



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 465–470



<http://france.elsevier.com/direct/CRASSI/>

Analyse numérique/Équations aux dérivées partielles  
**Convergence des méthodes particulières renormalisées  
pour les systèmes de Friedrichs**

Nathalie Lanson <sup>a</sup>, Jean-Paul Vila <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Faculty of Mathematics, University of Waterloo, 200, University Avenue W., Ontario Canada, N2L 3G1

<sup>b</sup> INSA de Toulouse, 135, avenue de Rangueil, 31077 Toulouse cedex 4, France

Reçu le 25 septembre 2003 ; accepté après révision le 20 octobre 2004

Présenté par Olivier Pironneau

---

## Résumé

Nous présentons une étude des schémas particuliers renormalisés. La renormalisation est une technique introduite afin de corriger le défaut de consistance caractéristique des méthodes particulières de type SPH. Un schéma conservatif, le schéma faible renormalisé, est construit à partir de la formulation faible des lois de conservation générales. Nous appliquons ce schéma aux systèmes de Friedrichs. Le schéma faible renormalisé étant instable, nous procédons à l'introduction d'une viscosité numérique avant d'appliquer une discrétisation en temps de type Euler explicite, et ainsi obtenir le schéma numérique dont nous démontrons la convergence en norme  $L^2$ . *Pour citer cet article : N. Lanson, J.-P. Vila, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).* © 2005 Publié par Elsevier SAS pour l'Académie des sciences.

## Abstract

**Convergence of renormalized particle methods for Friedrichs systems.** We present a study of the renormalized particle scheme. Renormalization is a tool introduced in order to alleviate the SPH particle methods' lack of consistency. A conservative scheme, the weak renormalized scheme, is derived from the general conservation laws weak formulation. We apply this scheme to Friedrichs systems. The weak renormalized scheme being unstable, we introduce a numerical viscosity before applying an explicit Euler time discretization, and thus construct the numerical scheme whose convergence in  $L^2$  norm is studied. *To cite this article : N. Lanson, J.-P. Vila, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

© 2005 Publié par Elsevier SAS pour l'Académie des sciences.

---

## Abridged English version

*Introduction.* Mesh-free methods have recently been developed for the approximation of conservation laws in various fields of applications. We focus on weighted particle methods of the SPH kind, whose consistency is increased by the use of *renormalization* [7]. In [7], this tool, although very effective seems to make the global

---

Adresses e-mail : [nlanson@math.uwaterloo.ca](mailto:nlanson@math.uwaterloo.ca) (N. Lanson), [vila@gmm.insa-tlse.fr](mailto:vila@gmm.insa-tlse.fr) (J.-P. Vila).

conservation property of the original method disappear. We proposed in [2] a conservative weak scheme based on renormalization: the weak renormalized mesh-free scheme. We present in this paper the convergence analysis of this scheme applied to Friedrichs systems (cf. [3]), whose particularity arises from the linearity of the flux operator. The PDE is given in Eq. (1), where we denote by  $u$  the solution,  $u_0$  the initial condition,  $S$  and  $B_0$  the source term parameters and  $\tilde{\mathcal{F}}^\alpha$  the symmetric flux matrices,  $\alpha = 1, \dots, d$ .

*Numerical scheme for the renormalized particle scheme applied to Friedrichs systems.* We introduce the Lagrangian coordinates  $(\xi, t)$ , and let  $x(\xi, t)$  be the characteristic curve of  $a$  issued from  $\xi$  at time 0, such that  $\frac{dx}{dt} = a(x, t)$ . Consider a set  $J$  of moving particles with coordinates  $x(\xi_j, t) = x_j(t)$ , volumes  $\Omega_j$  and weights  $w_j(t)$ , whose variations depend on  $a$ . We introduce the *renormalized* mesh-free derivatives defined in Eqs. (2) to improve the SPH approximate derivatives. We prove that the renormalized mesh-free derivatives approach derivatives with an error only depending on the smoothing length  $\varepsilon$  (3). Applying these new approximate derivatives to the weak form of the Friedrichs systems, we get the conservative time continuous scheme (5), whose solution is denoted  $u^h$ . The weak renormalized scheme requires some stabilization. We stabilize it by introducing some numerical viscosity by analogy with Finite Volume. We first consider the Riemann problem at the interface between two particles  $i$  and  $j$  (6). We obtain a stable numerical scheme for each interaction (7). By summing over all the interactions for a particle  $i$ , each multiplied by some weight, we deduce the numerical scheme that we will study (8).

