



Available online at www.sciencedirect.com



C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 81–86



<http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/>

Problèmes mathématiques de la mécanique

Films courbés minces ferromagnétiques

Hamdi Zorgati^{a,b}

^a *Laboratoire Jacques-Louis Lions, université Pierre et Marie Curie, boîte courrier 187, 75252 Paris cedex 05, France*

^b *CEREMADE, CNRS UMR 7534, université Paris-Dauphine, place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France*

Reçu le 21 octobre 2004 ; accepté le 27 octobre 2004

Disponible sur Internet le 1^{er} décembre 2004

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

On considère un film courbé mince ferromagnétique non soumis à un champ magnétique externe. Le comportement du film est décrit par une énergie dépendant de la magnétisation du film vérifiant la contrainte de saturation. Cette énergie se compose d'une partie d'énergie magnétostatique induite et d'un terme d'énergie ayant comme densité une fonction, comprenant l'énergie d'échange et l'énergie anisotrope. Nous étudions le comportement de cette énergie quand l'épaisseur du film courbé tend vers zéro. Nous prouvons avec des arguments de Γ -convergence que les minimiseurs de l'énergie totale convergent vers les minimiseurs d'une énergie locale dépendant d'une magnétisation bidimensionnelle. *Pour citer cet article : H. Zorgati, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Curved ferromagnetic thin films. We consider a thin curved ferromagnetic film not submitted to an external magnetic field. The behavior of the film is described by an energy depending on the magnetization of the film verifying the saturation constraint. The energy is composed of an induced magnetostatic energy and an energy term with density including the exchange energy and the anisotropic energy. We study the behavior of this energy when the thickness of the curved film goes to zero. We show with Γ -convergence arguments that the minimizers of the free energy converge to the minimizers of a local energy depending on a two-dimensional magnetization. *To cite this article: H. Zorgati, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Adresse e-mail : zorgati@ann.jussieu.fr (H. Zorgati).

Abridged English version

We consider a thin curved ferromagnetic film (see [1–3,8–10]) occupying an open domain $\tilde{\Omega}_h$ of the form

$$\tilde{\Omega}_h = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, \exists \tilde{x} \in \tilde{S}, x = \tilde{x} + \eta a_3(\psi^{-1}(\tilde{x})) \text{ with } \frac{-h}{2} < \eta < \frac{h}{2} \right\}, \quad (1)$$

where \tilde{S} is the curved midsurface of the film, $a_3(\psi^{-1}(\tilde{x}))$ is the unit vector normal to \tilde{S} at point \tilde{x} , and h is the thickness of the film.

The behavior of the thin film in the absence of an external magnetic field is described by an energy \tilde{e}^h depending on its magnetization \tilde{m}_h . The energy is composed of the induced magnetostatic energy and an energy term with density W including the exchange energy and the anisotropic energy

$$\tilde{e}_h(\tilde{m}_h) = \frac{1}{h} \int_{\tilde{\Omega}_h} \left[W(\tilde{m}_h, \nabla \tilde{m}_h) + \frac{1}{2} \nabla \tilde{u}_h \cdot \tilde{m}_h \right] d\tilde{x}, \quad (2)$$

under the saturation constraint

$$|\tilde{m}_h| = 1 \quad \text{in } \tilde{\Omega}_h, \quad (3)$$

where W is a continuous function verifying some coercivity and growth assumptions and $\tilde{u}_h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is a scalar potential for the induced magnetic field $H_h = -\nabla \tilde{u}_h$ verifying the magnetostatic equation:

$$\operatorname{div}(-\nabla \tilde{u}_h + \tilde{m}_h) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3. \quad (4)$$

In order to study the behavior of the thin film when its thickness h goes to zero, we begin by rescaling the energy in order to work on a domain independent of the thickness h . Then, we study the behavior of the induced magnetostatic energy. Next, we use Γ -convergence arguments (see [5–7,11,12]) to study the behavior of almost minimizers of the free energy when the thickness of the film goes to zero. We prove that diagonal minimizing sequences are bounded in V (see (23)) and that their limit points belong to V_M (see (24)) and minimize the local limit energy depending on the two-dimensional magnetization m

$$e(0)(m) = \int_{\omega} \left\{ Q_T^{2,3} W_0(x, m(x), (m_{,1}|m_{,2})) + |(a_3(x), m)|^2 \right\} d_0 dx, \quad (5)$$

where $Q_T^{2,3}$ denotes the tangential quasiconvex envelope (see Definition 2.2).

