Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 251–256

COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles

Bornes sur la densité pour un problème de Navier–Stokes compressible à frontière variable avec conditions aux limites de Dirichlet

Fabien Flori, Bernard Giudicelli

UMR 6134, université de Corse, quartier Grossetti, BP 52, 20250 Corte, France

Reçu le 29 janvier 2004 ; accepté après révision le 8 juin 2004

Disponible sur Internet le 24 juillet 2004

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

Nous étendons un résultat de compacité obtenu par P.-L. Lions en 1998 à un problème de Navier–Stokes compressible isentropique ($\gamma \geqslant 1$) à frontière variable pour des conditions aux limites de Dirichlet. Ce résultat peut être utile pour l'analyse de certains problèmes de couplage fluide–structure, dans l'étude du transport de polluants en mer (cas du shallow water à frontière variable : $\gamma = 1$) ou dans la modélisation de l'écoulement fluvial. ***Pour citer cet article : F. Flori, B. Giudicelli, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Bounds on the density for a compressible Navier–Stokes problem on a time dependent domain with Dirichlet boundary conditions. We extend a compactness result shown by P.-L. Lions in 1998 to an isentropic compressible Navier–Stokes problem ($\gamma \geqslant 1$) defined on a time dependent domain with Dirichlet boundary conditions. This result can be useful for the study of some fluid–structure interaction problems, for the analysis of some pollution water problems (shallow water equations with free boundary: $\gamma = 1$) or for the modelling of a river level. ***To cite this article: F. Flori, B. Giudicelli, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Adresse e-mail : flori@univ-corse.fr (F. Flori).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.06.010

Abridged English version

We denote Γ_t a $C^{0,1}$ curve surrounding a compressible fluid $\Omega_t \subset \mathbb{R}^2$. We denote d, the motion of Γ_t which is supposed to be smooth enough. We look for solutions (ρ, v) of

$$(\mathcal{F}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v - \mu\Delta v + a\nabla\rho^\gamma = 0, & \text{in } Q = \bigcup\limits_t \Omega_t, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, & \text{in } Q, \\ v = \dfrac{\partial d}{\partial t}, & \text{on } \Sigma = \bigcup\limits_t \Gamma_t, \\ v(t=0) = v_0(x), \quad \rho(t=0) = \rho_0(x) \geqslant 0 & \text{on } \Omega_0, \end{cases} \tag{1}$$

where $a > 0$, $\mu > 0$ and $T > 0$. We take

$$v_0 \in L^2(\Omega_0),\ \rho_0 \in L^\gamma(\Omega_0) \quad \text{if } \gamma > 1, \qquad \rho_0 \log\rho_0 \in L^1(\Omega_0) \quad \text{if } \gamma = 1. \tag{2}$$

We set $u = v - w$ with $-\mu\Delta w = F \in H^1(0,T; L^r(\Omega_t))$ and $w_{|\Gamma_t} = \frac{\partial d}{\partial t} \in H^1(0,T; W^{2-1/r,r}(\Gamma_t))$ with $r > 2$. Then,

$$\|w\|_{H^1(0,T;W^{2,r}(\Omega_t))} \leqslant K\left(\|F\|_{H^1(0,T;L^r(\Omega_t))} + \left\|\frac{\partial d}{\partial t}\right\|_{H^1(0,T;W^{2-1/r,r}(\Gamma_t))}\right). \tag{3}$$

Let C be a constant depending only on the data and $\epsilon > 0$, we set $B = 1 - (\gamma-1)\|\operatorname{div} w\|_{L^1(0,T;L^\infty(\Omega_t))}$, $A = \mu - C(\|w\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega_t))} + \|Dw\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))} + \epsilon)$ and we choose d and F such that

$$A > 0 \quad \text{and} \quad B > 0. \tag{4}$$

We denote $G(\rho(t)) = \frac{1}{\gamma-1}\|\rho(t)\|^\gamma_{L^\gamma(\Omega_t)}$ if $\gamma > 1$ and $G(\rho(t)) = \rho(t)\log\rho(t)$ if $\gamma = 1$. We suppose that

$$\frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega_0)} + aG(\rho_0) + C_\epsilon\big\|(w\cdot\nabla)w + F\big\|^2_{L^2(Q)} + C_\epsilon\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_t))} < \frac{2A^2}{C_0^2}. \tag{5}$$

