Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 473–476
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique

Sélections approchées dans les espaces métriques de dimension finie

Youcef Askoura

Université de Bretagne Occidentale-CNRS, UFR sciences et techniques, laboratoire de mathématiques-UMR 6205, 6, avenue Victor Le Gorgeu, CS 93837, 29283 BREST cedex 3, France

Reçu le 6 mai 2004 ; accepté après révision le 23 juillet 2004

Disponible sur Internet le 28 septembre 2004

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

Nous montrons un résultat d'existence des sélections approchées pour les applications multivoques définies sur les espaces métriques de dimension finie. Nous imposerons à ces applications d'être semi-continues supérieurement et d'avoir des valeurs qui ont leurs voisinages proches contractiles. ***Pour citer cet article : Y. Askoura, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Approximate selections in finite dimensional metric spaces. We prove an existence result of approximate selections for multi-valued maps defined on finite dimensional metric spaces. We impose to our applications to be upper semi continuous and to have a values having contractible small neighborhoods. ***To cite this article: Y. Askoura, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

1. Introduction et notations

Nous nous proposons dans cette Note de généraliser, dans les espaces métriques de dimension finie, le théorème d'existence des sélections approchées de Cellina ([1], page 84). Plus exactement, nous montrons un résultat d'existence des sélections approchées pour les applications multivoques définies sur les espaces métriques de dimension finie dans des espaces normés. Nous considérons des applications multivoques semi-continues supérieurement ayant des valeurs possédant des voisinages proches contractiles. Les sélections approchées sont utilisables par exemple dans la théorie des points fixes, en inclusions différentielles et en théorie des jeux. Pour la littérature, voir [1,6,5,4,2,7,3].

Adresse e-mail : youcef.askoura@univ-brest.fr (Y. Askoura).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.07.028

Sauf mention du contraire, dans toute la suite de ce papier, X désigne un espace métrique de dimension « topologique » (covering-dimension) finie et strictement positive. Nous la désignons par $\dim_\infty(X)$. Notons que, pour un sous ensemble fermé d'un espace normé de dimension (algébrique) finie, la dimension topologique est inférieure ou égale à la dimension algébrique. Nous notons par d la distance décrivant la topologie de X et par Y un espace normé muni de la norme $\|\cdot\|$. On désigne par D la distance dans l'espace produit $X \times Y$ définie comme suit : $D[(x,y),(x',y')] = d(x,x') + \|y - y'\|$. B désignera la boule unité ouverte de Y. Si A est un sous ensemble d'un espace topologique donné, $\overline{A}$ désigne l'adhérence de A. Soit $T : X \to 2^Y$ (2^Y est l'ensemble de toutes les parties non vides de Y) une application multivoque et $\varepsilon > 0$, on note $\overline{B_\varepsilon T}$ l'application multivoque qui associe à x, $\overline{B_\varepsilon T}x = \overline{Tx + \varepsilon B}$. $\mathrm{Gr}\, H$ (resp. $\mathrm{Dom}(H)$) désigne le graphe (resp. le domaine de définition) de l'application H. Pour un sous ensemble Z de $X \times Y$ et $\varepsilon > 0$, on note $V_\varepsilon Z = \{r \in X \times Y, D(r,Z) < \varepsilon\}$. Nous dirons que la fonction $f : X \to Y$ est une sélection ε-approchée de T si $\mathrm{Gr}\, f \subset V_\varepsilon \mathrm{Gr}\, T$. Pour un ensemble donné J fini, $|J|$ désigne le cardinal de J. L'abréviation $s.c.s.$ signifie semi-continue supérieurement. $\mathbb{N}$ désignera l'ensemble des entiers naturels. Un espace topologique (ou un sous ensemble d'un espace topologique donné muni de la topologie induite) E est dit contractile si l'identité de E est homotope à une fonction constante.

2. Le principal résultat

Théorème 2.1. *Soit $S : X \to 2^Y$ une application multivoque semi-continue supérieurement à images non vides et $\varepsilon > 0$. Supposons que* : $\forall l \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant l \leqslant \dim_\infty X + 1$,

$$\overline{B_{\varepsilon l} S}x \text{ est contractile, } \forall x \in X. \tag{1}$$

Alors, $\exists f_\varepsilon : X \to Y$, *continue tel que* $\forall x \in X$, $D((x, f_\varepsilon(x)), \mathrm{Gr}\, S) < \varepsilon(3 + \dim_\infty X)$.

