :

$$S^2(B_E \cap E^+) \subset S(\varepsilon B_E) + S^2\big([0, y]\big).$$

Enfin, l'implication (3) $\Rightarrow$ (1) est évidente. Ainsi, le Théorème 1.3 est établi. □

Comme conséquence du Théorème 1.3, nous obtenons le résultat suivant d'Aliprantis et Burkinshaw ([2], Théorème 2.2).

Corollaire 2.6. *Soit E un treillis de Banach. Si la norme de E' est continue pour l'ordre, alors pour des opérateurs S et T de E vers E tels que $0 \leqslant S \leqslant T$ et T compact, l'opérateur S^2 est compact.*

Références

[1] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, Locally Solid Riesz Spaces, Academic Press, 1978.
[2] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, Positive compact operators on Banach lattices, Math. Z. 174 (1980) 289–298.
[3] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, Dunford–Pettis operators on Banach lattices, Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1) (1982) 227–238.
[4] B. Aqzzouz, R. Nouira, Sur les opérateurs précompacts positifs, C. R. Acad. Sc. Paris, Ser. I 337 (8) (2003) 527–530.
[5] P.G. Dodds, D.H. Fremlin, Compact operators on Banach lattices, Israel J. Math. 34 (1979) 287–320.
[6] N.J. Kalton, P. Saab, Ideal properties of regular operators between Banach lattices, Illinois J. Math. 29 (3) (1985) 382–400.
[7] H.H. Schaefer, Banach Lattices and Positive Operators, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
[8] A.W. Wickstead, Converses for the Dodds–Fremlin and Kalton–Saab theorems, Math. Proc. Cambridge Philos Soc. 120 (1996) 175–179.