Then we obtain estimates depending only on the data: $\rho \in L^\infty(0,T; L^\gamma(\Omega_t))$ if $\gamma > 1$, $\rho\log\rho \in L^\infty(0,T; L^1(\Omega_t))$ if $\gamma = 1$ and $u \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega_t)) \cap L^2(0,T; H^1_0(\Omega_t))$.

Moreover, we show the following compactness result:

Theorem 0.1. *Under the assumptions* (2)–(5), $\rho \in L^{\gamma+\theta}(0,T; L^{\gamma+\theta}_{\mathrm{loc}}(\Omega_t))$, $1 \leqslant \theta < \gamma$, *and the bound depends only on the data.*

This compactness is sufficient to pass to the limit in the equations [5].

Remark 1. In the case $\gamma = 1$, the regularity $\rho\log\rho \in L^\infty(0,T; L^1(\Omega_t))$ is sufficient to pass to the limit (see for instance [7]).

When γ is about 1.5 or 1.6, this model finds applications in the fluid–structure interaction problems [4]. The case $\gamma = 1$ is particularly interesting. Indeed, this situation corresponds to the shallow water equations on a free boundary domain and a lot of applications can be found to this model as for instance the modelling of the river level [8] or the transport of pollution (oil) by the water. For the existence of weak solutions for the shallow water problem on a fixed domain we refer to [1,6,7], where the global existence of weak solutions is obtained with another modelization of the viscous effects.

Remark 2. If Ω_t is smooth enough, the properties of the functional spaces such as $H^s(0,T; H^r(\Omega_t))$ can be deduced by using the extension operator P from $H^{s+r}(Q)$ in $H^{s+r}(\mathbb{R}^3)$ (see, for instance [3]).

1. Estimations préliminaires sur $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$

On note Γ_t une courbe $C^{0,1}$ entourant un fluide $\Omega_t \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{mes}(\Omega_t) \neq 0$. On note d le mouvement de Γ_t que l'on suppose suffisamment régulier pour satisfaire ces hypothèses. On s'intéresse aux solutions (ρ, v) de (1) sous les hypothèses (2)–(5). On pose $u = v - w$ avec $-\mu \Delta w = F \in H^1(0, T; L^r(\Omega_t))$ et $w_{|\Gamma_t} = \frac{\partial d}{\partial t} \in H^1(0, T; W^{2-1/r,r}(\Gamma_t))$, $r > 2$. L'équation des moments conduit à :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|u(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \mu\left\|u(t)\right\|^2_{H^1_0(\Omega_t)} + a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G\big(\rho(t)\big)\\&\quad = \frac{1}{2}\int_{\Omega_t} u^2 \operatorname{div} u \,\mathrm{d}x - a\int_{\Omega_t} \rho^\gamma \operatorname{div} w \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_t} u\left[(w\cdot\nabla u) + (u\cdot\nabla w) + (w\cdot\nabla w) - \frac{\partial w}{\partial t} - F\right]\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{6}$$

où $G(\rho(t)) = \frac{1}{\gamma-1}\|\rho(t)\|^\gamma_{L^\gamma(\Omega_t)}$ si $\gamma > 1$ et $G(\rho(t)) = \rho(t)\log\rho(t)$ si $\gamma = 1$. Pour tout $\epsilon > 0$, le dernier terme de (6) est estimé par

$$C\big(\|w\|_{L^4(\Omega_t)} + \|Dw\|_{L^2(\Omega_t)} + \epsilon\big)\|u\|^2_{H^1_0(\Omega_t)} + C_\epsilon\left(\left\|(w\cdot\nabla)w + F\right\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{H^{-1}(\Omega_t)}\right).$$