*Methodology of the convergence proof and main result.* The  $L^2$  convergence proof of SPH methods for Friedrichs systems uses an *abstract comparison result* established in [10]. The strong convergence of  $D_{h,\alpha}^* \tilde{\mathcal{F}}$  toward  $D_\alpha \tilde{\mathcal{F}}$  is crucial. Our transposed operator (4) does not satisfy this property. Thus, we use a Kruzkov method, consisting in comparing the entropy inequalities of the exact solution  $u$  and of the numerical solution  $u^h$ . The sketch of the proof (see [5]) is:

- We first prove the  $L^2$  stability as well as the  $H^1$  in space and time stability of  $u^h$ .
- Preliminary results regarding the local energy dissipation [9] are the basis to establish the entropy inequality (10), with the entropy  $\eta(v) = \|v - c\|^2$ , satisfied by the solution  $u^h$  of the scheme (8).
- We then transform the entropy equation satisfied by the exact solution  $u$ , so that the obtained entropy inequality (11) can be compared to (10). The highlighted term in (11) represents the transformed term, and implies that  $u$  must be regular enough in order to control the error term of the form  $D_h u - Du$  that appears in the measure term  $\nu$ .
- Finally, we sum the integrals over  $s$  and  $y$  of inequality (10) with  $c = u(y, s)$  and the integrals over  $t$  and  $x$  of inequality (11) with  $c = u^h(x, t)$ . A judicious choice of the test function  $\varphi = \varphi(x, y, s, t)$  used in both entropy inequalities leads to the  $L^2$  error estimate between  $u$  and  $u^h$ .

Under the assumptions (12), (13), on  $\mathcal{F}$  and  $B_0$ , the assumptions of Theorem 5.1 regarding  $u_0$  and  $S$  and the CFL condition (9), the solution  $u^h$  of the scheme (8) converges toward the exact solution  $u$ , with  $h^{1/8}$  convergence rate.

## 1. Introduction

Les méthodes sans grille ont été développées pour l'approximation des lois de conservation dans divers champs d'applications. Nous nous intéressons aux méthodes particulières de type SPH, dont nous améliorons la consistance grâce à la *renormalisation* [7]. Dans [7], cet outil, bien que performant, fait disparaître la propriété de conservativité de la méthode originale. Nous présentons dans [2] un schéma conservatif : le *schéma faible renormalisé*. Nous proposons d'analyser la convergence de ce schéma appliqué aux systèmes de Friedrichs (cf. [3]) du type :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^d D_\alpha (a^\alpha u) + \sum_{\alpha=1}^d D_\alpha (\tilde{\mathcal{F}}^\alpha u) + B_0 u = S, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (1)$$

où  $D_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ . Nous notons  $u : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$  la solution du système,  $u_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$  la condition initiale,  $S : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $B_0 : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$  les termes source,  $\tilde{\mathcal{F}}^\alpha : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ ,  $\forall \alpha \in \{1, \dots, d\}$  les matrices de flux, supposées symétriques et  $a$  le champs de transport régulier.

### 2. Schéma faible renormalisé et systèmes de Friedrichs

Introduisons les coordonnées lagrangiennes  $(\xi, t)$  et  $x(\xi, t)$  la courbe caractéristique issue de  $\xi$  à  $t = 0$ , satisfaisant  $\frac{dx}{dt} = a(x, t)$ . Soit un ensemble  $J$  de particules mobiles de coordonnées  $x(\xi_j, t) = x_j(t)$ , volumes  $\Omega_j(t)$  et poids  $w_j(t)$ , dont les variations dépendent de  $a$ , et tels que  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ ,  $\forall i \neq j, (i, j) \in J^2$ . L'approximation particulière régularisée des dérivées partielles sont définies par, pour toute fonction  $f$  (les dépendances en temps ne sont pas explicitées) :  $D_\alpha^{h,\varepsilon} f(x) = \sum_{j \in J} w_j f(x_j) D_\alpha \zeta^\varepsilon(x - x_j)$ , où  $\zeta^\varepsilon$  est un noyau régularisant approchant une masse de Dirac, et  $\varepsilon$  la taille du support de  $\zeta^\varepsilon$ , appelée longueur de régularisation, et est proportionnel à  $h$ , la distance caractéristique entre particules.