1. Préliminaires

On considère un film ferromagnétique courbé mince d'épaisseur h (voir [1–3,8–10]), occupant un domaine $\tilde{\Omega}_h$ de la forme

$$\tilde{\Omega}_h = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, \exists \tilde{x} \in \tilde{S}, x = \tilde{x} + \eta a_3(\psi^{-1}(\tilde{x})) \text{ avec } \frac{-h}{2} < \eta < \frac{h}{2} \right\}, \quad (6)$$

où \tilde{S} est la surface moyenne de $\tilde{\Omega}_h$, qui est une sous-variété bidimensionnelle de classe C^1 de \mathbb{R}^3 admettant un atlas comportant une seule carte ψ . Cette carte est un C^1 -difféomorphisme. Elle envoie un ouvert borné ω inclus dans \mathbb{R}^2 de frontière lipschitzienne dans \tilde{S} , $a_3(\psi^{-1}(\tilde{x}))$ est le vecteur normal à \tilde{S} au point \tilde{x} . Le vecteur a_3 est le troisième vecteur de la base covariante du plan tangent associé à la carte ψ . On suppose aussi que la surface moyenne de $\tilde{\Omega}_h$ est l'image d'un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^2$ par un C^1 -difféomorphisme $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui prolonge ψ à \mathbb{R}^2 . Plus généralement, on suppose que Ψ est la restriction à $\mathbb{R}^2 \times (-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$ d'un C^1 -difféomorphisme $\tilde{\Psi}$ (qu'on notera dans la suite Ψ par abus de notation) de \mathbb{R}^3 qu'on suppose égal à l'identité en dehors d'un compact contenant Ω_h .

Le comportement du film courbé est décrit par une énergie micromagnétique \tilde{e}_h dépendant de la magnétisation $\tilde{m}_h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nulle en dehors de $\tilde{\Omega}_h$, qui représente la densité par unité de masse du moment magnétique. Cette énergie par unité de volume est de la forme

$$\tilde{e}_h(\tilde{m}_h) = \frac{1}{h} \int_{\tilde{\Omega}_h} \left[W(\tilde{m}_h, \nabla \tilde{m}_h) + \frac{1}{2} \nabla \tilde{u}_h \cdot \tilde{m}_h \right] d\tilde{x}, \tag{7}$$

sous la contrainte de saturation

$$|\tilde{m}_h| = 1 \quad \text{sur tout } \tilde{\Omega}_h, \tag{8}$$

où W est une fonction continue vérifiant les hypothèses de croissance, de coercivité et de caractère lipschitzien suivantes

$$\begin{cases} \exists c > 0, \exists p \in]1, +\infty[, \forall x \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \forall F \in M^3, & |W(x, F)| \leq c(1 + |F|^p), \\ \exists \gamma > 0, \exists \beta \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \forall F \in M^3, & W(x, F) \geq \gamma |F|^p - \beta, \\ \forall x \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \forall F, F' \in M^3, & |W(x, F) - W(x, F')| \leq c(1 + |F|^{p-1} + |F'|^{p-1})|F - F'|, \end{cases} \tag{9}$$

et $\tilde{u}_h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est un potentiel scalaire pour le champ magnétique induit $H_h = -\nabla \tilde{u}_h$, lequel vérifie l'équation magnétostatique

$$\operatorname{div}(-\nabla \tilde{u}_h + \tilde{m}_h) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^3. \tag{10}$$

Nous étudions, en utilisant des arguments de Γ -convergence (voir [5–7,11,12]), le comportement de l'énergie \tilde{e}_h et de ses éventuels minimiseurs lorsque l'épaisseur du film courbé tend vers zéro.