L'avant dernier terme de (6) est estimé par $a(\gamma - 1)G(\rho(t))\|\operatorname{div} w\|_{L^\infty(\Omega_t)}$ si $\gamma > 1$ et $aG(\rho(t))$ si $\gamma = 1$. Enfin, avec l'inégalité de Gagliardo–Nirenberg, on a

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_t} u^2 \operatorname{div} u \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{C_0}{2}\|u\|_{L^2(\Omega_t)}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega_t)}. \tag{7}$$

On pose

$$A = \mu - C\big(\|w\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega_t))} + \|Dw\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))} + \epsilon\big)$$

et

$$B = 1 - (\gamma - 1)\|\operatorname{div} w\|_{L^1(0,T;L^\infty(\Omega_t))}.$$

Si dans (3), on choisit d et F tels que

$$A > 0 \quad \text{et} \quad B > 0 \tag{8}$$

alors (6) nous conduit à :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\|u(t)\right\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))} + \left(A - \frac{C_0}{2}\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))}\right)\|u\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega_t))} + aB\left\|G\big(\rho(t)\big)\right\|_{L^\infty(0,T)}\\&\quad \leqslant \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega_0)} + aG(\rho_0) + C_\epsilon\left\|(w\cdot\nabla)w + F\right\|^2_{L^2(Q)} + C_\epsilon\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_t))}.\end{aligned} \tag{9}$$

En procédant comme P.-L. Lions dans [5] ou Orenga dans [7], si on suppose que

$$\frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega_0)} + aG(\rho_0) + C_\epsilon\left\|(w\cdot\nabla)w + F\right\|^2_{L^2(Q)} + C_\epsilon\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_t))} < \frac{2A^2}{C_0^2} \tag{10}$$

alors $A - \frac{C_0}{2}\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))} > 0$ et on a les estimations suivantes : $\rho \in L^\infty(0, T; L^\gamma(\Omega_t))$ si $\gamma > 1$, $\rho\log\rho \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega_t))$ si $\gamma = 1$ et $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t)) \cap L^2(0, T; H^1_0(\Omega_t))$.

Remarque 1. Si Ω_t est suffisamment régulier, les propriétés des espaces fonctionnels $H^s(0, T; H^r(\Omega_t))$ peuvent être déduites en utilisant l'opérateur de prolongement P de $H^{s+r}(Q)$ dans $H^{s+r}(\mathbb{R}^3)$ (voir par exemple [3]).

2. Compacité sur ρ

Nous montrons maintenant comment obtenir une borne sur ρ dans $L^{\gamma+\theta}(0,T;L^{\gamma+\theta}(K_t))$ (pour tout $1\leqslant\theta<\gamma$) ne dépendant que des données où K_t est un compact quelconque de Ω_t.

Remarque 2. Cette compacité sur ρ est suffisante pour passer à la limite dans les équations qui sont vérifiées au sens des distributions [5]. Cette régularité n'est pas nécessaire dans le cas $\gamma=1$ où l'estimation sur $\rho\log\rho$ est suffisante pour passer à la limite.

Lemme 2.1. *Sous les hypothèses de la Section* 1, $\rho\in L^{\gamma+\theta}(0,T;L^{\gamma+\theta}(K_t))$.