Il est prouvé dans [6,8] que l'erreur d'approximation des dérivées dépend du rapport  $h/\varepsilon$ . L'amélioration de la consistance est donc réalisée en considérant un autre opérateur d'approximation  $D_{h,\alpha}$  des dérivées :

$$D_{h,\alpha} f(x) = \sum_{j \in J} w_j (f(x_j) - f(x)) A^\alpha(x, x_j), \quad \forall \alpha = 1, \dots, d, \tag{2}$$

où  $A^\alpha(x, x_j)$  est la coordonnée  $\alpha$  du vecteur  $A(x, x_j)$ . Considérons cette approximation à  $x = x_i, i \in J$ .

En choisissant  $A_{ij} = A(x_i, x_j) = B_i \cdot \nabla \zeta_{ij}^\varepsilon = B(x_i) \cdot \nabla \zeta^\varepsilon(x_i - x_j)$ , et en calculant la matrice  $B_i$  comme suit pour toute particule  $i$  :  $E_i^{\alpha\beta} = D_\alpha^{h,\varepsilon} x^\beta - x^\beta D_\alpha^{h,\varepsilon} \mathbf{1}$ ,  $\forall (\alpha, \beta) \in \{1, \dots, d\}^2$  et  $B_i = (E_i)^{-1}$ , on montre que, dès que  $h/\varepsilon = O(1)$ , l'erreur d'approximation dépend uniquement du paramètre  $\varepsilon$  :

$$\forall \varphi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d) \quad \|D_h \varphi - D \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C \varepsilon \|D^2 \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}. \tag{3}$$

Dans la suite, nous remplaçons  $B_i$  par  $B_{ij} = (B_i + B_j)/2$ , ce qui ne change pas l'erreur d'approximation (3). Le vecteur  $A_{ij}$  est donc antisymétrique. Nous pouvons donc introduire l'opérateur adjoint :

$$D_{h,\alpha}^* f(x_i) = \sum_{j \in J} w_j(t) (f(x_j) + f(x_i)) A_{ij}^\alpha, \quad \forall \alpha = 1, \dots, d. \tag{4}$$

Considérons la formulation faible associée à (1). En remplaçant dans la formulation faible l'opérateur  $D$  de dérivation par  $D_h$ , et l'intégrale sur l'espace  $\mathbb{R}^d$  par le produit scalaire discret  $(\cdot, \cdot)_h$  défini par  $(\varphi, \Phi)_h = \sum_i w_i \varphi_i \Phi_i$ , on dérive le schéma faible renormalisé conservatif continu en temps suivant (cf. [5,2]), dont la solution est notée  $u^h$ , avec  $u^h(x) = u_i^h \forall x \in \Omega_i$  :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_i = a_i, & x_i(0) = \xi_i, & \frac{d}{dt} w_i = w_i \operatorname{div}(a_i), & w_i(0) = w_i, \\ \frac{d}{dt} (w_i u_i^h) + w_i \sum_{\alpha=1}^d D_{\alpha,h}^* (\tilde{\mathcal{F}}^\alpha u^h)_i + w_i B_{0,i} u_i^h = w_i S_i, & u_i^h(0) = u^0(\xi_i), \end{cases} \tag{5}$$

où  $a_i = a(x_i, t)$ ,  $u_i^h = u^h(x_i, t)$ ,  $S_i = S(x_i, t)$ ,  $B_{0,i} = B_0(x_i, t)$  et  $(\tilde{\mathcal{F}}^\alpha u^h)_i = (\tilde{\mathcal{F}}^\alpha u^h)(x_i, t)$ .