Nous commençons notre étude par un changement d'échelle qui nous permet de travailler sur un domaine indépendant de l'épaisseur h . On pose, pour $x \in \Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \in \omega \text{ et } -\frac{1}{2} < x_3 < \frac{1}{2}\}$, $m(h)(x) = \tilde{m}_h(\Psi(x_1, x_2, hx_3))$, avec $m(h) = 0$ en dehors de Ω_1 et pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $u(h)(x) = \tilde{u}_h(\Psi(x_1, x_2, hx_3))$. On pose aussi $e(h)(m(h)) = \tilde{e}_h(\tilde{m}_h)$, ce qui s'exprime par

$$\begin{aligned} e(h)(m(h)) &= \int_{\Omega_1} \left[W\left(m(h), \left(m(h)_{,1} |m(h)_{,2}| \frac{1}{h} m(h)_{,3}\right) A_h\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(A_h^T \left(u(h)_{,1}, u(h)_{,2}, \frac{1}{h} u(h)_{,3} \right), m(h) \right) \right] d_h dx, \end{aligned} \tag{11}$$

où l'on a posé $A_h(x) = \nabla \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3)$ et $d_h(x) = \det \nabla \Psi(x_1, x_2, hx_3)$. La contrainte de saturation s'écrit $|m(h)(x)| = 1$ pour tout $x \in \Omega_1$, et l'équation magnétostatique devient

$$\left(\nabla \left(-A_h^T(x) I_h \nabla u(h)(x) + m(h)(x) \right) \right) : \left(A_h^T(x) I_h \right) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^3, \tag{12}$$

avec $I_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{pmatrix}$ et où $A : B$ désigne le produit scalaire matriciel défini par $A : B = \operatorname{tr}(AB^T)$.

On passe en suite à l'étude du comportement de l'énergie magnétostatique, suivie du calcul de la Γ -limite de l'énergie totale qui nous donnera le comportement des minimiseurs et on conclut par une application au modèle courbé de Gioia et James (voir [9]).

2. Résultats principaux

2.1. Comportement de l'énergie magnétostatique

On se propose d'analyser le comportement asymptotique du terme d'énergie magnétostatique

$$E_{\text{mag}}(h)(m) = \int_{\Omega_1} \frac{1}{2} \left(A_h^T \left(u_{,1}, u_{,2}, \frac{1}{h} u_{,3} \right), m \right) d_h dx \quad (13)$$

lorsque l'épaisseur du film courbé tend vers zéro. Pour cela, étant donné $m : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mesurable avec $m|_{\Omega_1} \in L^2(\Omega_1; S^2)$ et $m = 0$ sur Ω_1^c , on considère le problème de minimisation : trouver $u(h, m) \in U$ tel que

$$I_m(h)(u(h, m)) = \inf_{v \in U} I_m(h)(v), \quad (14)$$

avec

$$I_m(h)(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left| A_h^T \left(v_{,1}, v_{,2}, \frac{1}{h} v_{,3} \right) - m \right|^2 d_h dx \quad (15)$$

et

$$U = \left\{ v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3), \nabla v \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), \int_B v dx = 0 \right\}, \quad (16)$$

où B est la boule unité de \mathbb{R}^3 . On munit U du produit scalaire

$$(u, v)_{U,h} = \int_{\mathbb{R}^3} \left(A_h^T \left(u_{,1}, u_{,2}, \frac{1}{h} u_{,3} \right), A_h^T \left(v_{,1}, v_{,2}, \frac{1}{h} v_{,3} \right) \right) d_h dx, \quad (17)$$

où (x, y) désigne le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^3 . On démontre que U muni du produit scalaire $(u, v)_{U,h}$ est un espace de Hilbert, ce qui nous permet d'obtenir l'existence d'une solution unique pour le problème de minimisation (14) qui vérifie l'équation d'Euler-Lagrange

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(A_h^T \left(u(h, m)_{,1}, u(h, m)_{,2}, \frac{1}{h} u(h, m)_{,3} \right) - m, A_h^T \left(v_{,1}, v_{,2}, \frac{1}{h} v_{,3} \right) \right) d_h dx = 0, \quad \forall v \in U. \quad (18)$$

Cette équation est la forme faible de (12). En utilisant cette équation, on démontre la proposition suivante qui nous donne le comportement du terme d'énergie magnétostatique $E_{\text{mag}}(h)$.