En d'autres termes $\mathrm{Gr}\, f_\varepsilon \subset V_{\varepsilon(3+\dim_\infty X)} \mathrm{Gr}\, S$.

Démonstration abrégée. $\forall x \in X, \exists \delta(x) > 0$, tel que : $\delta(x) < \varepsilon$ et $\forall x' \in B(x, \delta(x))$, $Sx' \subset Sx + \varepsilon B$ (S est $s.c.s$). X peut être donc recouvert par $\mathcal{W} = \{B(x, \delta(x)/4), x \in X\}$, où $\delta(x)$ vérifie la propriété précédente. Soit $\mathcal{U}$ un raffinement ouvert localement fini de $\mathcal{W}$, $\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\}$ et tel que $\bigcap_{i \in J \subset I} U_i \neq \emptyset \Rightarrow |J| \leqslant \dim_\infty X + 1$.

Notons par $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ le nerf (the nerve) de $\mathcal{U}$ (la réalisation géométrique du nerf abstrait de $\mathcal{U}$ munie de sa topologie naturelle). Pour éviter les confusions, on note les sommets (vertices) de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ par des lettres minuscules $u_i, i \in I$. Pout tout $i \in I$, $\exists x_i \in X$ tel que $U_i \subset B(x_i, \delta(x_i)/4)$, prenons $y_i \in Sx_i$. Dans la suite de ce papier, le simplexe de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ ayant l'ensemble des points $u_i, i \in J$ comme sommets est noté par Δ_J. $\partial \Delta_J$ désigne la frontière de Δ_J. Pour tout $J \subset I$, J fini, on pose $O_J = \bigcap_{i \in J} U_i$. Soient Δ_L un simplexe de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ et $B(x_i, \delta(x_i)/4), i \in L$ des boules de $\mathcal{W}$ telles que : $U_i \subset B(x_i, \delta(x_i)/4)$. Soit $i_0 \in L$ tel que $\max_{i \in L} \delta(x_i) = \delta(x_{i_0})$ (on prend un i_0 quelconque parmi ceux qui vérifient ce maximum s'il y en a plusieurs). On note $x_L = x_{i_0}$. On a : $\forall i \in L$, $B(x_i, \delta(x_i)/4) \cap B(x_L, \delta(x_L)/4) \neq \emptyset$, car $U_i \cap U_{i_0} \neq \emptyset$ (Δ_L est un simplexe de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$), $U_i \subset B(x_i, \delta(x_i)/4)$ et $U_{i_0} \subset B(x_L, \delta(x_L)/4)$. En tenant compte du fait que $\delta(x_i) \leqslant \delta(x_L)$, $\forall i \in L$, on a les relations suivantes :

$\forall i \in L$, $B(x_i, \delta(x_i)/4) \subset B(x_L, \delta(x_L))$ et $U_i \subset B(x_L, \delta(x_L))$,

$\forall i \in L$, $Sx_i \subset Sx_L + \varepsilon B$, en particulier $y_i \in Sx_L + \varepsilon B$.

$\forall i \in L, \forall x \in U_i$, $Sx \subset Sx_L + \varepsilon B$.

Si maintenant $\Delta_{L'}$ est un autre simplexe de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ tel que $L \subset L'$ (i.e. Δ_L est un sous simplexe de $\Delta_{L'}$). On aura d'après ce qui précède,

$$Sx_L \subset Sx_{L'} + \varepsilon B. \tag{2}$$

Nous montrons ensuite les quatre lemmes suivants :

Lemme 2.2. *Soient F un sous ensemble fermé d'un espace topologique E_1, M un sous ensemble contractile d'un espace topologique E_2 et $f : F \times \partial \Delta_K \to M$ (Δ_K est un simplexe de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$) une fonction continue.*

Alors f est prolongeable par continuité à $F \times \Delta_K$ dans M.