### 3. Construction du schéma numérique

Nous construisons dans cette section le schéma numérique discrétisé en temps stabilisé et expliquons la façon dont la viscosité numérique est introduite, en s'inspirant des volumes finis [1].

Soit le vecteur  $n_{ij} = A_{ij}/\|A_{ij}\|$ , et considérons le point milieu  $x_{ij}$  entre deux particules  $i$  et  $j$  (voir Fig. 1). Nous introduisons le problème de Riemann associé au schéma au point  $x_{ij}$  dans la direction  $n_{ij}$  :

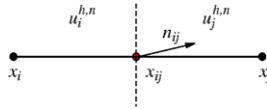


Fig. 1. Le schéma numérique discrétisé.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \sum_{\alpha=1}^d \tilde{\mathcal{F}}^\alpha(x_{ij}, t^n) n_{ij}^\alpha \right) v \right] + B_0(x_{ij}, t^n) v - S(x_{ij}, t^n) = 0, \quad (6)$$

$$v(x, t^n) = u_j^{h,n} \quad \text{si } x > x_{ij}, \quad v(x, t^n) = u_i^{h,n} \quad \text{si } x < x_{ij}.$$

Notons  $u_i^{h,n+1,j}$  la solution du problème de Riemann entre les particules  $i$  et  $j$  (i.e. l'influence de  $j$  sur  $i$ ), on a le schéma décentré classique :

$$u_i^{h,n+1,j} = u_i^{h,n} - \frac{\Delta t}{\Delta x_i^n} \left[ \left( \sum_{\alpha=1}^d \tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{n,\alpha} n_{ij}^{n,\alpha} \right)^+ u_i^{h,n} + \left( \sum_{\alpha=1}^d \tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{n,\alpha} n_{ij}^{n,\alpha} \right)^- u_j^{h,n} \right] + \Delta t (S_i^n - (B_0)_i^n u_i^{h,n}), \quad (7)$$

où  $u_i^{h,n} = u^h(x_i^n, t^n)$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{n,\alpha} = \tilde{\mathcal{F}}^\alpha(x_{ij}^n, t^n)$ ,  $S_i^n = S(x_i^n, t^n)$ ,  $B_{0,i}^n = B_0(x_i^n, t^n)$  et la notation  $(M)^-$  (resp.  $(M)^+$ ) représente la partie négative (resp. positive) de toute matrice  $M$ . Nous choisissons  $\Delta x_i^n = 1/(\sum_l w_l^n \|A_{il}^n\|)$ , avec  $w_l^n = w_l(t^n)$ ,  $A_{il}^n = A(x_i^n, x_l^n)$ ,  $x_i^n = x_i(t^n)$ . Nous multiplions chaque interaction  $u_i^{h,n+1,j}$  par  $\frac{w_i^{n+1}}{\Delta x_i^n w_j^n \|A_{ij}^n\|}$  et sommons toutes les interactions pour la particule  $i$ . Le résultat obtenu est multiplié par  $\frac{w_i^{n+1}}{w_i^n}$  et nous déduisons le schéma (écrit de façon à expliciter la viscosité numérique  $Q_{ij}^n$ ) :

$$\begin{aligned} w_i^{n+1} u_i^{h,n+1} &= w_i^n u_i^{h,n} - w_i^n \Delta t \sum_{j \in P} w_j^n \left( \left( \sum_{\alpha=1}^d \tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{n,\alpha} n_{ij}^{n,\alpha} \right) u_i^{h,n} + \left( \sum_{\alpha=1}^d \tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{n,\alpha} n_{ij}^{n,\alpha} \right) u_j^{h,n} \right) \|A_{ij}^n\| \\ &\quad - w_i^n \Delta t \sum_{j \in P} w_j^n \underbrace{\left( \left( \sum_{\alpha=1}^d \tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{n,\alpha} n_{ij}^{n,\alpha} \right)^- + \left( \sum_{\alpha=1}^d \tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{n,\alpha} n_{ij}^{n,\alpha} \right)^+ \right)}_{Q_{ij}^n} (u_j^{h,n} - u_i^{h,n}) \|A_{ij}^n\| \\ &\quad + \Delta t w_i^n (S_i^n - (B_0)_i^n u_i^{h,n}). \end{aligned} \quad (8)$$