Proposition 2.1. Soit $\bar{m}(h)$ une suite de fonctions $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ telles que $\bar{m}(h) = 0$ sur Ω_1^c et $|\bar{m}(h)| = 1$ sur Ω_1 , vérifiant $\bar{m}(h) \rightarrow \bar{m}(0)$ fortement dans $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, et soit $\bar{u}(h, \bar{m}(h))$ la solution du problème de minimisation (14) associée à $\bar{m}(h)$. On a alors

$$\nabla \bar{u}(h, \bar{m}(h)) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad \frac{1}{h} \bar{u}(h, \bar{m}(h))_{,3} \rightarrow w \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^3), \quad (19)$$

où $w \in L^2(\mathbb{R}^3)$ vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^3} |w \bar{a}^3|^2 d_0 dx = \int_{\Omega_1} |(a_3, \bar{m}(0))|^2 d_0 dx, \quad (20)$$

où \tilde{a}^3 représente le troisième vecteur colonne de la matrice $A_0^T(x) = (\nabla\Psi^{-1}(\Psi(x_1, x_2, 0)))^T$, lequel est égal à a_3 sur Ω_1 . De plus,

$$E_{\text{mag}}(h)(\bar{m}(h)) \rightarrow E_{\text{mag}}(0)(\bar{m}(0)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} |(a_3, \bar{m}(0))|^2 dx. \tag{21}$$

Ceci nous permet de passer à l'étude des minimiseurs de l'énergie $e(h)$.

2.2. Calcul de la Γ -limite

Afin d'étudier le problème de minimisation de l'énergie $e(h)$ et puisque l'absence d'hypothèse de quasiconvexité tangentielle de W ne permet pas d'assurer l'existence de solutions de ce problème, on considère une suite minimisante diagonale $m(h)$ de l'énergie $e(h)$ dont on est assuré de l'existence, c'est-à-dire une suite telle que

$$m(h) \in V \quad \text{et} \quad e(h)(m(h)) = \inf_{m \in V} e(h)(m) + h\varepsilon(h), \tag{22}$$

avec $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ et

$$V = \{m \in L^p(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), \text{ vérifiant } m|_{\Omega_1} \in W^{1,p}(\Omega_1; \mathbb{R}^3), |m| = 1, \text{ p.p. sur } \Omega_1 \text{ et } m = 0, \text{ p.p. sur } \Omega_1^c\}. \tag{23}$$

On montre ensuite que toute suite de V à énergie bornée est uniformément bornée dans V et que ses valeurs d'adhérence pour la topologie faible de $W^{1,p}(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ appartiennent à

$$V_M = \{m \in V \text{ et } m_{,3} = 0 \text{ sur } \Omega_1\}. \tag{24}$$

On pose ensuite

$$W_0(x, y, \bar{F}) := \inf_{z \in y^\perp} W(y, (\bar{F}|_z)A_0(x)). \tag{25}$$

On démontre que cette fonction de Carathéodory possède des propriétés analogues à celles de W à savoir qu'elle est continue et vérifie les propriétés de croissance et de coercivité suivantes

$$\begin{cases} \exists c > 0, \forall \bar{F} \in M^{3,2}, \forall y \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \bar{\omega}, & |W_0(x, y, \bar{F})| \leq c(1 + |\bar{F}|^p), \\ \exists \gamma > 0, \exists \beta \geq 0, \forall \bar{F} \in M^{3,2}, \forall y \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \bar{\omega}, & W_0(x, y, \bar{F}) \geq \gamma|\bar{F}|^p - \beta. \end{cases} \tag{26}$$