Démonstration. Comme d est suffisamment régulier, on peut définir $K\subset\bigcup_{t\in[0,T]}\Omega_t$ tel que $K_t=K\cap\Omega_t$ soit compact pourt tout t. On introduit une fonction $\phi\in C^\infty([0,T];C_0^\infty(\Omega_t))$ (par exemple) telle que $\phi\equiv1$ sur K et $0\leqslant\phi\leqslant1$ sur $\bigcup_{t\in[0,T]}\Omega_t$. Ainsi ϕu vérifie les conditions aux limites suivantes $\mathrm{Rot}(\phi u)=(\phi u)\cdot n=0$ sur Σ. En conséquence il existe (voir par exemple le travail effectué dans [2])

$$\begin{aligned}
&u_p=\nabla p,\quad p\in L^\infty\big(0,T;H^1(\Omega_t)\big)\cap L^2\big(0,T;H^2(\Omega_t)\big),\\
&u_q=\mathrm{Rot}\,q,\quad q\in L^\infty\big(0,T;H_0^1(\Omega_t)\big)\cap L^2\big(0,T;H^2(\Omega_t)\big)
\end{aligned}$$

tels que $\phi u=u_p+u_q$, $\mathrm{Supp}\,u_p=\mathrm{Supp}\,u_q=\mathrm{Supp}\,\phi$ et où p,q sont solutions de

$$\begin{aligned}
&-\Delta p=\mathrm{div}(\phi u)\quad\text{on }\Omega_t,\quad \frac{\partial p}{\partial n}=0\quad\text{on }\Sigma,\\
&-\Delta q=\mathrm{curl}(\phi u)\quad\text{on }\Omega_t,\quad q=0\quad\text{on }\Sigma.
\end{aligned}$$

En multipliant l'équation des moments par ϕ, on obtient

$$\frac{\partial\phi u}{\partial t}-\mu\Delta(\phi u)+\nabla(\phi\rho^\gamma)=R+\rho^\gamma\nabla\phi-\phi(u\cdot\nabla)u,$$

où

$$R=\phi\bigg[(w\cdot\nabla)u+(u\cdot\nabla)w+(w\cdot\nabla)w-\frac{\partial w}{\partial t}-F\bigg]+\frac{\partial\phi}{\partial t}u+2\mu\,\mathrm{Rot}\,u\,\mathrm{Rot}\,\phi-2\mu\,\mathrm{div}\,u\nabla\phi+2\mu u\Delta\phi$$

est borné dans $L^2(Q)$. De plus, u_p et u_q vérifient

$$\frac{\partial u_p}{\partial t}-\mu\Delta u_p+\nabla(\phi\rho^\gamma)=P_\nabla\big(R+\rho^\gamma\nabla\phi+\phi(u\cdot\nabla)u\big)=\nabla\xi_1+\nabla\xi_2+\nabla\xi_3,\tag{11}$$

$$\frac{\partial u_q}{\partial t}-\mu\Delta u_q=P_{\mathrm{Rot}}\big(R+\rho^\gamma\nabla\phi+\phi(u\cdot\nabla)u\big),\tag{12}$$

où P_∇ (resp. P_{curl}) est l'opérateur de projection L^2 sur $\mathrm{grad}(H^1(\Omega_t))$ (resp. $\mathrm{Rot}(H_0^1(\Omega_t))$). Comme R, $\phi(u\cdot\nabla)u$ et $\rho^\gamma\nabla\phi$ sont respectivement bounded dans $L^2(Q)$, $L^1(0,T;L^{2r/(r+2)}(\Omega_t))$ (avec $2\leqslant r<\infty$) et $L^\infty(0,T;L^1(\Omega_t))$ alors $\xi_1\in L^2(0,T;H^1(\Omega_t))$, $\xi_2\in L^\infty(0,T;W^{1,1}(\Omega_t))$ et $\xi_3\in L^1(0,T;W^{1,2r/(r+2)}(\Omega_t))$. On déduit de (11) que p vérifie

$$\frac{\partial p}{\partial t}-\mu\Delta p+\phi\rho^\gamma=\xi_1+\xi_2+\xi_3+\bar\xi(t),$$