Une condition CFL du schéma est :

$$\sup_{\substack{i,j \in \mathbb{Z}^d \\ n \Delta t \leq T}} \frac{\Delta t}{\Delta x_i^n} \left\| \left( \sum_{\alpha=1}^d \tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{n,\alpha} n_{ij}^{n,\alpha} \right)^- \right\| \leq 1 - \beta, \quad 0 < \beta < 1. \quad (9)$$

#### 4. Méthodologie de l'étude de convergence

L'analyse des méthodes SPH appliquées aux systèmes de Friedrichs établit un taux de convergence en norme  $L^2$  grâce à un *résultat abstrait de comparaison* [10]. Dans [10], la convergence forte de l'opérateur  $D_{h,\alpha}^* \tilde{\mathcal{F}}$  vers  $D_\alpha \tilde{\mathcal{F}}$  est fondamentale. Notre opérateur (4) ne satisfait pas cette propriété. Nous ne pouvons donc pas appliquer le résultat de [10]. Nous utilisons donc une méthode de *dédoublément des variables* de type Kruzkov [4] pour démontrer la convergence en norme  $L^2$  du schéma faible renormalisé. L'idée est de comparer les inégalités d'entropie de la solution approchée  $u^h$  et la solution exacte  $u$ , avec pour fonction entropique  $\eta(v) = \frac{1}{2} \|v - c\|^2$ . Les principes de la démonstration (cf. [5]) sont les suivants :

- Les résultats de stabilité  $L^2$  et  $H^1$  faible en espace et en temps pour le schéma sont établis.
- Des résultats relatifs à la dissipation d'énergie locale (cf. [9]) nous permettent d'établir, grâce à la condition CFL (9), que la solution  $u^h$  du schéma satisfait une inégalité d'entropie, avec pour fonction entropique  $\eta(u^h) = \|u^h - c\|^2 : \forall \varphi$  à support compact  $K \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\int_K \|u^h - c\|^2 \partial_t \varphi \, dx \, dt}_{(a)} - \underbrace{\int_K (2(u^h - c)^T u^h - \|u^h - c\|^2) \operatorname{div}(a) \varphi \, dx \, dt}_{(b)} \\
 & + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^d \int_K (u^h - c)^T (\mathcal{F}^\alpha D_\alpha \varphi - \overline{D_{\alpha,h}^* \tilde{\mathcal{F}}^\alpha} \varphi) (u^h - c) \, dx \, dt}_{(c)} - 2 \underbrace{\sum_{\alpha=1}^d \int_K (u^h - c)^T \overline{D_{\alpha,h}^* \tilde{\mathcal{F}}^\alpha} c \varphi \, dx \, dt}_{(d)} \\
 & + 2 \underbrace{\int_K (u^h - c)^T (S - B_0 u^h) \varphi \, dx \, dt}_{(e)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \|u^h(x, 0) - c\|^2 \varphi(x, 0) \, dx}_{(f)} \geq \langle \mu_h, \varphi \rangle, \tag{10}
 \end{aligned}$$

où  $\overline{D_{\alpha,h}^* \tilde{\mathcal{F}}^\alpha}(x, t) = D_{\alpha,h}^* \tilde{\mathcal{F}}^\alpha(x_i^n, t^n)$  pour  $(x, t) \in \Omega_i(t^n) \times [t^n, t^{n+1}[$ , et  $\mu_h \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ .

- Nous transformons l'inégalité d'entropie de la solution exacte en une inégalité comparable à (10) :  $\forall \varphi$  à support compact  $K \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\int_K \|u - c\|^2 \partial_s \varphi \, dy \, ds}_{(a')} - \underbrace{\int_K (2(u - c)^T u - \|u - c\|^2) \operatorname{div} a \varphi \, dy \, ds}_{(b')} \\
 & + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^d \int_K (u - c)^T (\mathcal{F}^\alpha D_\alpha \varphi - \tilde{\mathcal{F}}^\alpha \varphi) (u - c) \, dy \, ds}_{(c')} - 2 \underbrace{\sum_{\alpha=1}^d \int_K (u - c)^T \overline{D_{\alpha,h}^* \tilde{\mathcal{F}}^\alpha} c \varphi \, dy \, ds}_{(d')} \\
 & + 2 \underbrace{\int_K (u - c)^T (S - B_0 u) \varphi \, dy \, ds}_{(e')} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \|u(y, 0) - c\|^2 \varphi(y, 0) \, dy}_{(f')} = \langle v, \varphi \rangle, \tag{11}
 \end{aligned}$$

où  $v \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ . La transformation est effectuée sur le terme coloré de (d'). La solution approchée  $u^h$  n'étant pas suffisamment régulière, nous avons transformé l'inégalité d'entropie satisfaite par la solution exacte. Il faut cependant supposer  $u \in C^0(0, T; (H^4(\mathbb{R}^d))^p) \cap C^1(0, T; (H^3(\mathbb{R}^d))^p)$  puisque la mesure  $v$  comprend certains termes d'erreur nécessitant une estimation de  $D_h u - Du$ , dont la majoration en norme  $L^\infty$  (3) fait intervenir la norme  $L^\infty(K)$  de  $D^2 u$ . D'après les injections de Sobolev, nous avons  $(H^4(\mathbb{R}^d))^p \hookrightarrow (W^{2,\infty}(\Omega))^p$  pour tout compact  $\Omega$ . La régularité de  $u$  choisie ci-dessus est donc suffisante pour l'estimation de  $\langle v, \varphi \rangle$ .

- Les deux inégalités sont sommées en choisissant  $c = u(y, s)$  et en intégrant sur  $y \in \mathbb{R}^d$  et  $s \in ]0, T[$  dans (10), et  $c = u^h(x, t)$  et en intégrant sur  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $t \in ]0, T[$  dans (11). La fonction test  $\varphi = \varphi(x, y, t, s)$  nous permet d'approcher  $y$  de  $x$  et  $s$  de  $t : \varphi(x, y, t, s) = \psi(x, t) \bar{\zeta}^\gamma(t - s) \zeta^\gamma(y - x)$ , avec  $\psi$  à support compact dans  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ ,  $\operatorname{supp} \zeta^\gamma = [-\gamma, \gamma]$  et  $\operatorname{supp} \bar{\zeta}^\gamma = [-\gamma, 0]$  de sorte que  $\varphi(x, y, t, 0) = 0$ , ce qui élimine le terme (f'). En supposant les régularités (12) et (13) et celle du Théorème 5.1, les termes (c), (c') ainsi que (b) + (b') conduisent à des termes d'énergie en  $\|u^h - u\|^2$ . Grâce au caractère Lipschitzien de  $\overline{D_{\alpha,h}^* \tilde{\mathcal{F}}}$ , (d) + (d') donne

un quatrième terme d'énergie. De même, (e) + (e') permet d'éliminer le terme en  $S$  et d'obtenir un cinquième terme d'énergie à partir de  $(u - c)^T B_0(u - c)$ . Le terme (f) est majoré par un terme d'énergie à  $t = 0$ .

- Seuls des termes d'énergie en  $\|u^h - u\|^2$  sont apparus. Un choix judicieux de  $\psi(x, t)$  permet donc d'éliminer tous ces termes, par le biais d'une technique de Gronwall, et d'obtenir ainsi une estimation d'erreur en norme  $L^2$  entre  $u$  et  $u^h$ .