On prolonge ensuite l'énergie $e(h)$ à l'espace $L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ en posant

$$\forall m \in L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \quad e^*(h)(m) = \begin{cases} e(h)(m) & \text{si } m \in V, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{27}$$

On rappelle la définition de l'enveloppe quasiconvexe tangentielle introduite par Dacorogna, Fonseca, Maly et Trivisa dans [4] et reprise par Alicandro et Leone dans [1] pour les fonctionnelles dépendant de la déformation. Soit $f : \mathbb{R}^d \times M^{d \times N} \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction Borel mesurable et M une C^1 sous-variété de dimension q de \mathbb{R}^d . On note par $T_y(M)$ l'espace tangent à M en y pour $y \in M$.

Définition 2.2. Soit $y \in M$ et $\xi \in T_y(M)^N$. La quasiconvexification tangentielle de f en ξ relativement à y est définie par

$$Q_T^{N,d} f(y, \xi) := \inf \left\{ \int_Q f(y, \xi + \nabla\varphi(x)) dx : \varphi \in W_0^{1,\infty}(Q; T_y(M)) \right\}, \tag{28}$$

avec Q un cube de \mathbb{R}^N .

Dans notre cas, M est la sphère unité S^2 de \mathbb{R}^3 et $T_y(S^2) = y^\perp$ le plan orthogonal à y . Ceci nous permet d'obtenir le résultat suivant

Théorème 2.3. *La suite d'énergies $e^*(h)$ est Γ -convergente pour la topologie forte de $L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$. Sa Γ -limite a pour expression*

$$e^*(0)(m) = \begin{cases} \int_{\omega} Q_T^{2,3} W_0(x, m(x), (m, \cdot | m, \cdot)) + |(a_3(x), m)|^2 d_0 dx & \text{si } m \in V_M, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (29)$$

Dans le cas du modèle de G. Gioia et R.D. James [9], pour lequel W est de la forme $W(y, F) = \varphi(y) + \alpha|F|^2$, dans un film mince courbé, l'énergie limite s'écrit

$$\tilde{e}(0)(\tilde{m}) = \int_{\tilde{\Omega}} \{ \varphi(\tilde{m}) + \alpha |(\nabla \tilde{m})|^2 + |(a_3(\psi^{-1}(\tilde{x})), \tilde{m}(\tilde{x}))|^2 \} d\tilde{x}. \quad (30)$$

Références

- [1] R. Alicandro, C. Leone, 3D-2D Asymptotic analysis for micromagnetic thin films, ESAIM: COCV 6 (2001) 489–498.
- [2] W.F. Brown, Micromagnetics, Wiley, New York, 1963.
- [3] B. Dacorogna, I. Fonseca, Minima absolus pour des énergies ferromagnétiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 331 (2000) 497–500.
- [4] B. Dacorogna, I. Fonseca, J. Malý, K. Trivisa, Manifold constrained variational problems, Calc. Var. 9 (1999) 185–206.
- [5] G. Dal Maso, An Introduction to Γ -Convergence, Progr. in Nonlinear Differential Equations Appl., Birkhäuser, 1993.
- [6] E. De Giorgi, Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area, Rend. Mat. (IV) (8) (1975) 277–294.
- [7] E. De Giorgi, T. Franzoni, Su un tipo di convergenza variazionale, Atti. Accad. Naz. Lincei 58 (1975) 842–850.
- [8] A. De Simone, Energy minimizers for large ferromagnetic bodies, Arch. Rational Mech. Anal. 125 (1993) 99–143.
- [9] G. Gioia, R.D. James, Micromagnetics of very thin films, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 453 (1997) 213–223.
- [10] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies, Phys. Z. Sowjetunion 8 (1935) 153–169.
- [11] H. Le Dret, A. Raoult, The nonlinear membrane model as variational limit of nonlinear three-dimensional elasticity, J. Math. Pures Appl. 74 (6) (1995) 549–578.
- [12] H. Le Dret, A. Raoult, The membrane shell model in nonlinear elasticity: a variational asymptotic derivation, J. Nonlinear Sci. 6 (1) (1996) 59–84.