où $\bar\xi(t)=\fint_{\Omega_t}(\phi\rho^\gamma+\xi_1+\xi_2+\xi_3)\in L^1(0,T)$. A ce stade, on choisit $\phi=\psi^\gamma$ dans l'égalité précédente. Alors, en multipliant par $(\psi\rho)^\theta$ on obtient :

$$\int_Q (\psi\rho)^{\gamma+\theta} = -\int_Q \frac{\partial(\psi\rho)^\theta p}{\partial t} + \int_Q \frac{\partial(\psi\rho)^\theta}{\partial t} p + \mu \int_Q (\psi\rho)^\theta \operatorname{div}(\phi u) + \int_Q (\psi\rho)^\theta (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + \int_Q (\psi\rho)^\theta \bar{\xi}(t). \tag{13}$$

Or, au moins formellement

$$\frac{\partial\rho^\theta}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^\theta u) = (1-\theta)\rho^\theta \operatorname{div} u,$$

ainsi

$$\int_Q \frac{\partial(\psi\rho)^\theta}{\partial t} p = \int_Q \frac{\partial\psi^\theta}{\partial t}\rho^\theta p + \int_Q \rho^\theta u \nabla(\psi^\theta p) + (1-\theta)\int_Q (\psi\rho)^\theta p \operatorname{div} u$$

et la relation (13) devient

$$\|\psi\rho\|_{L^{\gamma+\theta}(Q)}^{\gamma+\theta} = -\int_Q \frac{\partial(\psi\rho)^\theta p}{\partial t} + \int_Q \frac{\partial\psi^\theta}{\partial t}\rho^\theta p + \int_Q \rho^\theta u \nabla(\psi^\theta p) + (1-\theta)\int_Q (\psi\rho)^\theta p \operatorname{div} u + \mu \int_Q (\psi\rho)^\theta \operatorname{div}(\phi u) + \int_Q (\psi\rho)^\theta (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + \int_Q (\psi\rho)^\theta \bar{\xi}(t). \tag{14}$$

De $p \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega_t))$ et $(\psi\rho)^\theta \in L^\infty(0,T;L^{\gamma/\theta}(\Omega_t))$, on déduit que $\frac{\partial\psi^\theta}{\partial t}\rho^\theta p$ est borné dans $L^1(Q)$ et que

$$\int_{\Omega_t} \big((\psi\rho)^\theta p\big)(t) \in L^\infty(0,T).$$

Comme $\xi_1 \in L^2(0,T;H^1(\Omega_t))$ alors $\xi_1(\psi\rho)^\theta$ est borné dans $L^1(Q)$. De même, comme

$$\xi_3 \in L^1\big(0,T;W^{1,2r/(r+2)}(\Omega_t)\big) \hookrightarrow L^1\big(0,T;L^r(\Omega_t)\big)$$

pour tout $2 \leqslant r < \infty$ alors $\xi_3(\psi\rho)^\theta$ est borné dans $L^1(Q)$. Enfin $(\psi\rho)^\theta\bar{\xi}(t) \in L^1(Q)$ car $\bar{\xi}(t) \in L^1(0,T)$.

Les autres termes sont traités de la façon suivante. Comme $\operatorname{div} u \in L^2(Q)$, $\operatorname{div}(\phi u) \in L^2(Q)$, $p \in L^\infty(0,T; H^1(\Omega_t))$, $\xi_2 \in L^\infty(0,T;W^{1,1}(\Omega_t)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))$ et $\theta < \gamma$, on a :

$$(1-\theta)\int_Q (\psi\rho)^\theta p \operatorname{div} u \leqslant \mathbb{C}_1 \big\|(\psi\rho)^\theta\big\|_{L^{(\gamma+\theta)/\theta}(Q)} \|p\|_{L^m(Q)} \|\operatorname{div} u\|_{L^2(Q)} \leqslant \mathbb{C}_2 \|\psi\rho\|_{L^{\gamma+\theta}(Q)}^\theta, \qquad \frac{2(\gamma+\theta)}{\gamma-\theta} \leqslant m < \infty,$$