## 5. Résultat principal

Les matrices  $\mathcal{F}^\alpha = a^\alpha I + \tilde{\mathcal{F}}^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, d$ , sont supposées symétriques définies positives et vérifiant :

- (i) Pour  $\alpha = 1, \dots, d$ ,  $\mathcal{F}^\alpha \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d; \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)) \cap C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d; \mathcal{L}(\mathbb{R}^p))$ ,
- (ii)  $\exists C(T) > 0$ ,  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2$ ,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\forall \alpha$ ,  $\|\mathcal{F}^\alpha(x, t) - \mathcal{F}^\alpha(y, t)\| \leq C\|x - y\|$ ,
- (iii)  $\sum_{\alpha=1}^d D_\alpha \mathcal{F}^\alpha \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d; \mathcal{L}(\mathbb{R}^p))$ ,
- (iv)  $\exists C(T) > 0$ ,  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2$ ,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\|\sum_{\alpha=1}^d D_\alpha \mathcal{F}^\alpha(x, t) - D_\alpha \mathcal{F}^\alpha(y, t)\| \leq C\|x - y\|$ .

On suppose également que la matrice  $B_0$  est symétrique et qu'elle vérifie des hypothèses similaires :

- (i)  $B_0 \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d; \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)) \cap C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d; \mathcal{L}(\mathbb{R}^p))$ ,
- (ii)  $\exists C(T) > 0$ ,  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2$ ,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\|B_0(x, t) - B_0(y, t)\| \leq C\|x - y\|$ .

**Théorème 5.1.** *On suppose que les données  $\mathcal{F}$ ,  $B_0$  vérifient les hypothèses (12), (13) et que le pas de temps  $\Delta t$  vérifie la condition CFL (9). On note  $u$  la solution du problème (1) avec  $u_0 \in (H^4(\mathbb{R}^d))^p$ ,  $S \in (C^1([0, \infty[, H^4(\mathbb{R}^d)))^p$ , et  $u^h$  la solution du schéma (8). Alors  $u^h$  converge vers  $u$  dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$  et on a l'estimation d'erreur suivante : pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ , il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $K$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $S$ ,  $B_0$  et  $u_0$  telle que :  $\int_K \|u^h(x, t) - u(x, t)\|^2 dx dt \leq Ch^{1/4}$ .*

**Remarque 1.** La convergence  $L^2$  est en  $h^{1/8}$ . Dans le cas  $p = 1$  (cas scalaire), la convergence est optimale en  $h^{1/2}$  (cf. [10]).

**Remarque 2.** Les hypothèses de régularité sur  $u_0$ ,  $S$ , ainsi que (12) et (13) nous permettent d'obtenir la régularité requise  $u \in C^0(0, T; (H^4(\mathbb{R}^d))^p) \cap C^1(0, T; (H^3(\mathbb{R}^d))^p)$  (cf. [10]).

## Références

- [1] S. Benharbit, A. Chalabi, J.P. Vila, Numerical viscosity, and convergence of finite volume methods for conservation laws with boundary conditions, SIAM J. Numer. Anal. 32 (3) (1995) 775–796.
- [2] B. Ben Moussa, N. Lanson, J.P. Vila, Convergence of Meshless Methods for Conservation Laws; Applications to Euler Equations, Internat. Ser. Numer. Math., vol. 129, Birkhäuser, 1999.
- [3] K.O. Friedrichs, Symmetric hyperbolic linear differential equations, C.P.A.M. 7 (1954) 345–392.
- [4] S.N. Kruzkov, First order quasilinear equations in several independent variables, Math. USSR-Sb. 10 (2) (1970) 217–243.
- [5] N. Lanson, Etude des méthodes particulières renormalisées. Applications aux problèmes de dynamiques rapides, Thèse de doctorat, INSA Toulouse, Janvier 2001.
- [6] S. Mas-Gallic, Méthode particulière pour une équation de convection–diffusion, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 305 (10) (1987) 431–434.
- [7] R.W. Randles, L.D. Libertsy, Smoothed particle hydrodynamics, some recent improvements and applications, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139 (1996) 375–408.
- [8] P.A. Raviart, An analysis of particle methods, in: F. Brezzi (Ed.), Numerical Methods in Fluid Dynamics, in: Lecture Notes in Math., vol. 1127, Springer, Berlin, 1985, pp. 243–324.
- [9] E. Tadmor, Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes, Math. Comput. 43 (168) (1984) 369–381.
- [10] J.P. Vila, P. Villedieu, Convergence of an explicit finite volume scheme for first order symmetric systems, Numer. Math. 94 (3) (2003) 573–602.