Lemme 2.3. *Soit $f : X \times \partial\Delta_K \to Y$ (Δ_K est un simplexe de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$) une fonction continue.*
Supposons que,

$$\forall L \subsetneq K,\ \forall x \in O_L, \quad f(x, \Delta_L) \subset \overline{Sx_L + |L|\varepsilon B}. \tag{3}$$

Alors, il existe $\tilde{f}$, un prolongement continu de f à $X \times \Delta_K$ telle que

$$\forall L \subset K,\ \forall x \in O_L, \quad \tilde{f}(x, \Delta_L) \subset \overline{Sx_L + |L|\varepsilon B}. \tag{4}$$

Lemme 2.4. *Soient Δ_K un simplexe de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$, $i_0 \in I \backslash K$ tel que $\Delta_{K \cup \{i_0\}}$ est un simplexe de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ et $f : X \times \Delta_K \to Y$, une fonction continue. Posons $K' = K \cup \{i_0\}$.*
Supposons que

$$\forall J \subset K,\ \forall x \in O_J, \quad f(x, \Delta_J) \subset \overline{Sx_J + |J|\varepsilon B}. \tag{5}$$

Alors, $\exists \tilde{f} : X \times \Delta_{K'} \to Y$ un prolongement continu de f, vérifiant :

$$\forall J \subset K',\ \forall x \in O_J, \quad \tilde{f}(x, \Delta_J) \subset \overline{Sx_J + |J|\varepsilon B}. \tag{6}$$

Lemme 2.5. *Il existe une fonction $f : X \times \mathcal{N}(\mathcal{U}) \to Y$, telle que :*

$$\begin{aligned} &\textit{Pour tout simplexe } \Delta_J \textit{ de } \mathcal{N}(\mathcal{U}),\ f \textit{ est continue sur } X \times \Delta_J, \textit{ et} \\ &\forall x \in O_J, \quad f(x, \Delta_J) \subset \overline{Sx_J + |J|\varepsilon B}. \end{aligned} \tag{7}$$

Nous achevons la démonstration du Théorème 2.1 comme suit :

Soit une fonction $g : X \times \mathcal{N}(\mathcal{U}) \to Y$ vérifiant (7) et $\{\Psi_i, i \in I\}$ une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement $\mathcal{U}$. Soit $\Psi(x) = \sum_{i \in I} \Psi_i(x) u_i$, l'application canonique de X dans $\mathcal{N}(\mathcal{U})$. Soit en dernier lieu la fonction f_ε définie de la façons suivante :

$$\begin{aligned} f_\varepsilon : X &\to Y, \\ x &\mapsto g\big(x, \Psi(x)\big). \end{aligned}$$

Montrons que f_ε est continue.

Soit $x_0 \in X$. Il existe O_{x_0} un voisinage ouvert de x_0 ne rencontrant qu'un nombre fini d'ouverts de $\mathcal{U}$. Soit $I_0 = \{i \in I,\ O_{x_0} \cap U_i \neq \emptyset\}$.

On a, $\Psi(O_{x_0}) \subset (\bigcup_{j \in I_1} \Delta_{J_j})$, tel que $J_j \subset I_0$, $\forall j \in I_1$, où I_1 est un ensemble d'indices fini. Comme g est continue sur $X \times \Delta_{J_j}$, $\forall j \in I_1$, g est continue sur $X \times (\bigcup_{j \in I_1} \Delta_{J_j})$, et donc, $f_\varepsilon(\cdot) = g(\cdot, \Psi(\cdot))$ est continue sur O_{x_0}, par conséquent sur tout X.

Vérifions que f_ε vérifie l'affirmation du Théorème 2.1. Soit $x \in X$ et $J(x) = \{i \in I,\ \Psi_i(x) \neq 0\}$. On a $x \in O_{J(x)}$ et donc $f_\varepsilon(x) = g(x, \Psi(x)) \in g(x, \Delta_{J(x)}) \subset \overline{Sx_{J(x)} + |J(x)|\varepsilon B}$. Soit $y \in Sx_{J(x)}$ tel que $\|f_\varepsilon(x) - y\| < (|J(x)| + 1)\varepsilon$. On a : $D((x, f_\varepsilon(x)), (x_{J(x)}, y)) = d(x, x_{J(x)}) + \|f_\varepsilon(x) - y\| < \varepsilon + \varepsilon(\dim_\infty X + 2) = \varepsilon(3 + \dim_\infty X)$. □

Remarque 1. Le théorème précédent reste vrai si $\dim_\infty X = 0$. Pour le voir, il suffit de remarquer que dans ce cas, nous avons uniquement besoin du dernier lemme pour montrer le résultat. Comme il n y a pas de simplexes de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ de dimension supérieure ou égale à 1, la preuve du dernier lemme nécessite uniquement de simples prolongements de la fonction construite.