$$\mu\int_Q (\psi\rho)^\theta \operatorname{div}(\phi u) \leqslant \mathbb{C}_3 \big\|(\psi\rho)^\theta\big\|_{L^{(\gamma+\theta)/\theta}(Q)} \|\operatorname{div} u\|_{L^2(Q)} \leqslant \mathbb{C}_4 \|\psi\rho\|_{L^{\gamma+\theta}(Q)}^\theta,$$

$$\int_Q (\psi\rho)^\theta \xi_2 \leqslant \mathbb{C}_5 \big\|(\psi\rho)^\theta\big\|_{L^{(\gamma+\theta)/\theta}(Q)} \|\xi_2\|_{L^2(Q)} \leqslant \mathbb{C}_6 \|\psi\rho\|_{L^{\gamma+\theta}(Q)}^\theta.$$

De plus, $\rho^\theta u \nabla(\psi^\theta p) = \psi^\theta \rho^\theta u \cdot \nabla p + \rho^\theta p u \cdot \nabla \psi^\theta$ est borné dans $L^1(Q)$ car $\rho^\theta \in L^\infty(0,T; L^{\gamma/\theta}(\Omega_t))$, $\psi^\theta, \nabla\psi^\theta \in L^\infty(Q)$, $u \in L^2(0,T; L^m(\Omega_t))$ pour tout $1 \leqslant m < \infty$, $p \in L^2(0,T; L^\infty(\Omega_t))$ et $\nabla p \in L^2(0,T; H^1(\Omega_t))$. Finalement, (14) conduit à

$$\|\psi\rho\|^{\gamma+\theta}_{L^{\gamma+\theta}(Q)} \leqslant \mathbb{C}_7 \|\psi\rho\|^{\theta}_{L^{\gamma+\theta}(Q)} + \mathbb{C}_8$$

qui montre que ρ est borné dans $L^{\gamma+\theta}(0,T; L^{\gamma+\theta}(K_t))$. $\square$

Remarque 3. Quand γ est voisin de 1.5 ou 1.6, ce modèle trouve des applications dans les problèmes d'interaction fluide–structure [4]. Le cas $\gamma = 1$ est particulièrement intéressant. En effet, cette situation correspond aus équations de shallow water sur un domaine variable et de nombreuses applications peuvent être trouvées à ce modèle comme par exemple la modélisation du niveau des fleuves [8] ou le transport (pétrole) par l'eau. Pour l'existence de solutions faibles sur un domaine fixe nous renvoyons à [7] et à [1] où l'existence globale de solutions faibles est obtenue pour une autre modélisation de la viscosité.

Références

[1] D. Bresch, B. Desjardins, Sur un modèle de Saint-Venant visqueux et sa limite quasi-géostrophique, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1079–1084.
[2] F.J. Chatelon, P. Orenga, Some smoothness and uniqueness results for a shallow-water problem, Adv. Differential Equations 3 (1998) 155–176.
[3] F. Flori, P. Orenga, On a nonlinear fluid–structure interaction problem defined on a domain depending on time, Nonlinear Anal. 38 (5) (1999) 549–569.
[4] F. Flori, P. Orenga, Fluid–structure interaction: analysis of a 3-D compressible model, Ann. Inst. H. Poincaré C 17 (6) (2000) 753–777.
[5] P.L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Mechanics, vol. 2, Oxford University Press, 1998.
[6] P.L. Lions, Bornes sur la densité pour les équations de Navier–Stokes compressibles isentropiques avec conditions aux limites de Dirichlet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 328 (1999) 659–662.
[7] P. Orenga, Un théorème d'existence de solutions d'un problème de shallow water, Arch. Rational Mech. Anal. 130 (1995) 183–204.
[8] M. Schulz, G. Steinebach, Two-dimensional modelling of the river Rhine, J. Comput. Appl. Math. 145 (2002) 11–20.