Corollaire 2.6. *Soit $S : X \to 2^Y$, une application multivoque semi-continue supérieurement à images non vides telle que,*

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \overline{B_\varepsilon S}x \textit{ est contractile},\ \forall \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \forall x \in X. \tag{8}$$

Alors, pour tout $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, il existe une fonction continue $f_\varepsilon : X \to Y$ qui est une sélections ε-approchée de S. Autrement dit, $\operatorname{Gr} f_\varepsilon \subset V_\varepsilon \operatorname{Gr} S$.

La preuve suit immédiatement du Théorème 2.1.

Remarque 2. Notre résultat généralise le théorème de Cellina ([1], page 84) pour les espaces métriques de dimension finie. En effet, si S est à valeurs convexes dans le Théorème 2.1 et le corollaire précédent, alors, les conditions (1) et (8) figurant dans leurs énoncés sont vérifiées. Car, dans ce cas, $\forall x \in X$, pour tout nombre réel λ positif, $\overline{B_\lambda S x} = \overline{Sx + \lambda B}$ est l'adhérence d'une somme de deux ensembles convexes. Il est donc convexe, en conséquence contractile.

Corollaire 2.7. *Soient X un sous ensemble convexe et compact de dimension (topologique) finie d'un espace normé donné et $T : X \to 2^X$ une application multivoque semi-continue supérieurement à valeurs non vides et fermées. Supposons qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que $\overline{B_\varepsilon T} x \cap X$ est contractile, $\forall \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \forall x \in X$. Alors, T possède un point fixe.*

Preuve. Considérons une suite $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \varepsilon_0]$ décroissante vers zéro.

On remarque que le Théorème 2.1 et le Corollaire 2.6 restent vrais si Y est simplement un sous ensemble convexe et fermé d'un espace normé donné. Dans ce cas, on remplace tous les voisinages de sous ensembles de Y figurant dessus par leurs intersections avec Y. Par exemple, $\overline{B_{\varepsilon l} S} x$ sera remplacé par $\overline{B_{\varepsilon l} S} x \cap Y$, $\overline{Sx + |J|\varepsilon B}$ par $\overline{Sx + |J|\varepsilon B} \cap Y$ et $\overline{B_\varepsilon S} x$ par $\overline{B_\varepsilon S} x \cap Y$.

Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_{\varepsilon_n} : X \to X$ telle que $\mathrm{Gr}\, f_{\varepsilon_n} \subset V_{\varepsilon_n} \mathrm{Gr}\, T$. D'après le théorème du point fixe de Schauder f_{ε_n} admet un point fixe que nous notons x_{ε_n}. La suite $\{x_{\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ admet alors une sous suite convergente vers un point fixe de T. □

Remerciements

Je tiens à remercier le professeur C. Godet-Thobie pour son aide précieuse à la préparation de ce travail.

Références

[1] J.P. Aubin, A. Cellina, Differential Inclusions, Springer-Verlag, 1984.
[2] F. Deutsh, P. Kenderov, Continuous selections and approximate selections for set-valued mappings and applications to metric projections, SIAM J. Math. Anal. 14 (1983) 185–194.
[3] W. Kryszewski, Homotopy invariants for set-valued maps homotopy-approximation approach, in: Fixed Point Theory and Applications, Proc. Int. Conf., Marseille–Luminy/Fr. 1989, in: Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 252, 1991, pp. 269–284.
[4] E. Marchi, J.-E. Martinez-Legaz, Some results on approximate continuous selections, fixed points and minimax inequalities, in: Fixed Point Theory and Applications, Proc. Int. Conf., Marseille–Luminy/Fr. 1989, in: Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 252, 1991, pp. 327–342.
[5] S. Park, Fixed points of approximable maps, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996) 3109–3114.
[6] Y. Xu, A note on a continuous approximate selection theorem, J. Approx. Theory 113 (2001) 324–325.
[7] X. Zheng, Approximate selection theorems and their applications, J. Math. Anal. Appl. 212 (1997) 88–97.